

# **Introdução às Medidas em Física (4300152)**

**Aula 04 (13/04/2023)**

*Paula R. P. Allegro*

*paula.allegro@usp.br*

# Na aula de hoje:

- Resumo dos principais pontos da aula anterior
- Conceitos:
  - Instrumentos de medida
    - Paquímetro
    - Micrômetro
  - Noções de estatística:
    - Propagação de Incertezas
    - Compatibilidade entre medidas
- Experiência 2.2: Densidade de Sólidos
  - Realizar medidas de diferentes objetos com paquímetro e micrômetro
  - Identificar os tipos de plásticos através da comparação das medidas (+incertezas) com valores tabelados

# Referências para a aula de hoje:

- Apostila do curso (página principal do moodle):
  - Capítulo 3: Instrumentos de Medidas
  - Experiência II (Aulas 03 e 04): Densidade de Sólidos.
  
- Texto: Conceitos Básicos da Teoria de Erros (aba Material Didático / arquivos 2023)
  - Capítulo 2: Propagação de Erros e Incertezas

# Da aula anterior: tipo de incertezas

- Tipos de incerteza que influenciam uma medida:
  - Instrumental
    - precisão do instrumento utilizado para realizar a medida direta de uma grandeza
    - dificuldade de realizar essa medida
  - Estatística
    - flutuação no resultado de uma mesma medida.
      - Cálculo de média, desvio padrão e desvio padrão da média
  - Sistemática
    - Aquela onde a medida é desviada em uma única direção, tornando os resultados viciados.
      - Devem ser corrigidas ou refeitas

# Qual é a incerteza total de uma medida?

- Incertezas resultantes do ato de medir:
  - Instrumental:
  - Estatística:
- Incerteza total da medida ( $\Delta$ ): **combinação de todas as incertezas**
  
- Caso um tipo de incerteza seja dominante, pode-se desprezar a outra:
  - Período do pêndulo medido com o **relógio de pulso**:  
Incerteza instrumental  $>$  estatística
  - Período do pêndulo medido com o **cronômetro de 0,01s**:  
Incerteza estatística  $>$  instrumental

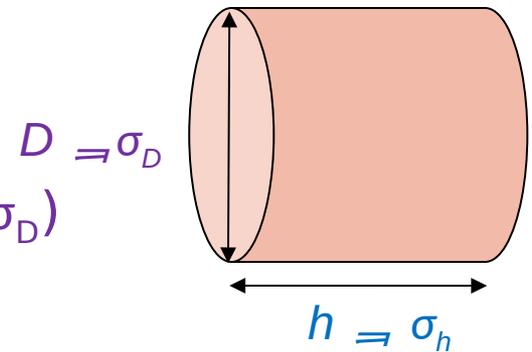
# Propagação de incerteza

- E se uma grandeza depende de outras duas medidas, como por exemplo, na medida do volume de um cilindro? O que fazer?
- O volume (**V**) de um cilindro é dado por:

Onde:

$D$  é o diâmetro do cilindro  $\pm$  incerteza ( $\sigma_D$ )

$h$  é a altura do cilindro  $\pm$  incerteza ( $\sigma_h$ )



# Propagação de incerteza

- A incerteza final ( $\sigma_V$ ) no volume  $V$  do cilindro depende:
  - da incerteza no volume ( devido à incerteza ( $\sigma_d$ ) no diâmetro do cilindro:
  - da incerteza no volume ( devido à incerteza ( $\Delta h$ ) na altura do cilindro

$$\sigma_{V_{\sigma_h}} = \frac{V_{m\acute{a}ximo(devido\ a\ \sigma_h)} - V_{m\acute{i}nimo(devido\ a\ \sigma_h)}}{2}$$

- Assim:

Assumindo que a incerteza devido ao diâmetro é **independente** da incerteza devido à altura

# Definição de derivada

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$$

$$x' = x + \frac{\Delta x}{2}$$

$$\frac{df}{dx'} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{f\left(x' + \frac{\Delta x}{2}\right) - f\left(x' - \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \right)$$

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{2}$$

$$\frac{df}{dx'} = \lim_{\Delta x' \rightarrow 0} \left( \frac{f(x' + \Delta x') - f(x' - \Delta x')}{2 \cdot \Delta x'} \right)$$

# Cálculo da incerteza do volume do cilindro devido a variação do diâmetro

- Alguma semelhança entre as duas expressões abaixo?

$$\frac{df}{dx'} = \lim_{\Delta x' \rightarrow 0} \left( \frac{f(x' + \Delta x') - f(x' - \Delta x')}{2 \cdot \Delta x'} \right)$$

$$\sigma_V^D = \left[ \frac{V(D + \sigma_D) - V(D - \sigma_D)}{2} \right]$$

# Cálculo da incerteza do volume do cilindro devido a variação do diâmetro

- Alguma semelhança entre as duas expressões abaixo?

$$\frac{df}{dx'} = \lim_{\Delta x' \rightarrow 0} \left( \frac{f(x' + \Delta x') - f(x' - \Delta x')}{2 \cdot \Delta x'} \right)$$

$$\sigma_V^D = \left[ \frac{V(D + \sigma_D) - V(D - \sigma_D)}{2} \right] \cdot \frac{\sigma_D}{\sigma_D}$$

# Cálculo da incerteza do volume do cilindro devido a variação do diâmetro

- Alguma semelhança entre as duas expressões abaixo?

$$\frac{df}{dx'} = \lim_{\Delta x' \rightarrow 0} \left( \frac{f(x' + \Delta x') - f(x' - \Delta x')}{2 \cdot \Delta x'} \right)$$

$$\sigma_V^D = \left[ \frac{V(D + \sigma_D) - V(D - \sigma_D)}{2} \right] \cdot \frac{\sigma_D}{\sigma_D}$$

$$\sigma_V^D = \left[ \frac{V(D + \sigma_D) - V(D - \sigma_D)}{2 \sigma_D} \right] \sigma_D \quad \rightarrow \quad \sigma_V^D = \frac{\partial V}{\partial D} \sigma_D$$

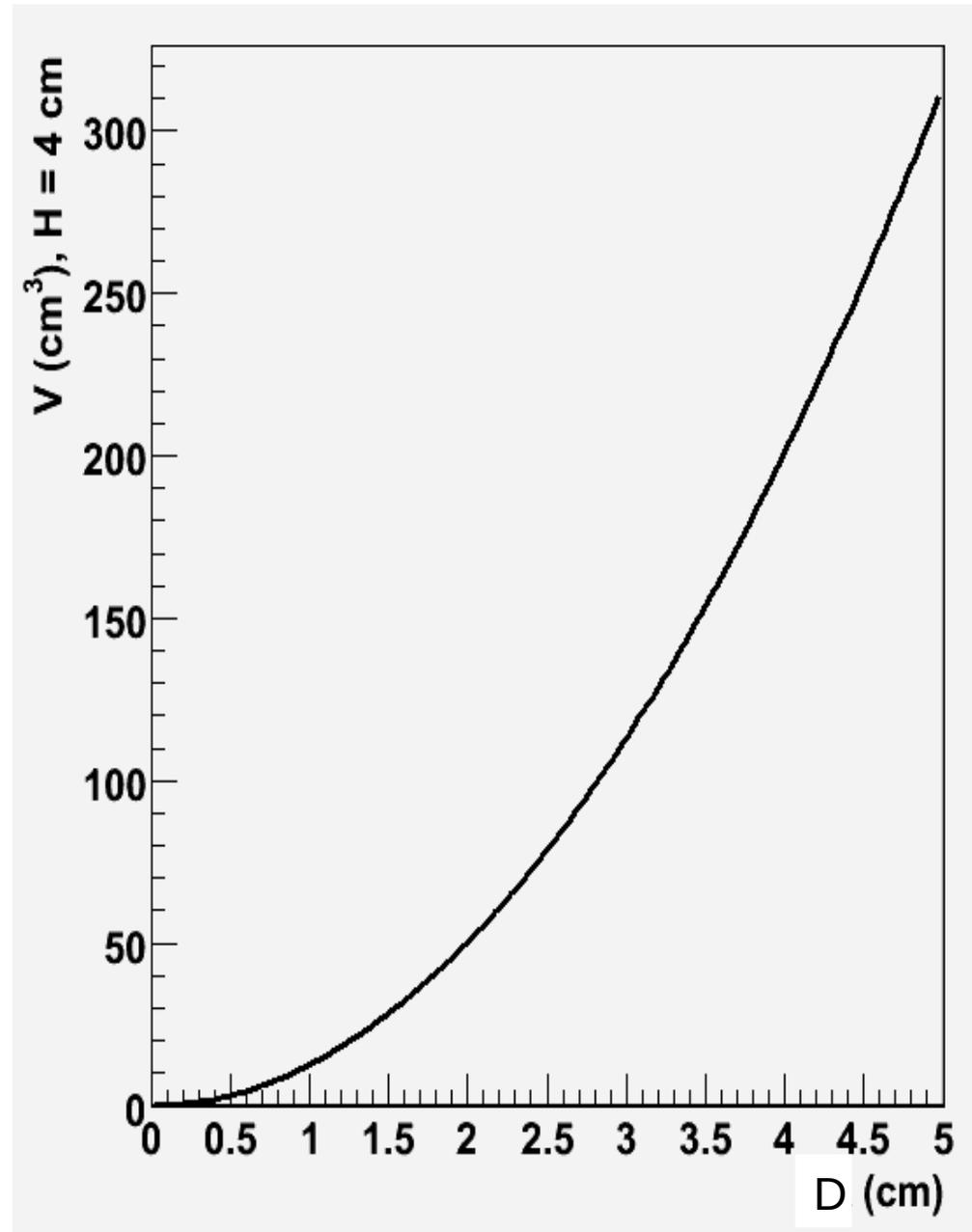
# Propagação de incerteza

- Partindo da dependência do volume de um cilindro com o diâmetro:

$$V = \Pi \left( \frac{D}{2} \right)^2 h$$

- Esta fórmula é razoável?

$$\sigma_V^D = \frac{\partial V}{\partial D} \sigma_D$$



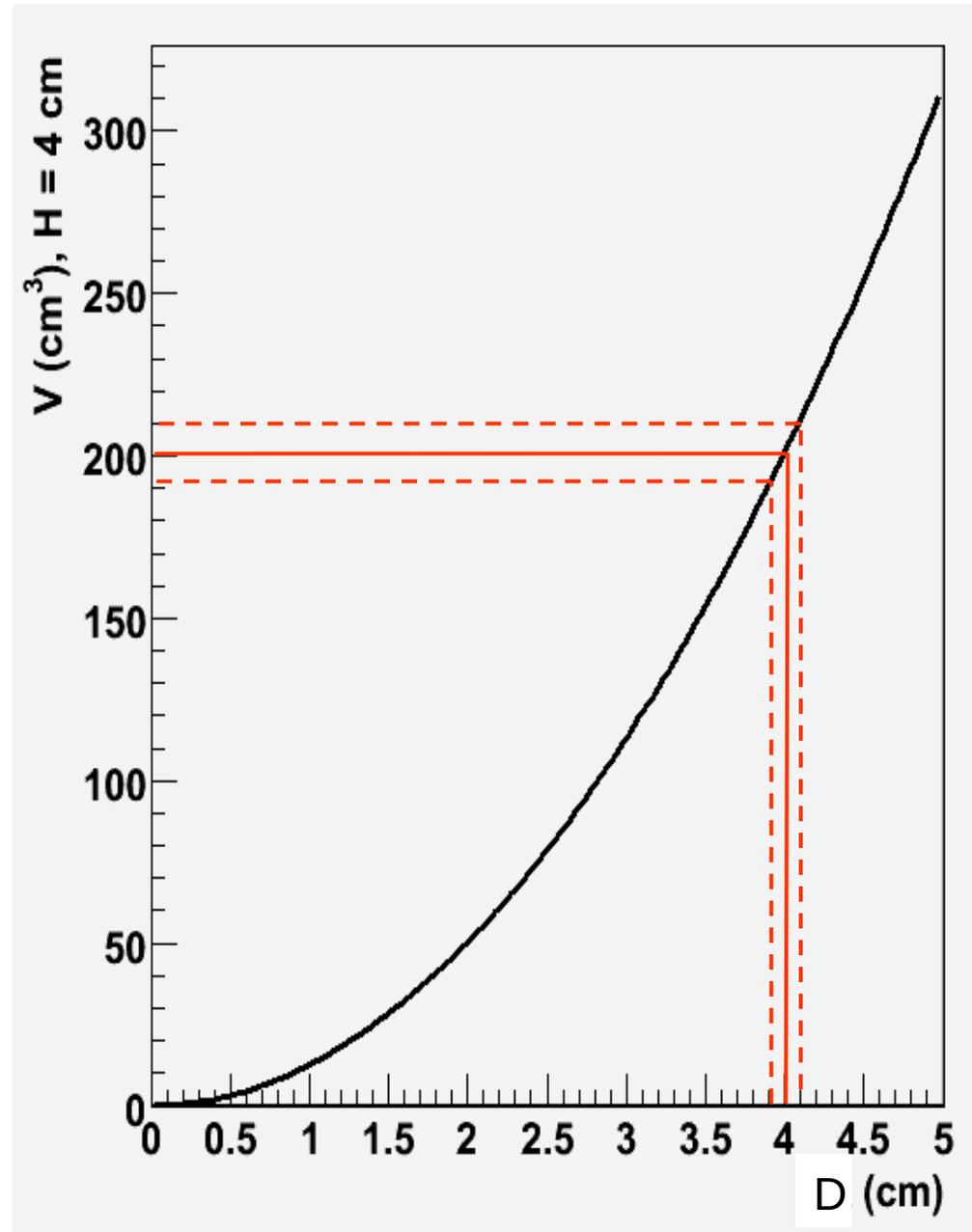
# Propagação de incerteza

- Partindo da dependência do volume de um cilindro com o diâmetro:

$$V = \Pi \left( \frac{D}{2} \right)^2 h$$

- Esta fórmula é razoável?

$$\sigma_V^D = \frac{\partial V}{\partial D} \sigma_D$$



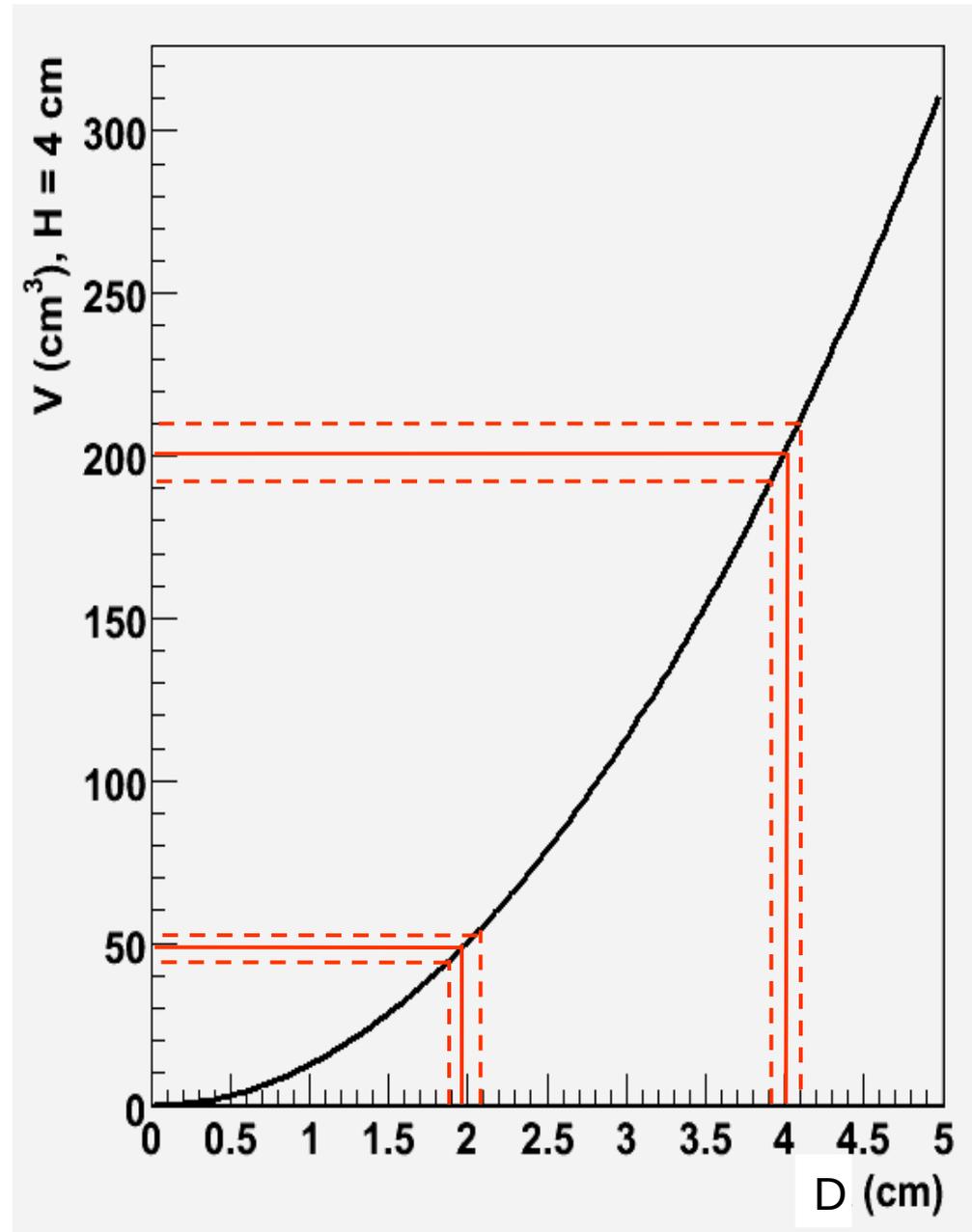
# Propagação de incerteza

- Partindo da dependência do volume de um cilindro com o diâmetro:

$$V = \Pi \left( \frac{D}{2} \right)^2 h$$

- Esta fórmula é razoável?

$$\sigma_V^D = \frac{\partial V}{\partial D} \sigma_D$$



# Cálculo da incerteza do volume do cilindro

- Analogamente, a incerteza no volume ( devido à incerteza ( $\Delta h$ ) na altura do cilindro fica:

$$\sigma_V^h = \left[ \frac{V(h + \sigma_h) - V(h - \sigma_h)}{2\sigma_h} \right] \sigma_D \quad \Rightarrow \quad \sigma_V^h = \frac{\partial V}{\partial h} \sigma_h$$

- E a incerteza total fica:

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\sigma_V^D\right)^2 + \left(\sigma_V^h\right)^2}$$
$$\sigma_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)^2 \sigma_D^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 \sigma_h^2}$$

# Como calcular as derivadas

- Suponha que todo o resto da expressão é uma constante:

$$\frac{\partial V}{\partial D} = \frac{\partial}{\partial D} \left( \frac{\Pi}{4} D^2 h \right) = \frac{\Pi}{4} h \frac{\partial (D^2)}{\partial D} = \frac{\Pi}{4} h (2 D) = \frac{\Pi}{2} h D$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{\Pi}{4} D^2 h \right) = \frac{\Pi}{4} D^2 \frac{\partial (h)}{\partial h} = \frac{\Pi}{4} D^2 (1) = \frac{\Pi}{4} D^2$$

# Desse modo...

- Incerteza do volume do cilindro fica:

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)^2 \sigma_D^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 \sigma_h^2}$$

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} h D\right)^2 \sigma_D^2 + \left(\frac{\pi}{4} D^2\right)^2 \sigma_h^2}$$

$$\sigma_V = \frac{\pi}{4} D^2 h \sqrt{\left(2 \frac{\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2}$$

Substituindo:  $V = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 h$

$$\frac{\sigma_V}{V} = \sqrt{\left(2 \frac{\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2}$$

# Cálculo da incerteza da densidade

- A densidade ( $d$ ) de materiais sólidos homogêneos é dada por :

$$d = m/V$$

$m$  é a massa do cilindro  $\pm$  incerteza ( $\sigma_m$ )

$V$  é o volume do cilindro  $\pm$  incerteza ( $\sigma_m$ )

- A incerteza é dada por:

$$\frac{\partial d}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{m}{V} \right) = \frac{1}{V} \frac{\partial (m)}{\partial m} = \frac{1}{V} (1) = \frac{1}{V}$$

$$\frac{\partial d}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{m}{V} \right) = m \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{1}{V} \right) = m \left( -\frac{1}{V^2} \right) = -\frac{m}{V^2}$$

$$\sigma_d = \sqrt{\left( \frac{1}{V} \sigma_m \right)^2 + \left( -\frac{m}{V^2} \sigma_v \right)^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\sigma_d}{d} = \sqrt{\left( \frac{\sigma_m}{m} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_v}{V} \right)^2}$$

# Cálculo direto da incerteza da densidade

$$\frac{\partial d}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{4m}{\pi D^2 h} \right) = \frac{4}{\pi D^2 h} \frac{\partial(m)}{\partial m} = \frac{4}{\pi D^2 h} (1) = \frac{4}{\pi D^2 h}$$

$$\frac{\partial d}{\partial D} = \frac{\partial}{\partial D} \left( \frac{4m}{\pi D^2 h} \right) = \frac{4m}{\pi h} \frac{\partial}{\partial D} \left( \frac{1}{D^2} \right) = \frac{4m}{\pi D^2 h} \left( -\frac{2}{D^3} \right) = -\frac{8m}{\pi h D^3}$$

$$\frac{\partial d}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{4m}{\pi D^2 h} \right) = \frac{4m}{\pi D^2} \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{1}{h} \right) = \frac{4m}{\pi D^2 h} \left( -\frac{1}{h^2} \right) = -\frac{4m}{\pi D^2 h^2}$$

$$\sigma_d = \sqrt{\left( \frac{4}{\pi D^2 h} \sigma_m \right)^2 + \left( -\frac{8m}{\pi h D^3} \sigma_D \right)^2 + \left( -\frac{4m}{\pi D^2 h^2} \sigma_h \right)^2}$$

$$\frac{\sigma_d}{d} = \sqrt{\left( \frac{\sigma_m}{m} \right)^2 + \left( 2 \frac{\sigma_D}{D} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_h}{h} \right)^2}$$



# Exercício em aula

- Calcule o valor do volume da peça e de sua incerteza usando as medidas de diâmetro e altura fornecidos abaixo. Use  $\pi = 3,1416$

$$V = \pi \left( \frac{D}{2} \right)^2 h$$

$$\frac{\sigma_V}{V} = \sqrt{\left( 2 \frac{\sigma_D}{D} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_h}{h} \right)^2}$$

Diâmetro (cm)	altura (cm)
4,007 ± 0,002	5,106 ± 0,004

- Avalie a incerteza relativa tanto das medidas do diâmetro e de altura como para a informação do volume.

Incerteza relativa do Diâmetro : 0,0005 = 0,05%

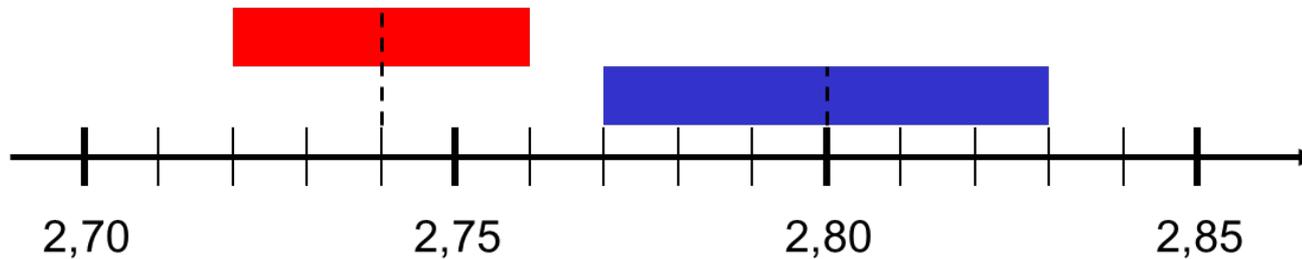
Incerteza relativa da Altura : 0,0008 = 0,08%

Incerteza relativa do Volume : 0,0013 = 0,13 %

Volume: 64,39 ± 0,08 cm<sup>3</sup>

# Comparando duas medidas

- Comparando  $2,74 \pm 0,02 \text{ mm}$  com  $2,80 \pm 0,03 \text{ mm}$ 
  - Incerteza é uma estimativa do erro (valor verdadeiro)



- Existe uma probabilidade dessas duas medidas representarem o mesmo valor verdadeiro?

# Compatibilidade

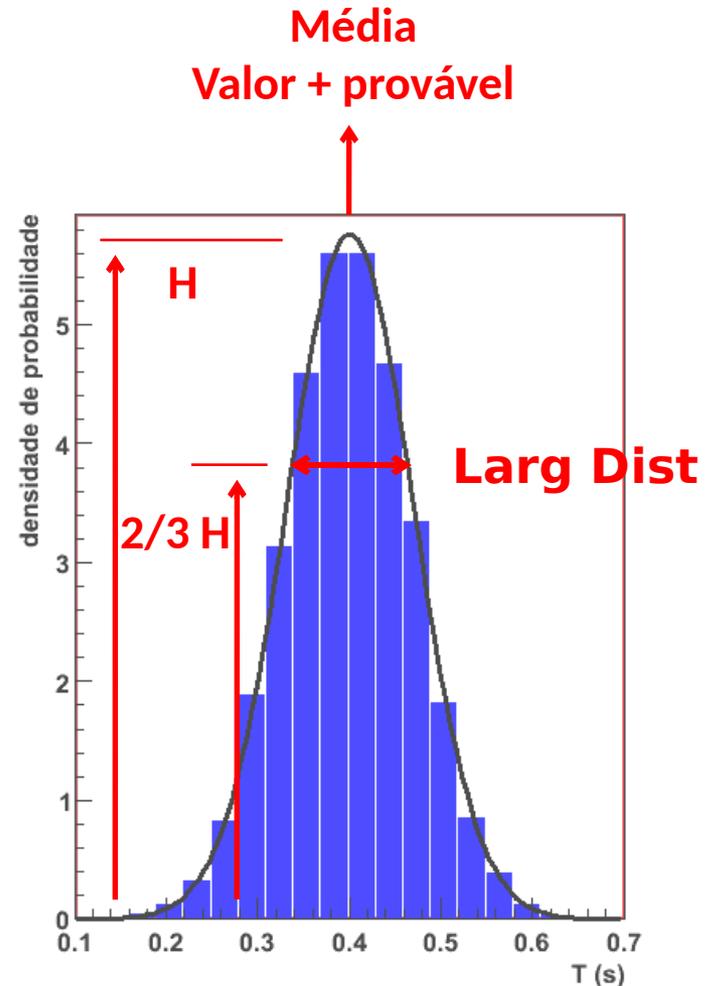
- Incerteza = Intervalo confiança

◦ Paralelo com distribuição estatística:

$$[M - \sigma; M + \sigma] = 68\%$$

$$[M - 2\sigma; M + 2\sigma] = 95\%$$

$$[M - 3\sigma; M + 3\sigma] = 99,9\%$$



# Critério para compatibilidade

- Superposição em  $1\sigma$  = compatíveis
  - Superposição em  $2\sigma$  ou  $3\sigma$ 
    - Compatíveis com menor probabilidade
- Teste Z indica essa probabilidade
  - Comparação entre  $(a \pm \sigma_a)$  e  $(b \pm \sigma_b)$

$$Z = \frac{|a - b|}{\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}}$$

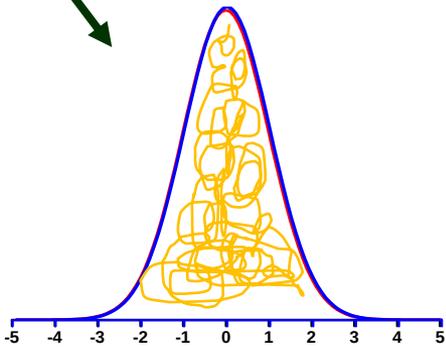
$0 < Z \leq 1$ , compatíveis ao nível de  $1\sigma$

$1 < Z \leq 2$ , compatíveis ao nível de  $2\sigma$

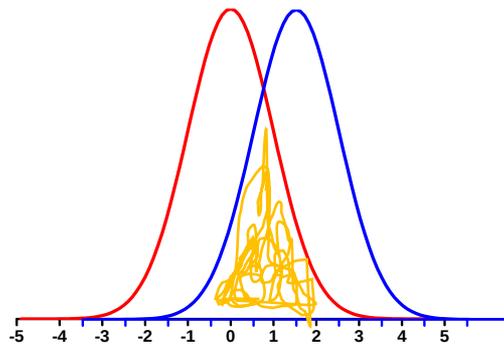
$2 < Z \leq 3$ , compatíveis ao nível de  $3\sigma$

# Compatibilidade

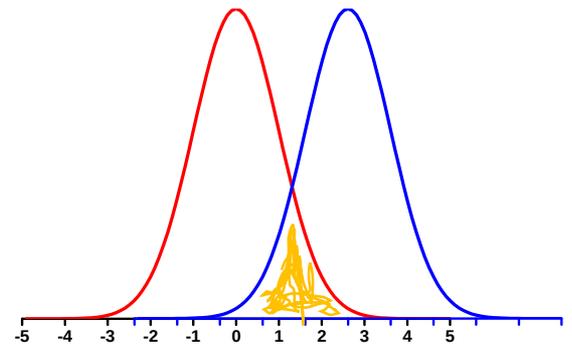
$a = b$



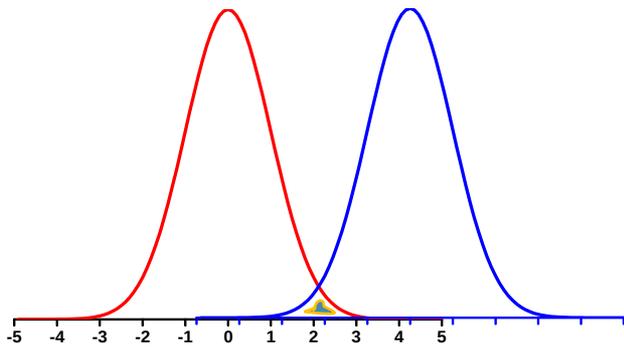
$Z = 0$



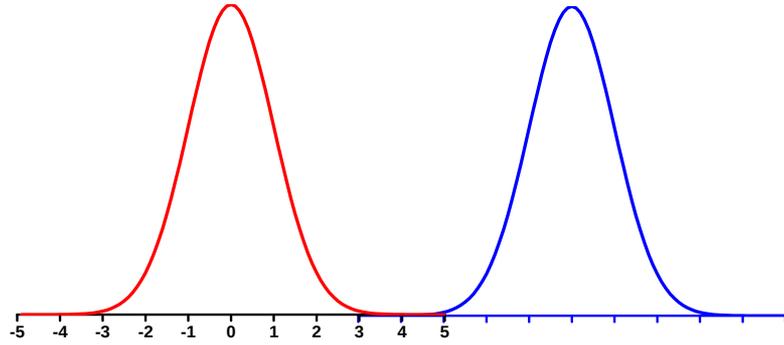
$Z = 1$



$Z = 2$



$Z = 3$



$Z > 3$

# Exercício em aula

- Escolha a alternativa que represente o nível de compatibilidade entre os dois conjuntos de dados apresentados abaixo. Cada conjunto está representado em uma linha. Não se esqueça que vc deve calcular o fator Z para cada conjunto antes de responder a questão.

$$Z = \frac{|a - b|}{\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}}$$

$0 < Z \leq 1$ , compatíveis ao nível de  $1\sigma$

$1 < Z \leq 2$ , compatíveis ao nível de  $2\sigma$

$2 < Z \leq 3$ , compatíveis ao nível de  $3\sigma$

$Z > 3$ , discrepantes

	Aluno 1	Aluno 2	Nível de compatibilidade
--	---------	---------	--------------------------

Medida  $3.452 \pm 0.009$   $3.331 \pm 0.004$

	Aluno 1	Aluno 2	Nível de compatibilidade
--	---------	---------	--------------------------

Medida  $33.4 \pm 0.2$   $31.57643 \pm 0.00002$

# Exercícios em aula

- Escolha a alternativa que represente o nível de compatibilidade entre os dois conjuntos de dados apresentados abaixo. Cada conjunto está representado em uma linha. Não se esqueça que vc deve calcular o fator Z para cada conjunto antes de responder a questão.

$$Z = \frac{|a - b|}{\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}}$$

$0 < Z \leq 1$ , compatíveis ao nível de  $1\sigma$

$1 < Z \leq 2$ , compatíveis ao nível de  $2\sigma$

$2 < Z \leq 3$ , compatíveis ao nível de  $3\sigma$

$Z > 3$ , discrepantes

	Aluno 1	Aluno 2	Nível de compatibilidade
--	---------	---------	--------------------------

Medida  $3.452 \pm 0.009$   $3.331 \pm 0.004$

Incompatíveis

	Aluno 1	Aluno 2	Nível de compatibilidade
--	---------	---------	--------------------------

Medida  $33.4 \pm 0.2$

$31.57643 \pm 0.00002$

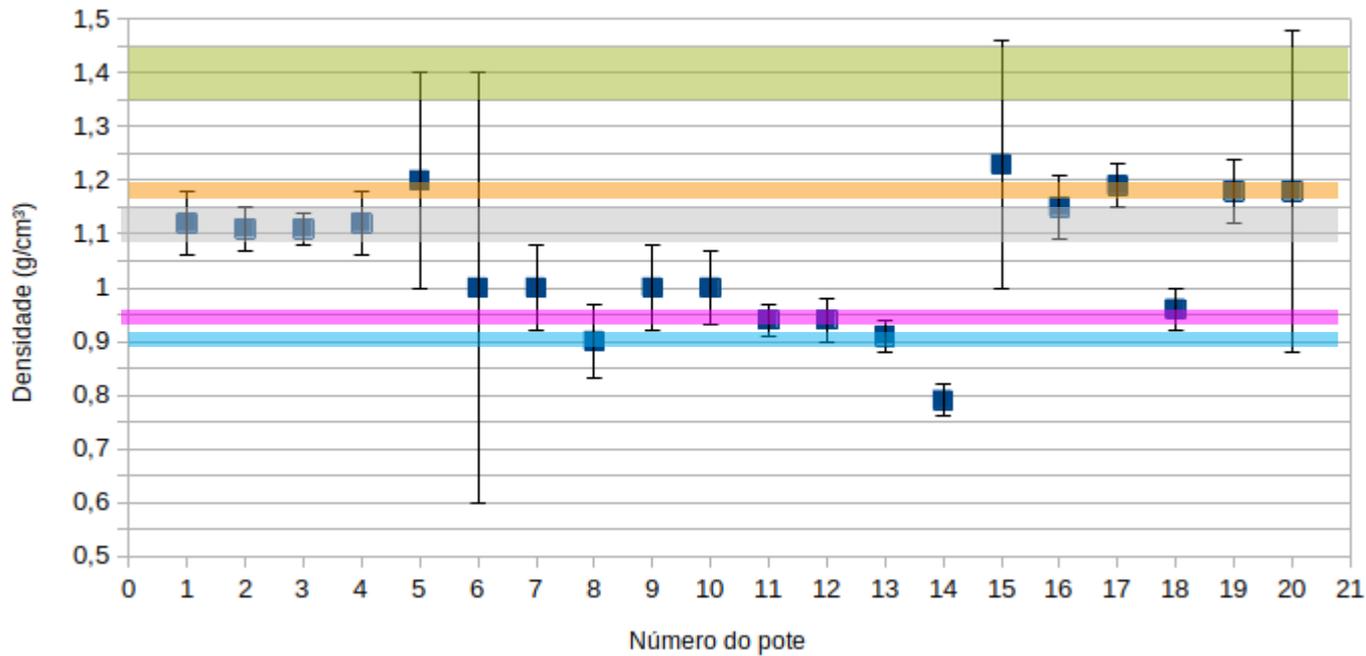
Incompatíveis

# **Análise dos resultados da aula passada**

Quantos tipos de plástico tem na sala?

# Dados primeira aula (noturno)

Densidades dos objetos - balança digital

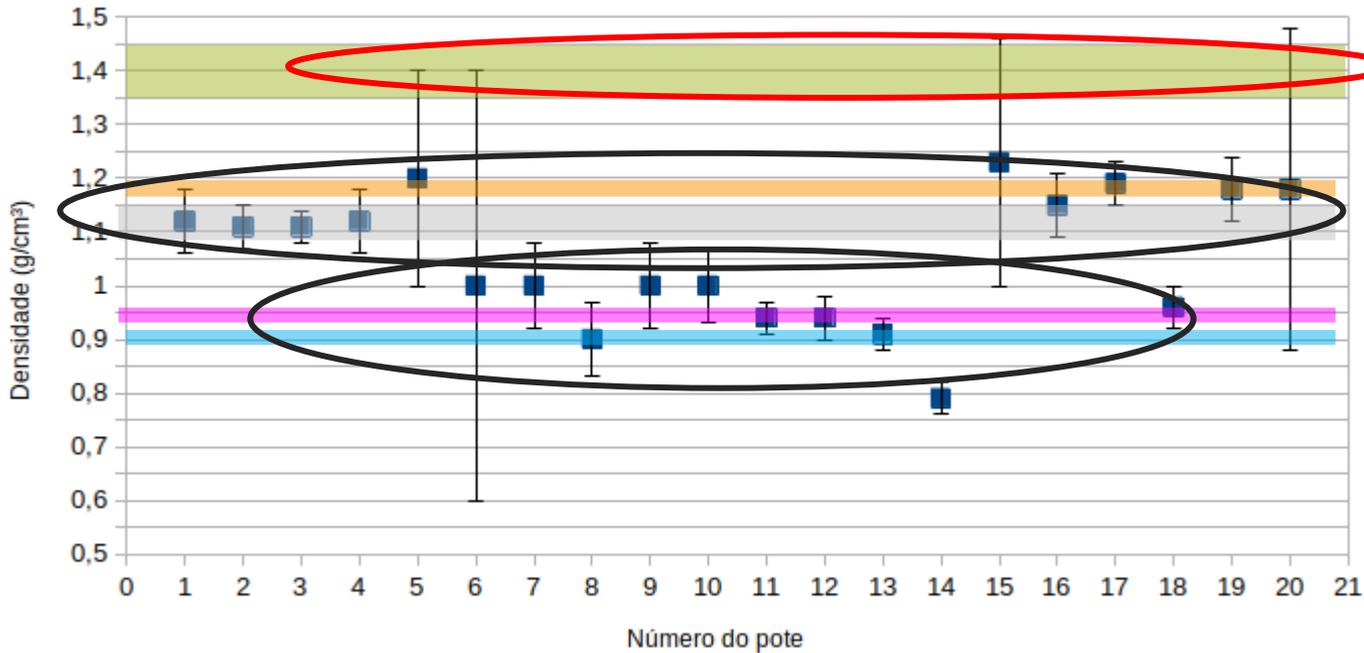


material	d(g/cm <sup>3</sup> )
PVC	1,35 a 1,45
Acrílico	1,17 a 1,20
Nylon	1,09 a 1,14
Polietileno	0,941 a 0,965
Polipropileno	0,900 a 0,915

# Dados primeira aula (noturno)

Tipos de plástico: 2  
Talvez 3 se levarmos em conta 1 incerteza na compatibilidade dos dados

Densidades dos objetos - balança digital

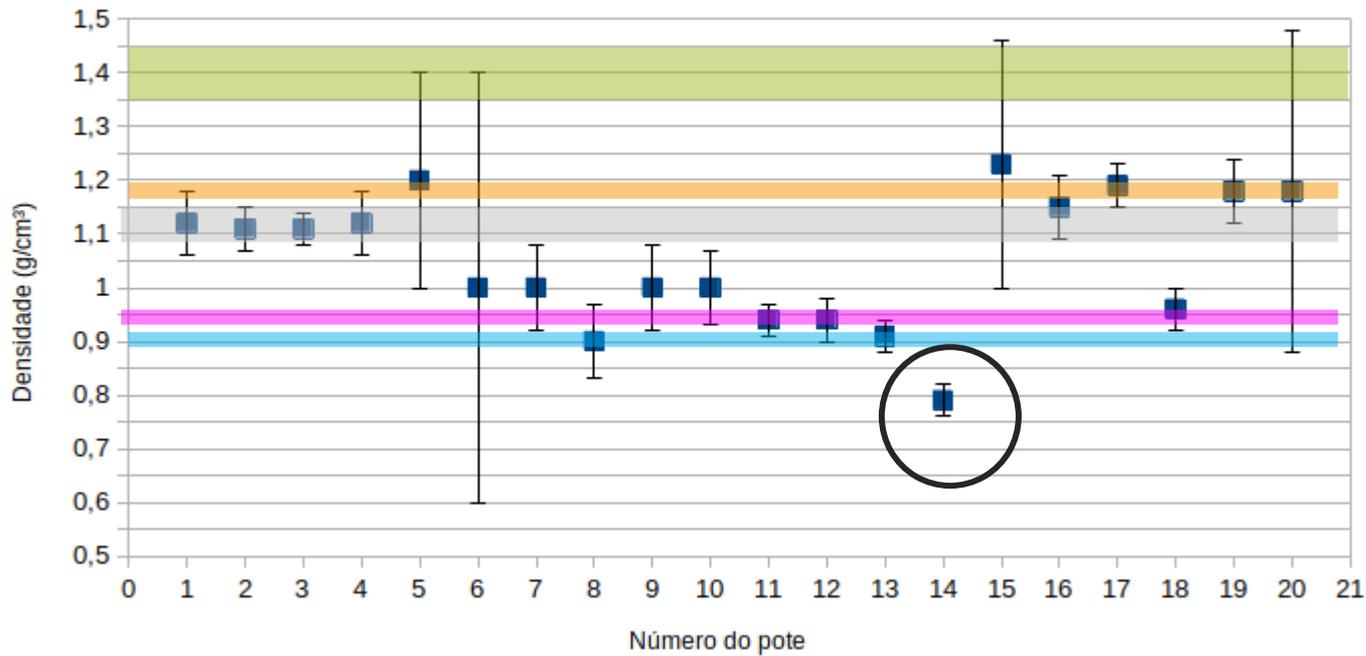


material	d(g/cm <sup>3</sup> )
PVC	1,35 a 1,45
Acrílico	1,17 a 1,20
Nylon	1,09 a 1,14
Polietileno	0,941 a 0,965
Polipropileno	0,900 a 0,915

# Dados primeira aula (noturno)

Plástico não listado  
ou erro grosseiro?

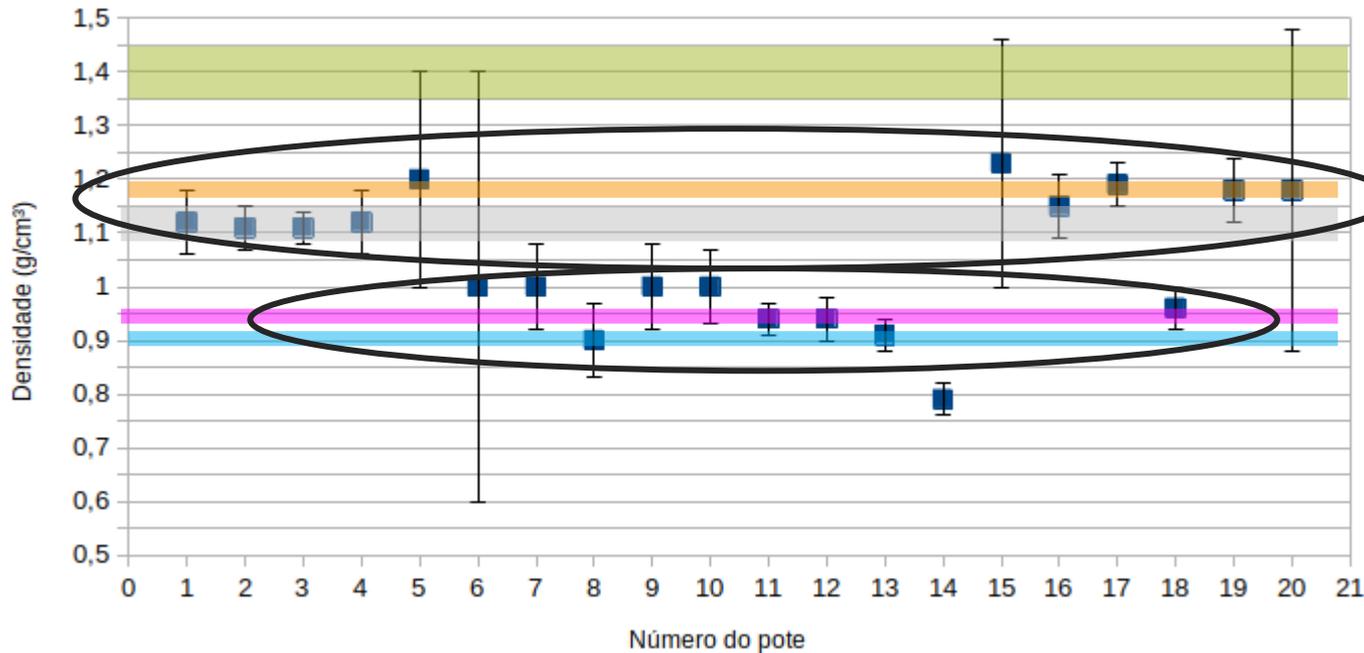
Densidades dos objetos - balança digital



material	d(g/cm <sup>3</sup> )
PVC	1,35 a 1,45
Acrílico	1,17 a 1,20
Nylon	1,09 a 1,14
Polietileno	0,941 a 0,965
Polipropileno	0,900 a 0,915

# Dados primeira aula (noturno)

Densidades dos objetos - balança digital



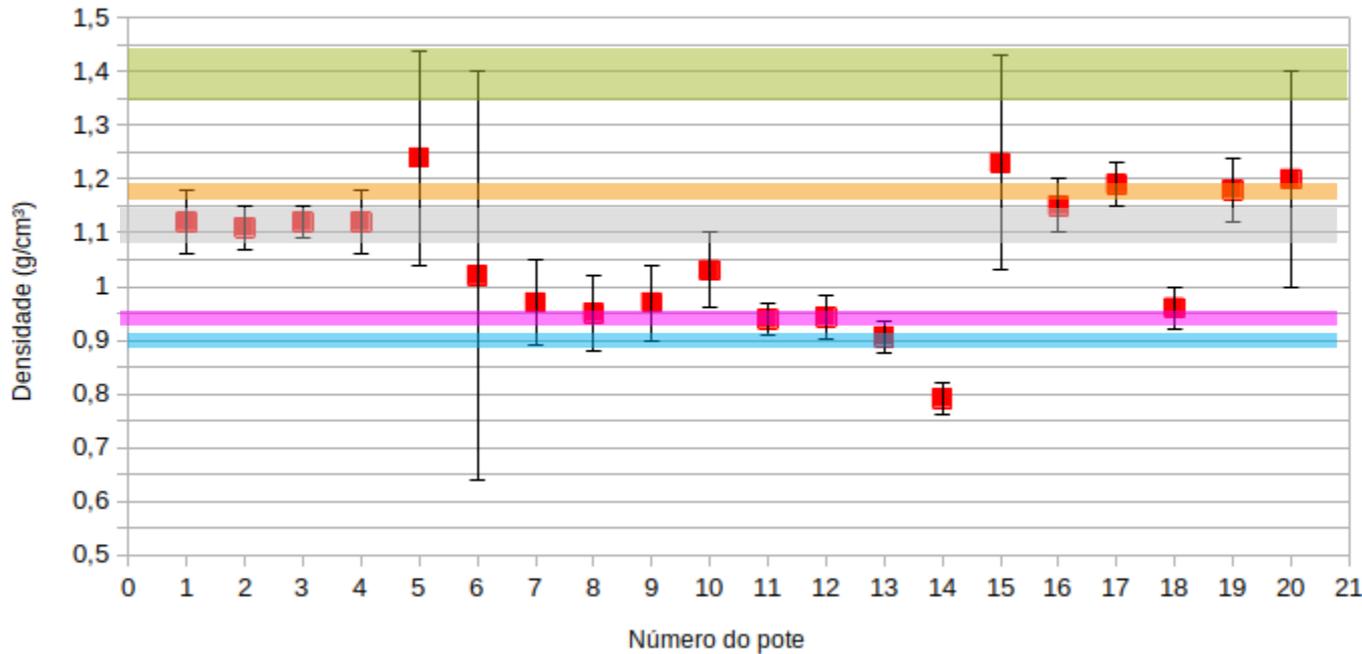
material	d(g/cm <sup>3</sup> )
PVC	1,35 a 1,45
Acrílico	1,17 a 1,20
Nylon	1,09 a 1,14
Polietileno	0,941 a 0,965
Polipropileno	0,900 a 0,915

- É possível definir qual o tipo de plástico desses 2 conjuntos?
- É possível afirmar que os sólidos dos dois grupos são feitos do mesmo plástico?

# Dados primeira aula (noturno)

Não mudaram muito em relação aos dados da balança digital!

Densidades dos objetos - balança analítica



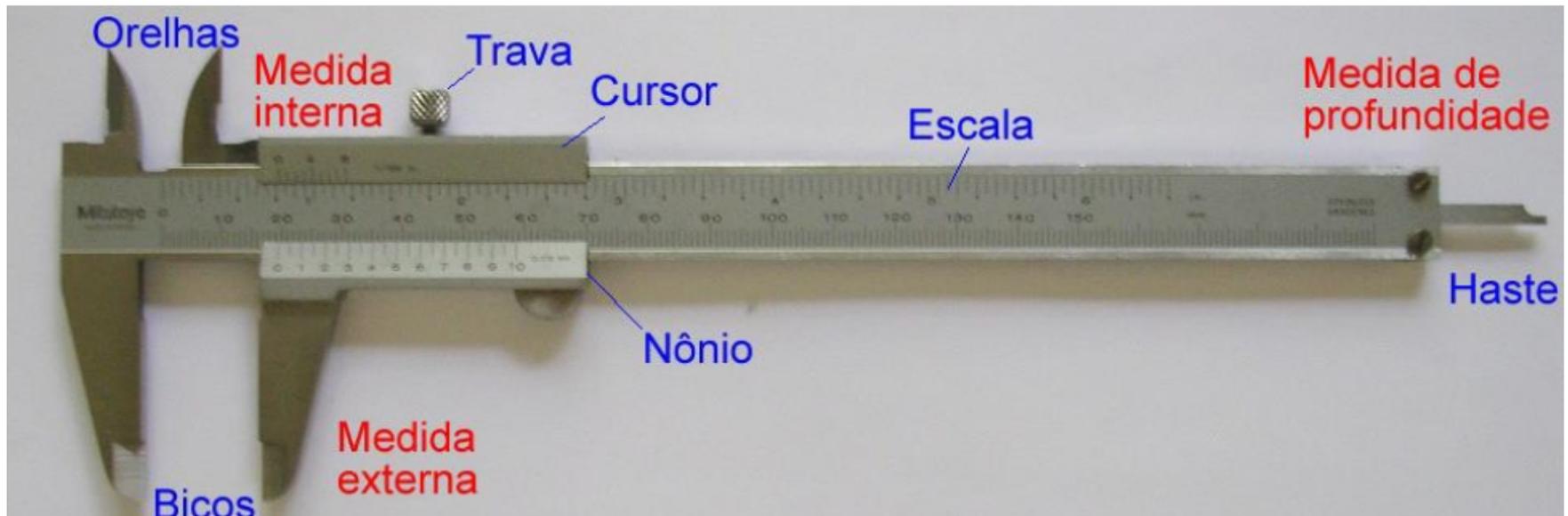
material	d(g/cm <sup>3</sup> )
PVC	1,35 a 1,45
Acrílico	1,17 a 1,20
Nylon	1,09 a 1,14
Polietileno	0,941 a 0,965
Polipropileno	0,900 a 0,915

# Conclusões Parciais

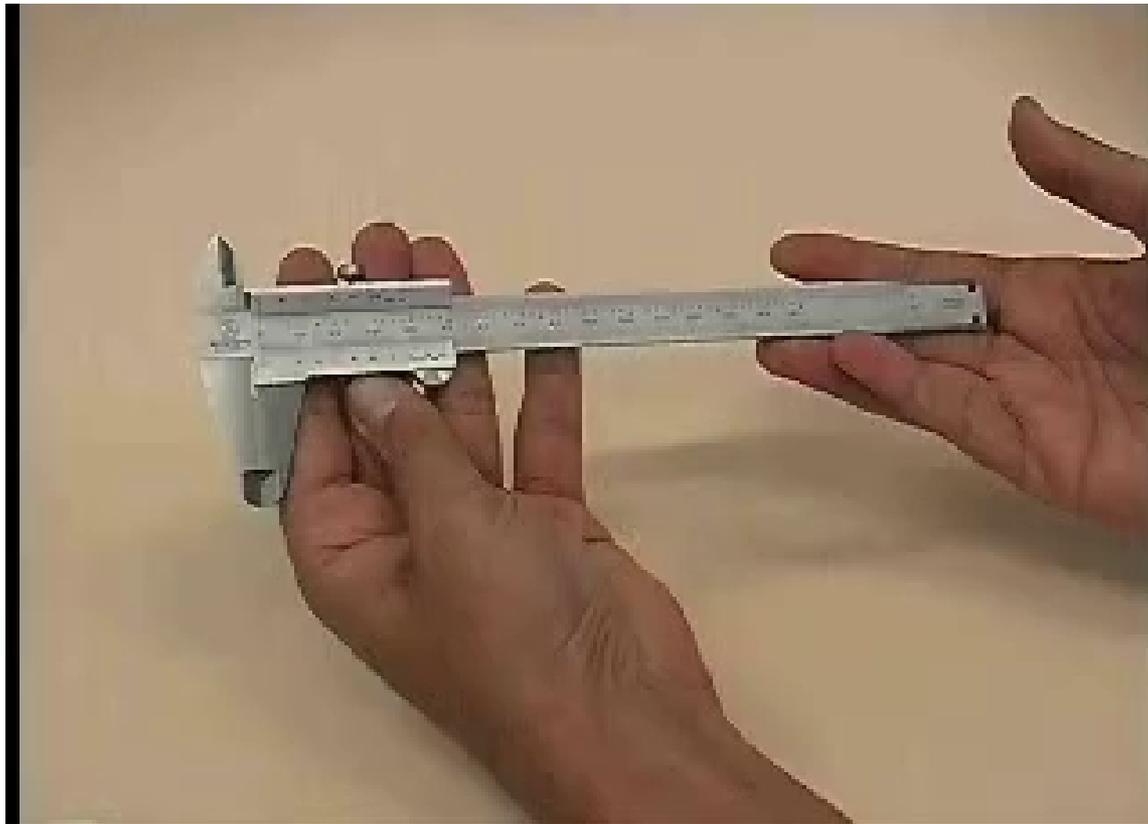
- Será que é possível que exista mais tipos de plástico do que aqueles identificados até o momento?
- Como seria possível saber isso?
  - Melhorando a precisão do experimento, ou seja, diminuindo as incertezas nas densidades

# Paquímetro

- Instrumento para medir comprimento
  - Escala auxiliar (nônio ou vernier)
- Precisão de centésimos de mm



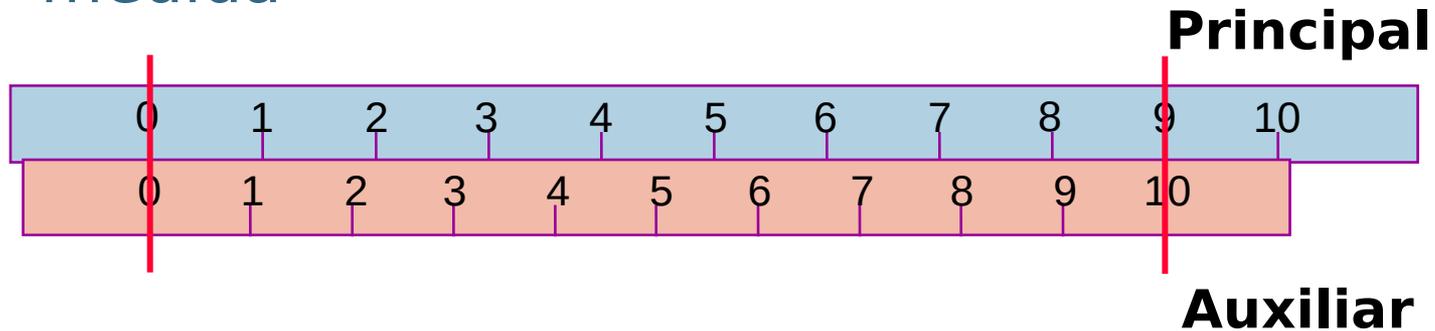
# Usando o paquímetro



# Paquímetro

- Nônio ou Vernier

- Escala auxiliar para aumentar a precisão da medida

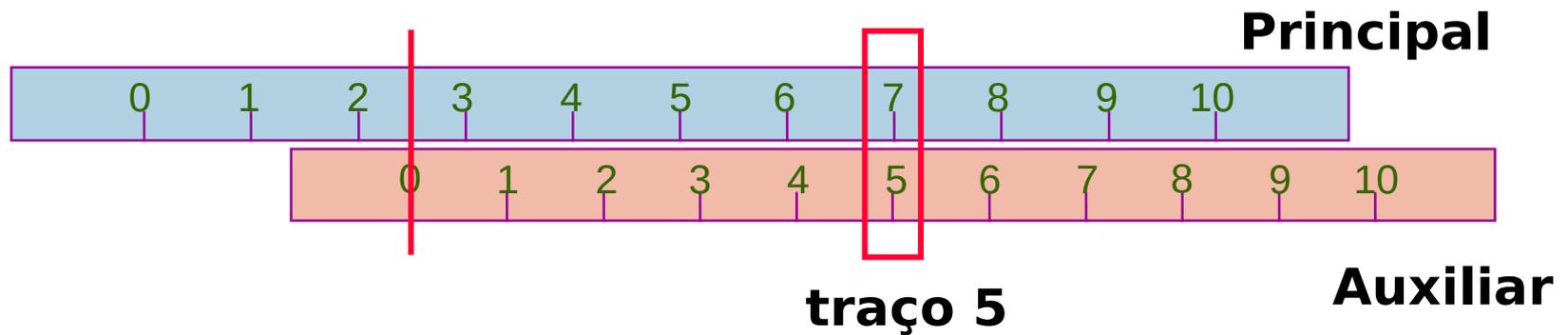


10 div escala auxiliar = 9 div escala principal  
Precisão (nônio) = valor da menor divisão do nônio

$$\frac{\text{Valor da menor divisão Principal}}{\text{Número de divisões auxiliar}} = \frac{1 \text{ div}}{10} = 0,1 \text{ div}$$

# Leitura com nônio

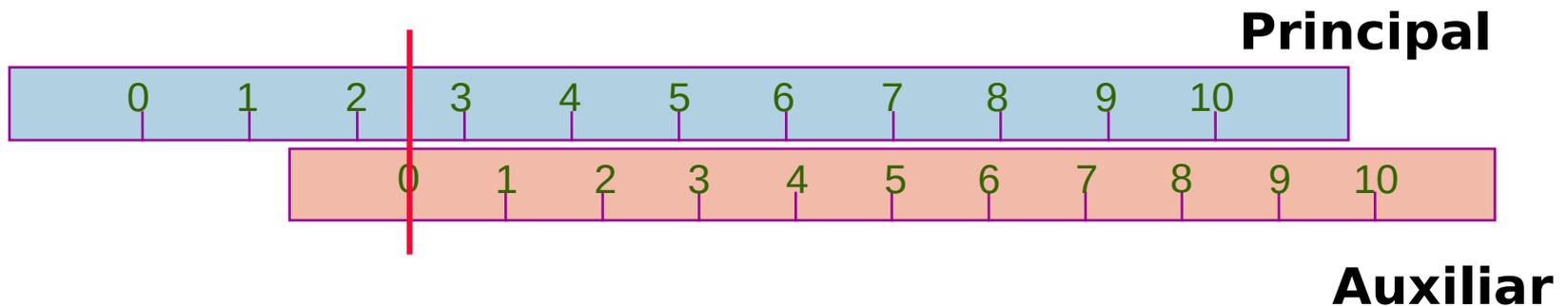
1) Posição zero do nônio



Medida = 2,

# Leitura com nônio

- 1) Posição zero do nônio
- 2) Número do traço da escala auxiliar que melhor coincidir com traço da escala principal

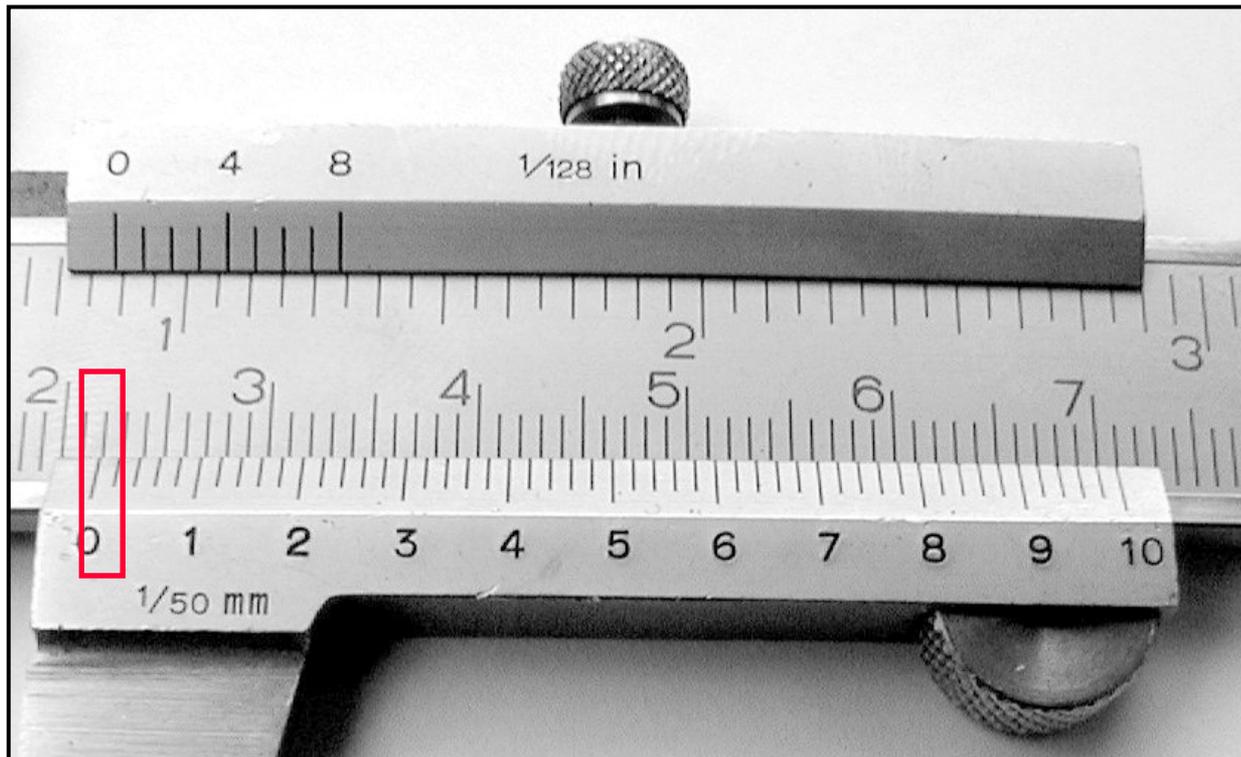


$$5 \times \text{precisão do nônio} = 5 \times 0,1 = 0,5$$

$$\text{Medida} = 2,5 \pm 0,1 \text{ div}$$

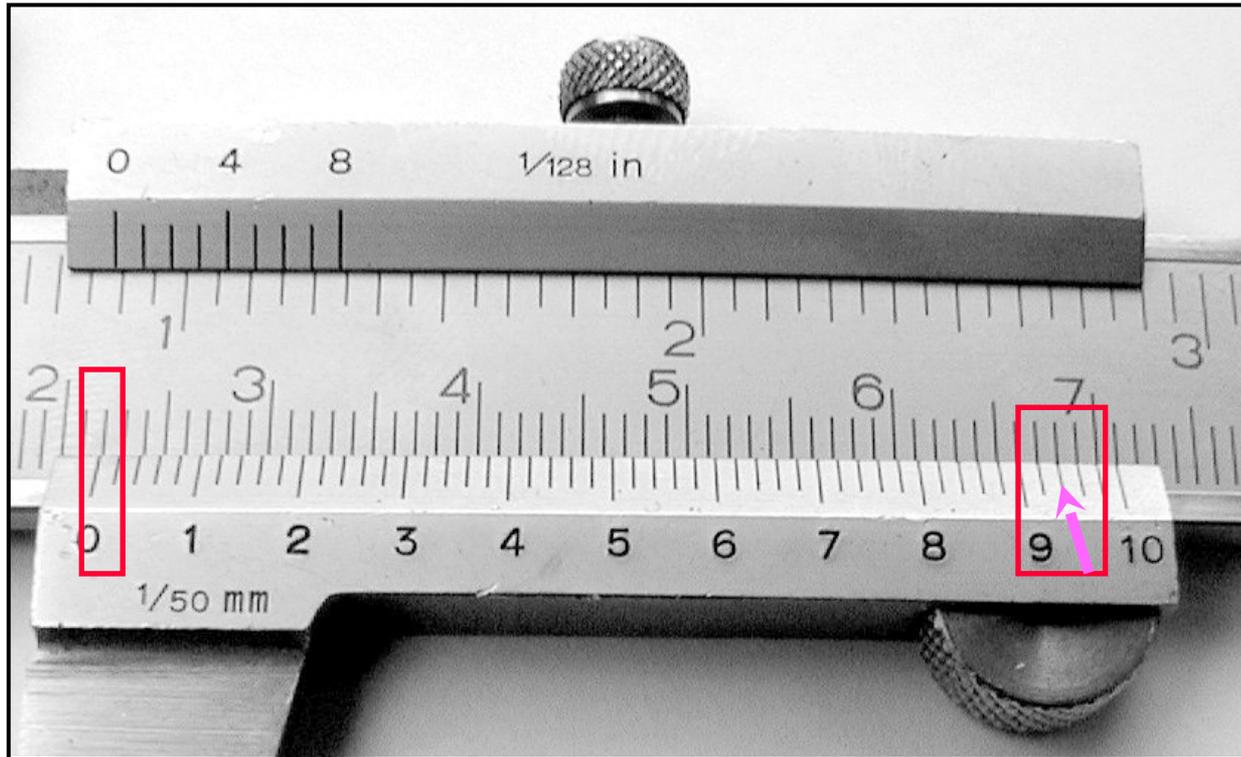


# Leitura com paquímetro



Leitura = 21,                      mm

# Leitura com paquímetro

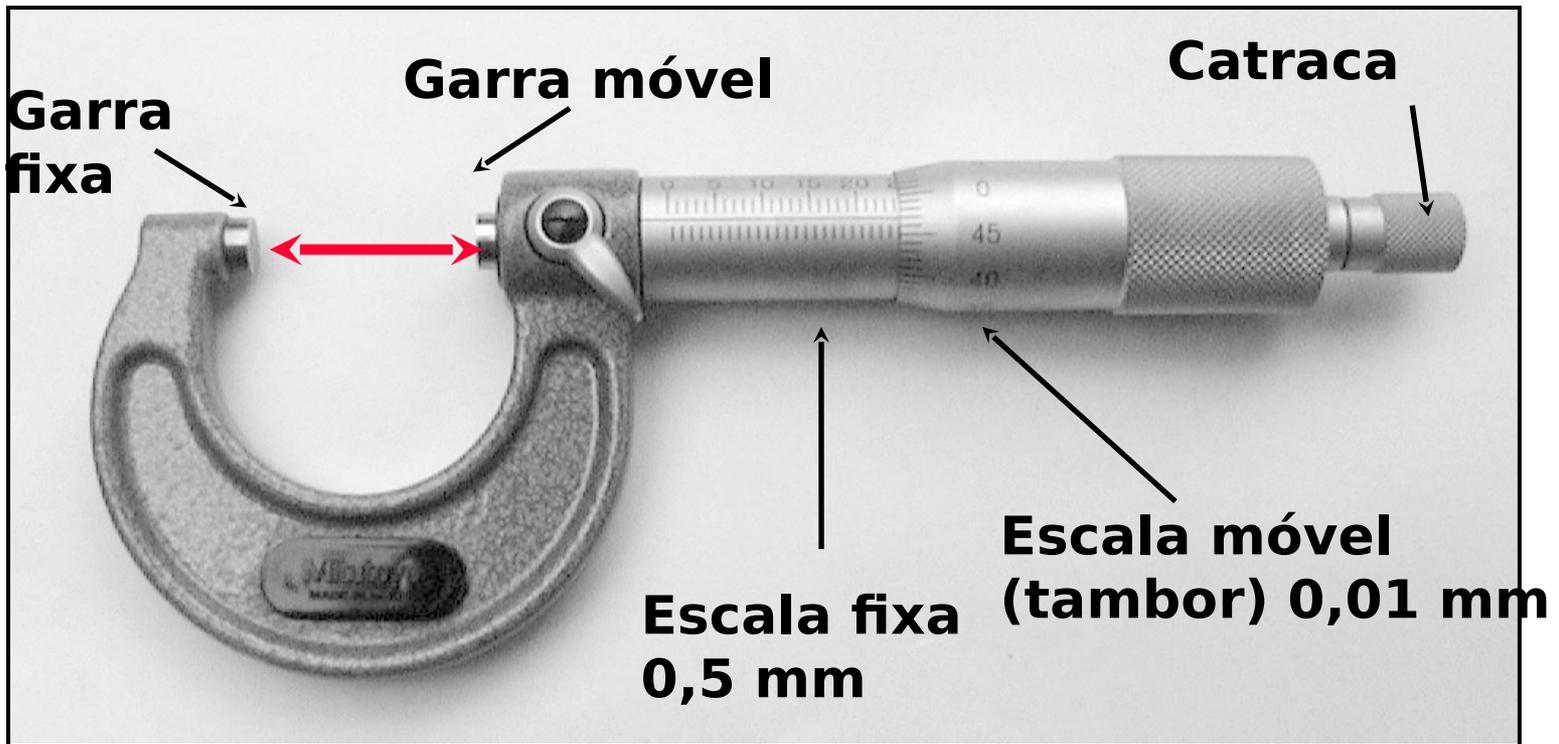


Traço 47 x Precisão 0,02 mm = 0,94 mm

Leitura = 21,94 ± 0,02 mm

# Micrômetro

- Instrumento para medir comprimento
  - Precisão de microns

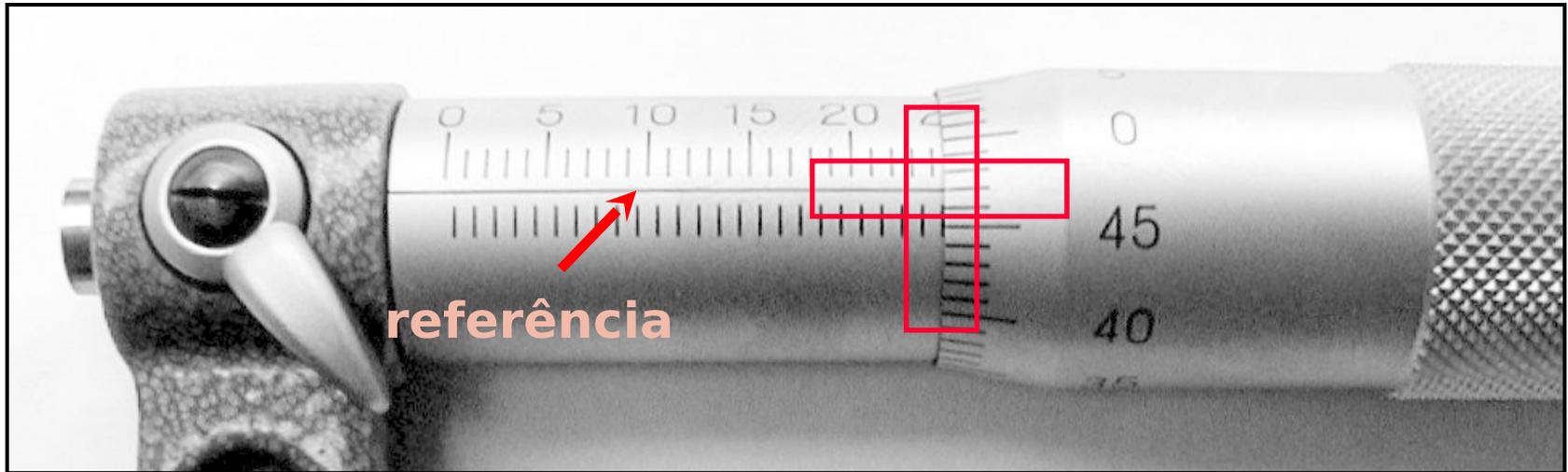


# Usando o micrometro





# Leitura com micrometro



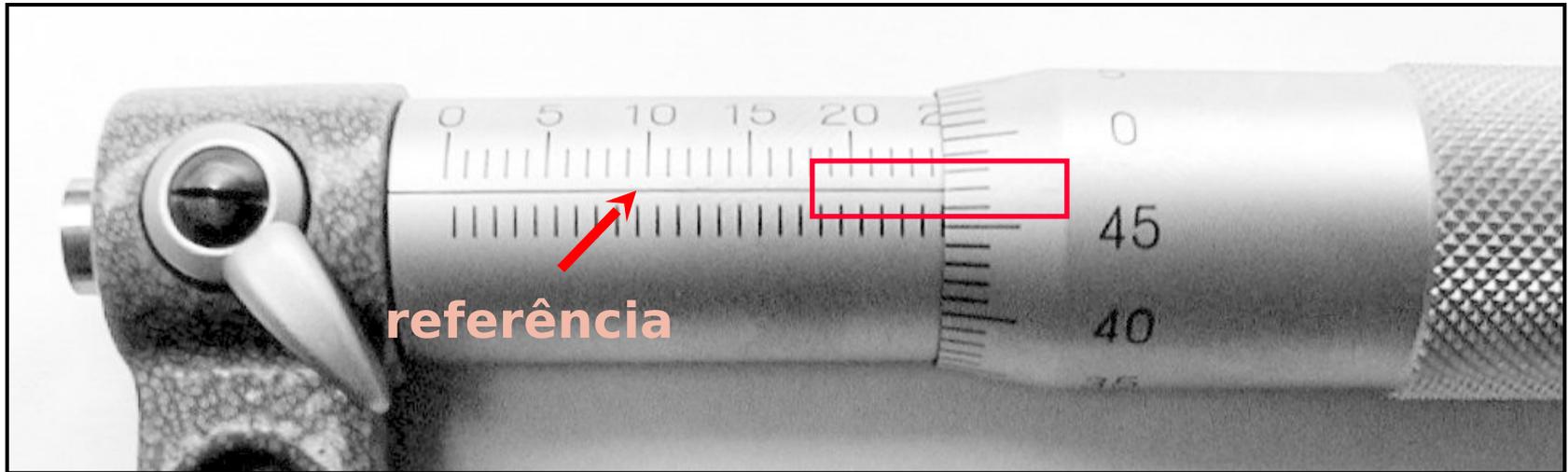
1) Posição da escala móvel (passos de 0,5 mm)      **24,0 mm**

2) Posição da escala fixa (referência)

**46,9 traços** x ( **0,5 mm / 50 traços** = **0,009 mm**)

**Leitura = 24,469 ± 0,005 mm**

# Leitura com micrometro



1) Posição da escala móvel (passos de 0,5 mm)      **24,0 mm**

2) Posição da escala fixa (referência)

**46,9 traços** x ( **0,5 mm / 50 traços** = **0,009 mm**)

**Leitura = 24,469 ± 0,005 mm**

# Treino para leitura

- Para paquímetro e micrômetro:

[www.stefanelli.eng.br](http://www.stefanelli.eng.br)

- Entre na opção metrologia/Simulador
- Escolha o equipamento e escala

# Atividade prática

# Medida da Densidade de Sólidos

- Objetivo

- Identificar os diferentes tipos de plásticos que compõem um conjunto de objetos

- Identificação

- Comparação das medidas de densidade (+incertezas) com valores tabelados de diferentes tipos de plásticos

$$d = \frac{m}{V}$$

# Procedimento Experimental

- Melhorar a medida de massa e a medida do volume dos cilindros:
  - Medir a massa usando a balança analítica (já feito se utilizarem a mesma caixa da primeira aula)
  - Medir novamente as dimensões para cálculo do volume utilizando:
    - Paquímetro
    - Micrômetro

# Análise dos dados

- Calcular para as novas medidas:
  - o volume + incerteza de cada peça
  - densidade + incerteza de cada peça
- Colocar os valores das medidas de massa, diâmetro e altura no guia e na planilha online:
  - link da planilha:  
[https://docs.google.com/spreadsheets/d/1AbqN\\_Ak3gC5nFS1qm6FQIBqnbMpdqTMO/edit?usp=sharing&ouid=100299616616536740405&rtpof=true&sd=true](https://docs.google.com/spreadsheets/d/1AbqN_Ak3gC5nFS1qm6FQIBqnbMpdqTMO/edit?usp=sharing&ouid=100299616616536740405&rtpof=true&sd=true)
- Comparar as medidas de toda a classe novamente.
  - Quantos tipos de plásticos podem ser identificados desta vez?
  - Que medida permitiu obter esse resultado?

# Para a próxima aula (27/04):

- Entrega do Guia 2.2 (um por grupo)
- No moodle (aba Experimento # 2- Densidade de sólidos):
  - Exercício individual (até dia 27/04).
- Texto: Apostila do curso (página principal do moodle):
  - Experiência III (Aula 05) Distância Focal De Uma Lente