

Introdução às Medidas em Física (4300152)

Aula 03 (31/03/2023)

Paula R. P. Allegro
paula.allegro@usp.br

Na aula de hoje:

- Resumo dos principais pontos das aulas anteriores
- Conceitos:
 - Medidas indiretas
 - Medida da densidade de sólidos
 - Noções de estatística:
 - Propagação de Incertezas
 - Compatibilidade entre medidas
- Experiência 2.1: Densidade de Sólidos
 - Realizar medidas de diferentes objetos
 - Identificar os tipos de plásticos através da comparação das medidas (+incertezas) com valores tabelados

Referências para a aula de hoje:

- Apostila do curso (página principal do moodle):
 - Capítulo 3: Instrumentos de Medidas
 - Experiência II (Aulas 03 e 04): Densidade de Sólidos.
- Texto: Conceitos Básicos da Teoria de Erros (aba Material Didático / arquivos 2023)
 - Capítulo 2: Propagação de Erros e Incertezas

Da 1ª aula (17/03):

- Medidas:
 - Definição: quantificar uma grandeza com relação a algum padrão tomado como unidade.
 - Medidas repetidas por:
 - Diferentes experimentadores
 - Diferentes instrumentos

→ resultados diferentes
- Supondo que existe um valor verdadeiro associado à grandeza que está sendo medida, nunca iremos obter o valor verdadeiro em nossas medições devido:
 - características da própria grandeza sendo medida
 - limitações intrínsecas e inevitáveis dos nossos instrumentos e técnicas de medida
- A possibilidade de haver erros é que dá origem à **incerteza** de uma medida.

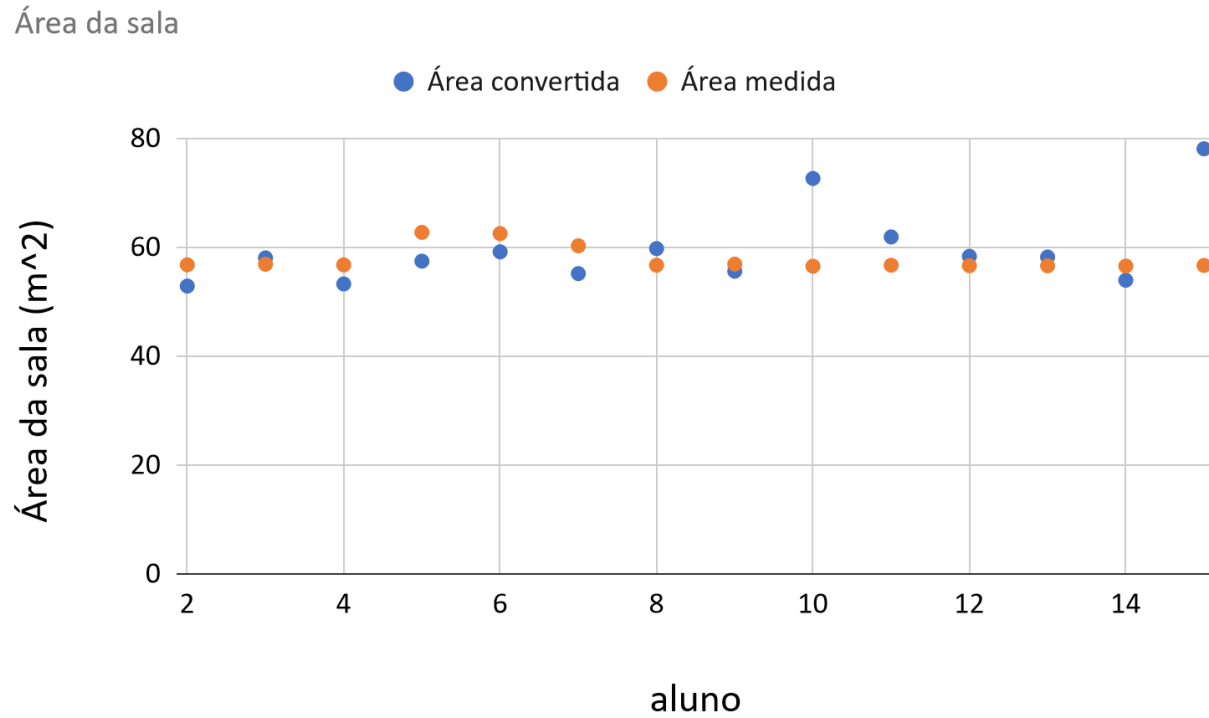
Da 1ª aula (17/03):

- Representação dos resultados de cada medida:
valor medido \pm incerteza (estimativa do erro)
- Representação de conjuntos de medidas: Tabelas
 - Identificação
 - Legenda
 - Cabeçalho
 - Unidades
 - Medidas
 - Incertezas

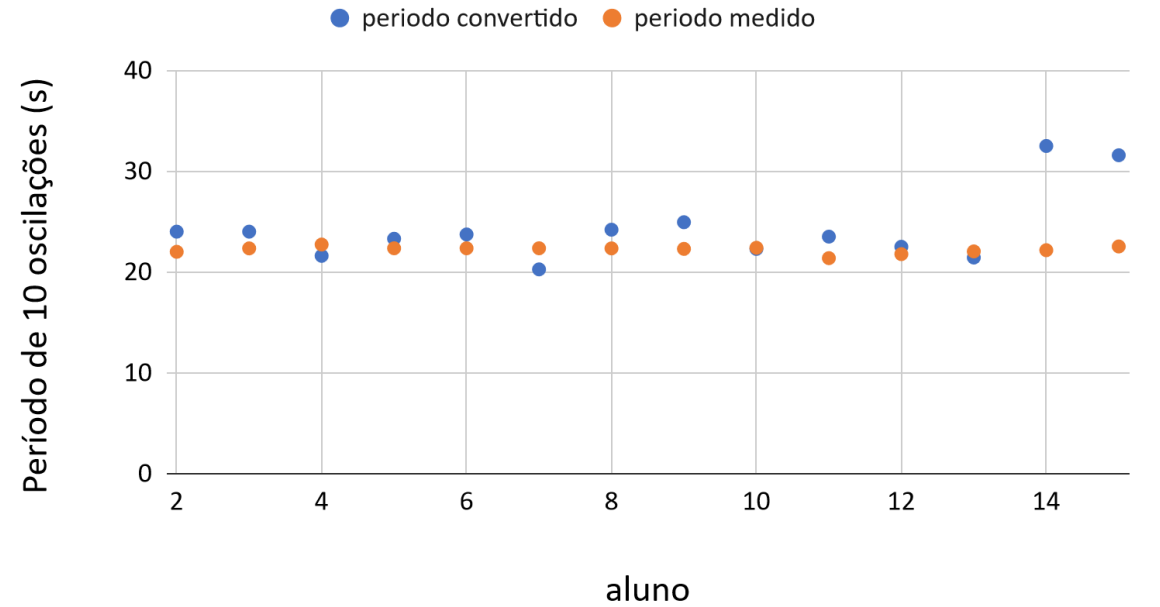
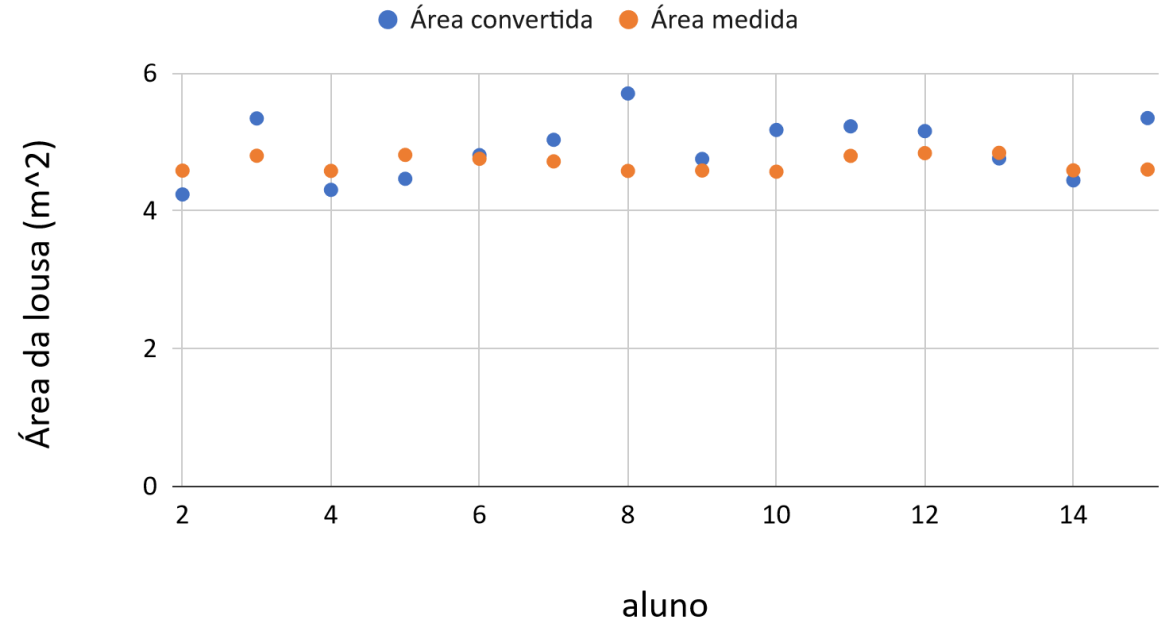
Tabela 1.1: Alguns valores experimentais para a constante de gravitação ao longo dos anos.

ano	$G \pm \sigma$ ($10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$)
1798	$6,75 \pm 0,05$
1930	$6,670 \pm 0,005$
1988	$6,67259 \pm 0,00085$

Da 1ª aula (17/03):



Área da lousa



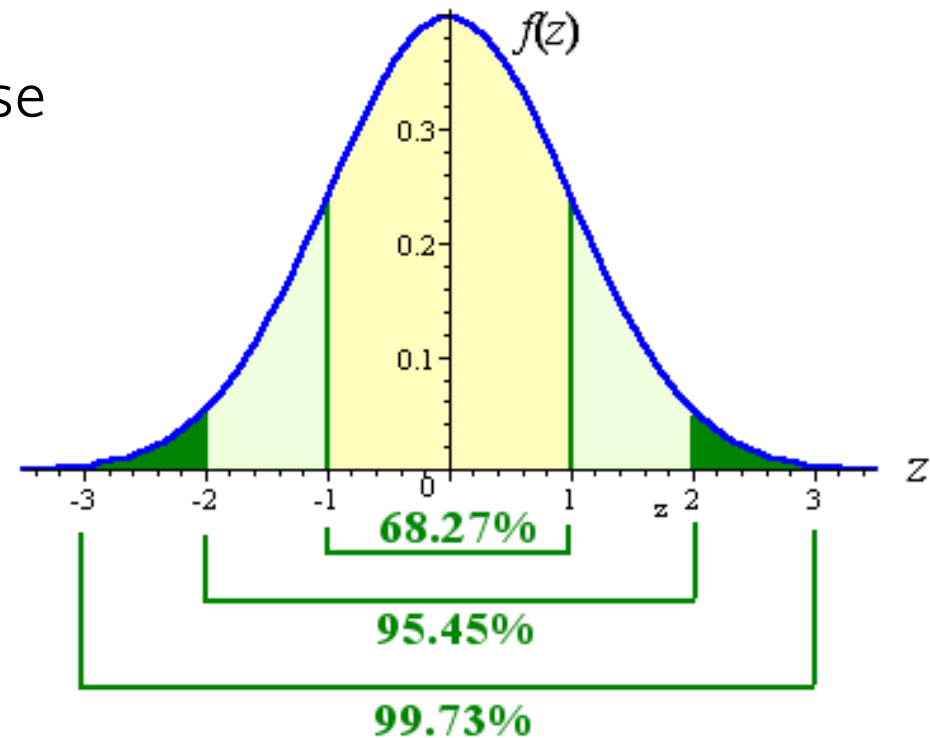
Da 2ª aula (24/03): conceitos sobre medidas

- Resultados experimentais estão sempre sujeitos a **erros**:
 - Erros podem ou não ser conhecidos e podem ter diversas origens:
 - Erros conhecidos : incerteza instrumental
- São classificados de acordo com o **efeito** das fontes de erro em uma medida:
 - **Erros sistemáticos**: **afetam igualmente** todos os dados medidos, **independe** de quantos dados tenham sido tomados.
 - Exemplo: incerteza instrumental
 - **Erros aleatórios**: **afetam de maneira diferente** cada um dos dados medidos, causando variações dos valores obtidos em medições repetidas
 - podem ser reduzido aumentando-se o número de dados
 - são obtidos por métodos estatísticos, por isso são também conhecidos como **erros estatísticos**

Da 2ª aula (24/03): Erros aleatórios

- Há uma distribuição de valores medidos, concentrados em um intervalo de valores
- Há várias distribuições possíveis de valores medidos
- Grandezas físicas sujeitas a erros aleatórios costumam se distribuir de forma simétrica próxima a uma gaussiana (distribuição normal ou de Gauss)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Da 2ª aula (24/03): Representação do resultado de um conjunto de medidas

- Quantitativamente:

- Resultado da medida → Média:
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

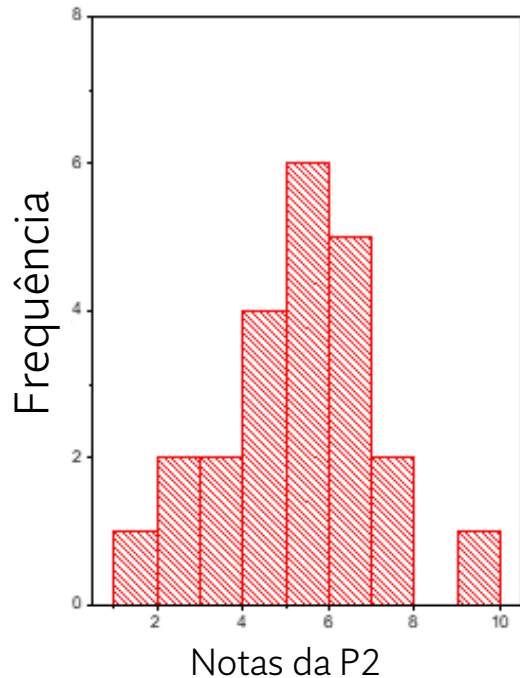
- Flutuação dos dados → Desvio Padrão (σ)
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

- Estimativa do erro estatístico da média: desvio padrão da média (σ_m)
$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

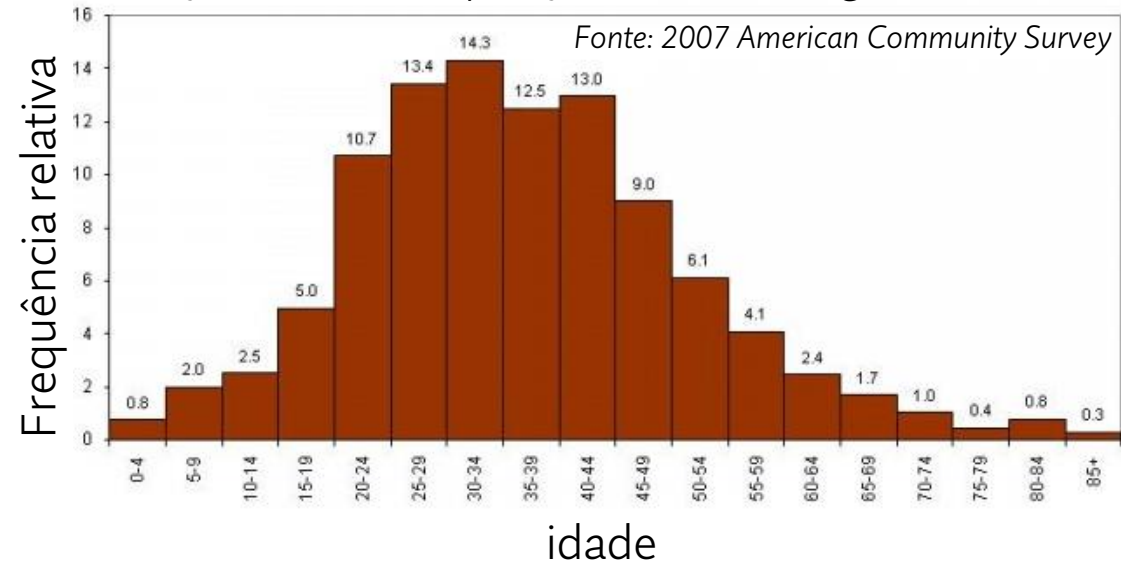
onde N medidas x_i foram realizadas nas mesmas condições e possuem as mesmas incertezas (instrumental + aleatórias)

Da 2ª aula (24/03): Histogramas

- Tipo de gráfico onde é possível visualizar como as medidas se distribuem:



Distribuição Etária da População Brasileira Imigrante (%) - 2007



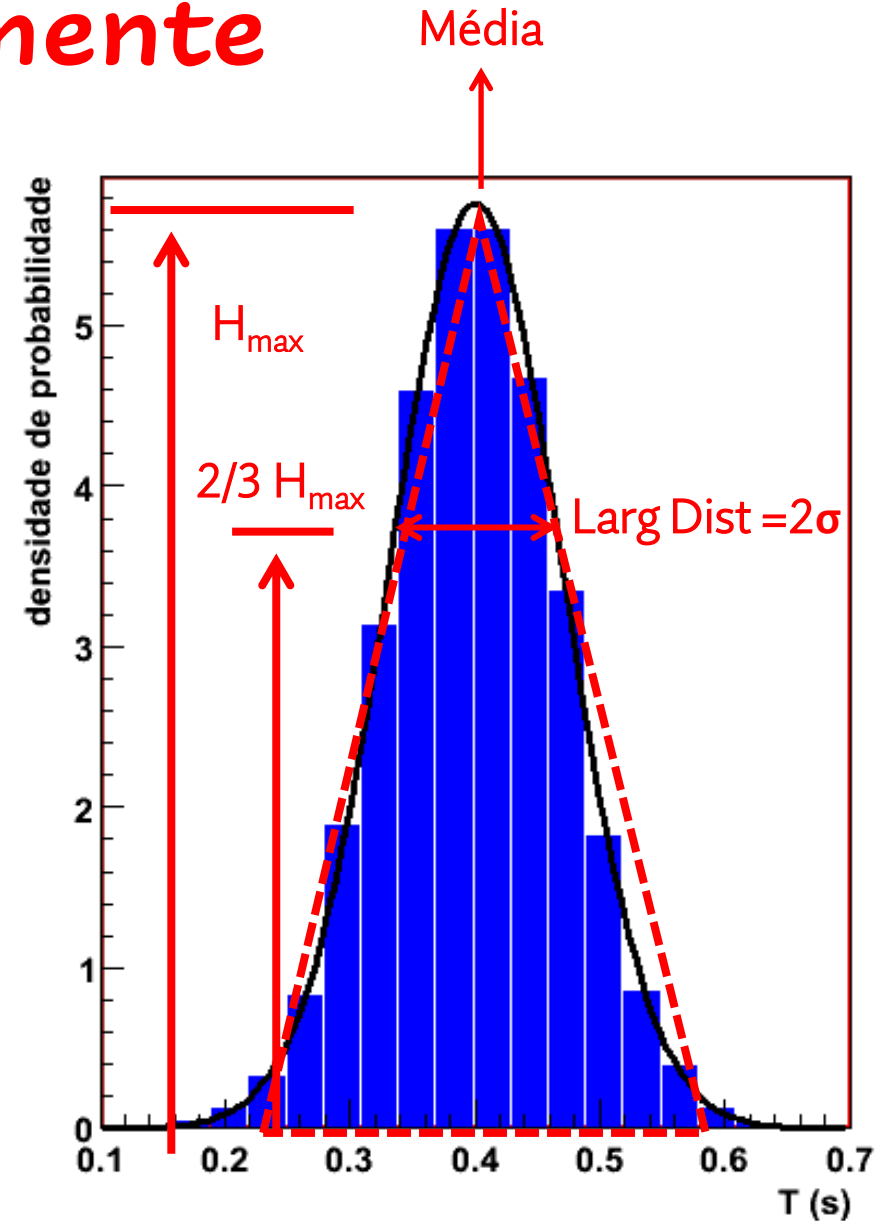
Eixo x (abscissa): mostra intervalos de medidas, também chamados de “canais” ou “bins”

Eixo y (ordenadas): mostra o número de ocorrências (frequência) ou a frequência relativa (número de ocorrências pelo número total de dados N).

Da 2ª aula (24/03): Graficamente

- Média:
 - Valor mais provável
- Desvio padrão (σ):
 - $\frac{1}{2}$ Largura da distribuição medida a $\frac{2}{3}$ da altura máxima
- Total aproximado de eventos N:
 - Área do triângulo ajustado na distribuição
- Incerteza da média:
 - Incerteza estatística

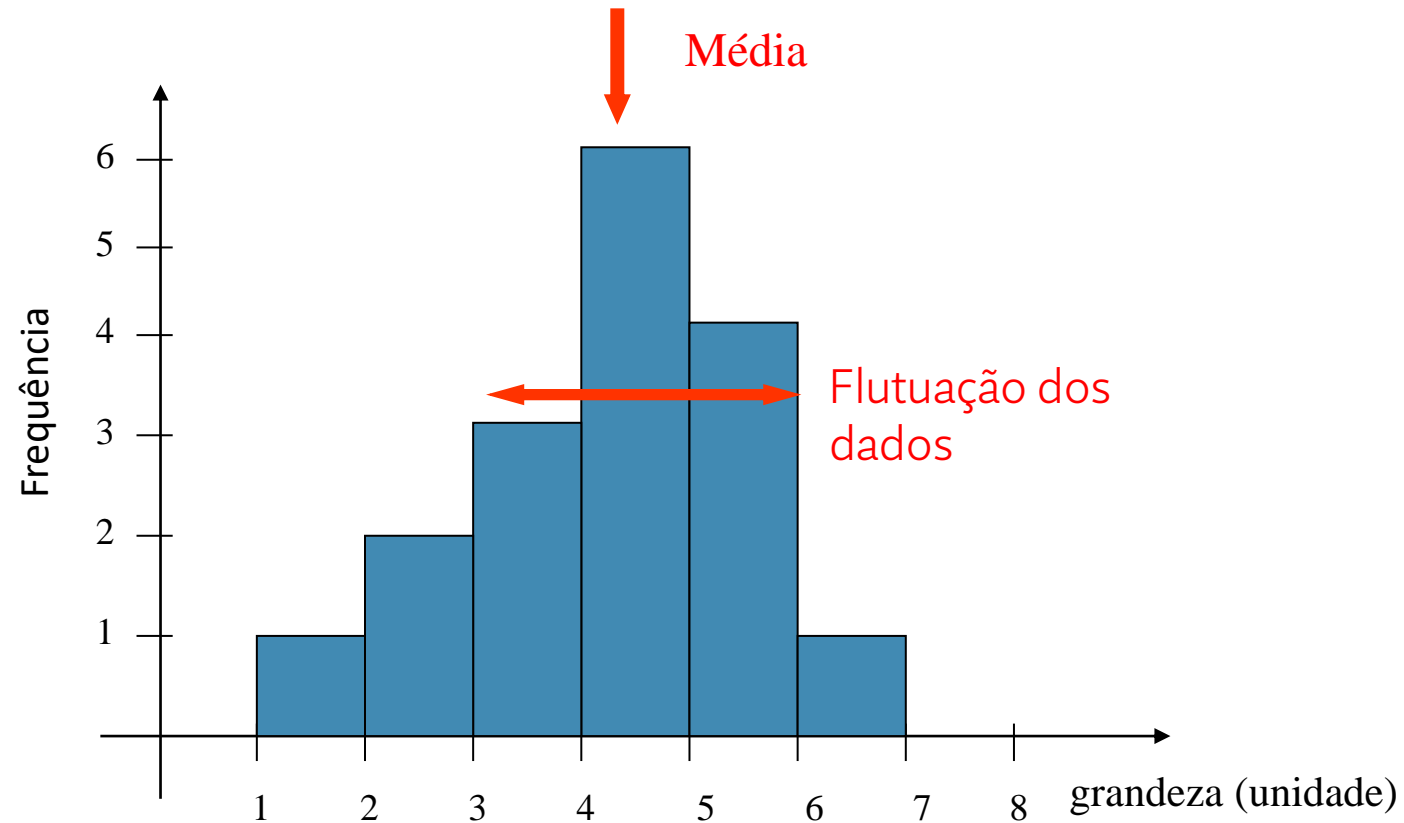
$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$



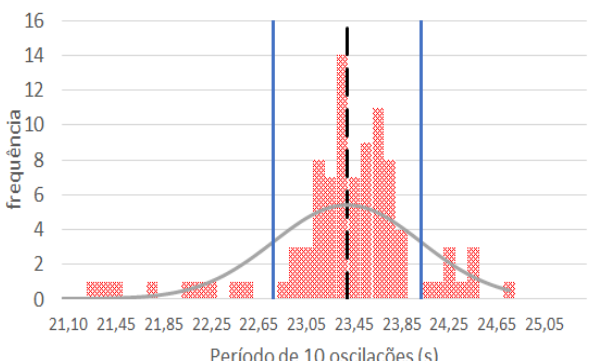
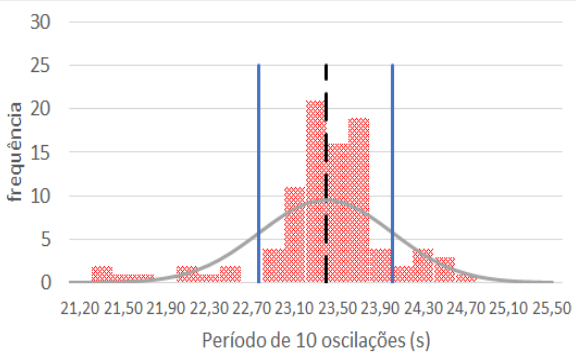
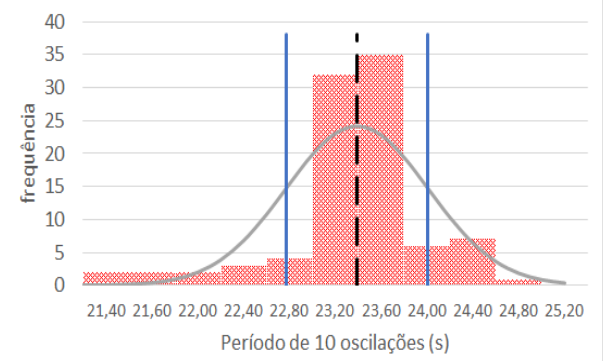
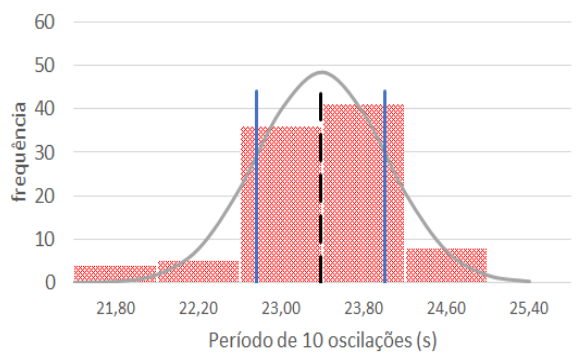
$$N_{\text{dist}} = (H_{\text{max}} * N_{\text{colunas}}) / 2$$

Da 2ª aula (24/03): Representação de dados

$$x_{final} = \bar{x} \pm \sigma_m \text{ unid}$$



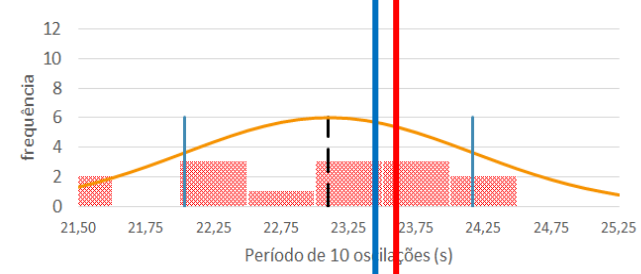
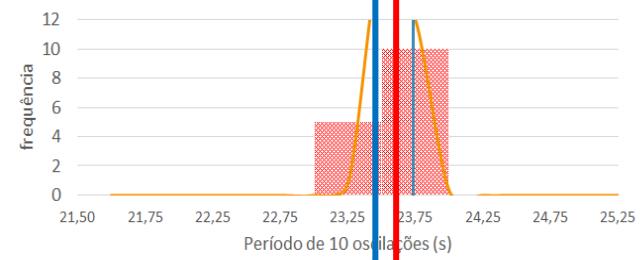
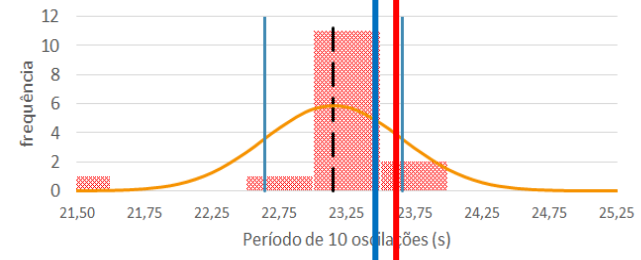
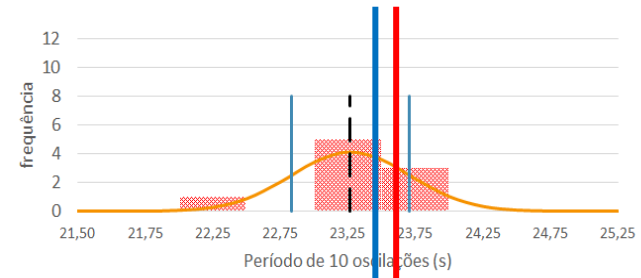
Da 2ª aula (24/03): Dados turma 04/2022



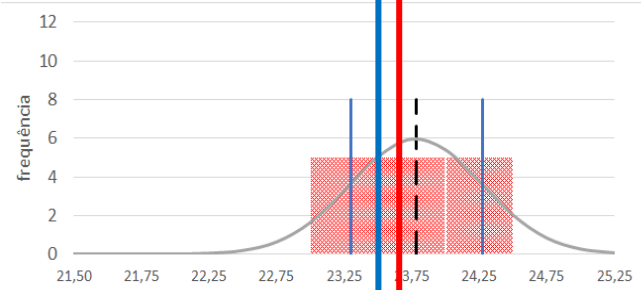
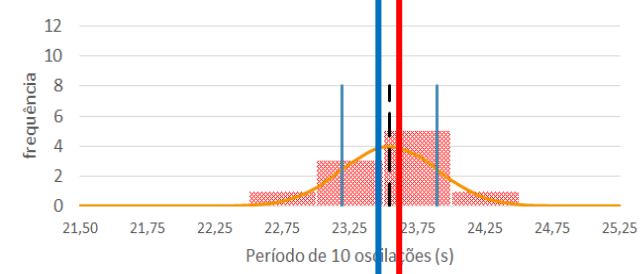
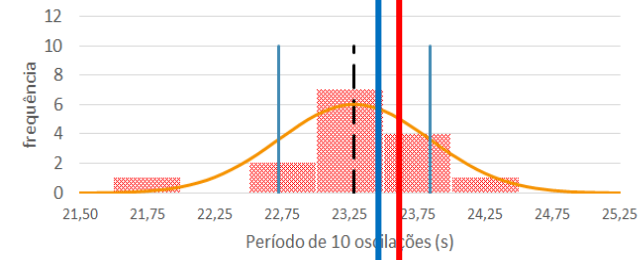
Média 23,39 s
Desvio Padrão 0,6 s
Inc média 0,06 s

Valor esperado do período para 10 oscilações:

Para $L = 1,380 \pm 0,005$ m $\rightarrow T_{10} = 23,60$ s

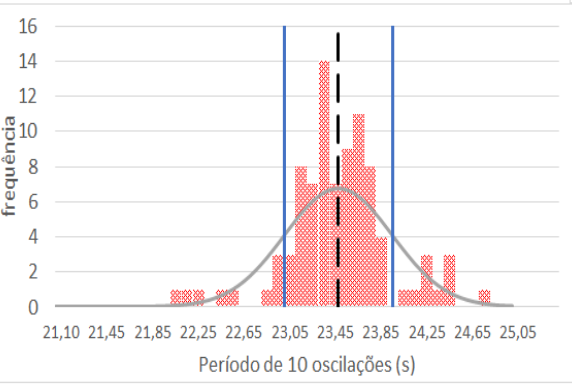
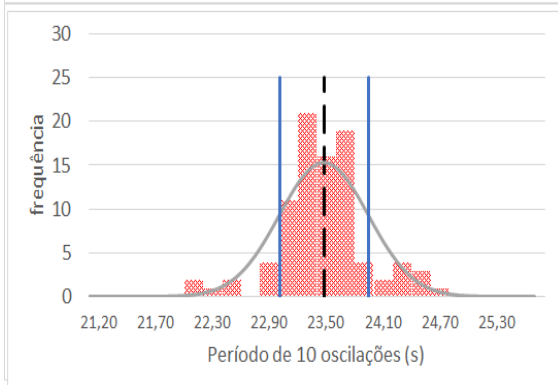
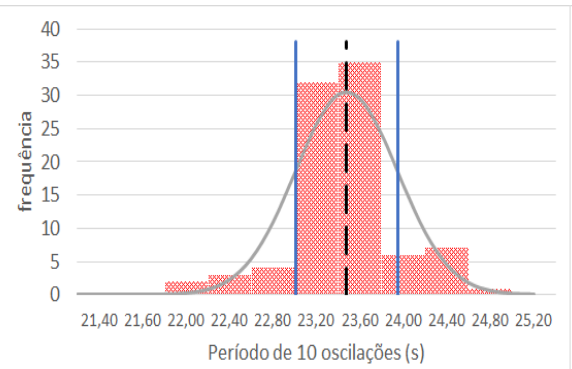
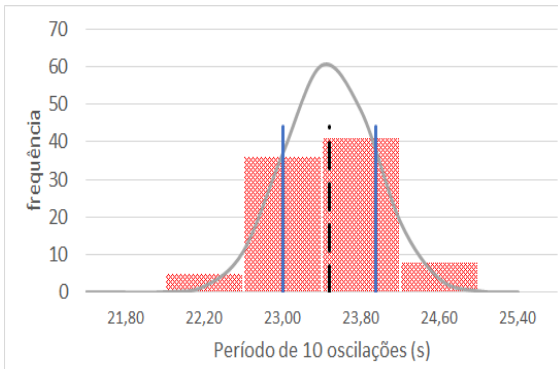


$\bar{T} = 23,39$ s $T_{10} = 23,60$ s

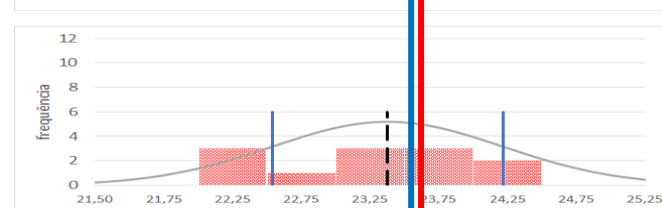
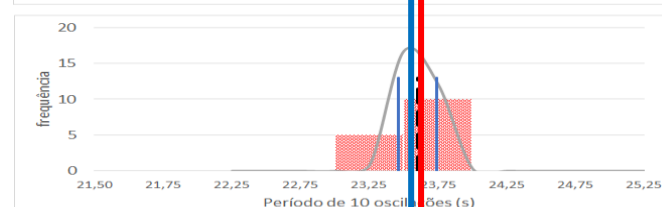
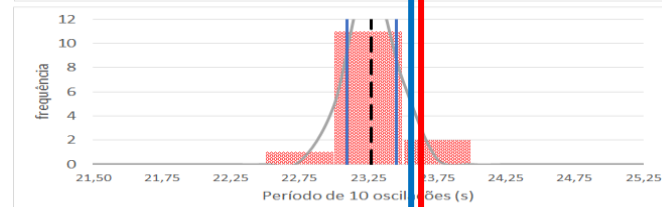
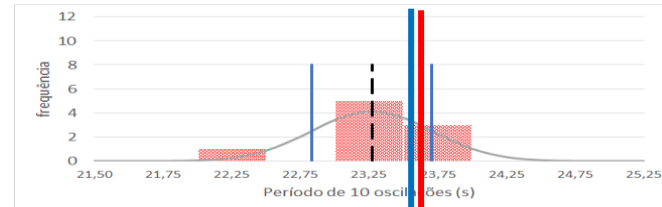


$\bar{T} = 23,39$ s $T_{10} = 23,60$ s

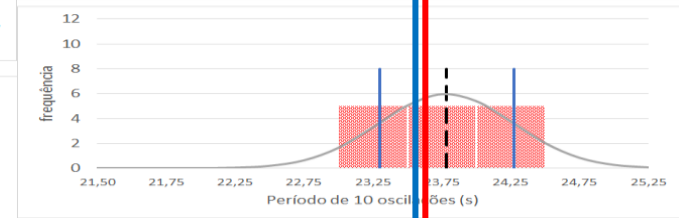
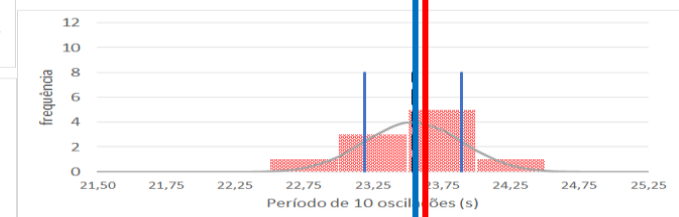
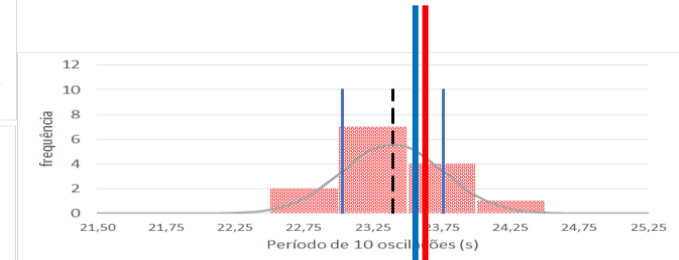
Da 2ª aula (24/03): Dados turma 04/2022 sem pontos errados ($T < 22$ s)



Média 23,48 s
 Desvio Padrão 0,5 s
 Inc média 0,05 s



$\bar{T} = 23,48$ s $T_{10} = 23,60$ s



$\bar{T} = 23,48$ s $T_{10} = 23,60$ s

Valor esperado do período para 10 oscilações:
 Para $L = 1,380 \pm 0,005$ m $\rightarrow T_{10} = 23,60$ s

Aula de hoje: avaliação das incertezas

- Tipos de incerteza que influenciam uma medida:
 - Instrumental
 - Aquela associada à precisão do instrumento utilizado para realizar a medida direta de uma grandeza
 - Estatística
 - Incerteza associada à flutuação no resultado de uma mesma medida
 - Sistemática
 - Aquela onde a medida é desviada em uma única direção, tornando os resultados viciados

Incertezas instrumentais

- Precisão do instrumento de medida:
 - Instrumentos analógicos (ex. régua): é a metade da menor divisão
 - Cuidado com instrumentos que possuem escalas auxiliares tipo nônio (ex: paquímetro): **a incerteza é a menor divisão do nônio**
 - Instrumentos digitais (ex: multímetro): 1 unidade na escala do último dígito disponível
- Dificuldade de leitura
 - Posicionamento objeto/instrumento ou estabilidade de leitura (digital)
 - **A incerteza instrumental pode ser definida maior do que a precisão do instrumento de medida.**

Incertezas estatísticas

- Flutuação no resultado das medidas

- Representação do resultado de N medidas x_i : média (\bar{x})

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

- Incerteza estatística do resultado das medidas: desvio padrão da média (σ_m)

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

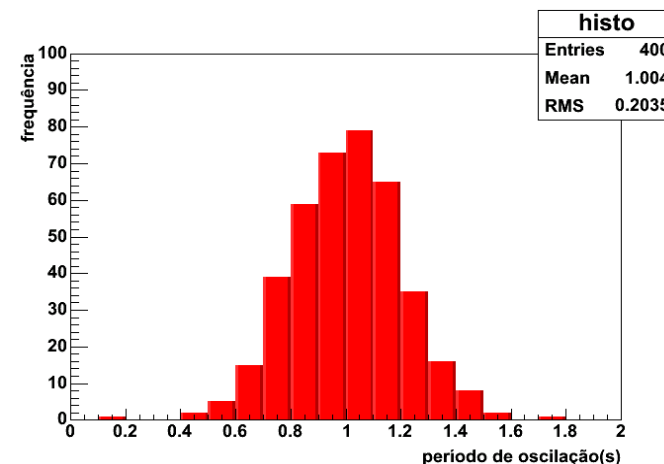
Sendo σ o desvio padrão:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}$$

Equações válidas para medidas realizadas nas mesmas condições e que possuem as mesmas incertezas (instrumental + aleatórias)

- Distribuição de dados:

- simétrica em torno de um certo valor:
 - Valor médio = valor mais provável
- decresce ao se afastar desse valor.



Incertezas sistemáticas

- A medida é desviada em uma única direção:
 - Ex: uma régua onde o primeiro mm está faltando e o experimentador não percebe
 - Todas as medidas serão 1 mm maiores do que deveriam
 - Ex: uma balança descalibrada e/ou com o zero deslocado
- Esse tipo de incerteza, em geral, só é percebida quando um resultado difere do esperado
 - Devem ser corrigidas ou refeitas

Qual é a incerteza total de uma medida?

- Incertezas resultantes do ato de medir:
 - Instrumental: σ_{inst}
 - Estatística: σ_{estat}
- Incerteza total da medida (σ): combinação de todas as incertezas

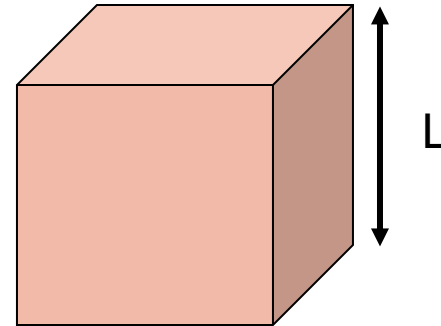
$$\sigma = \sqrt{\sigma_{inst}^2 + \sigma_{estat}^2}$$

- Caso um tipo de incerteza seja dominante, pode-se desprezar a outra:
 - Período do pêndulo medido com o relógio de pulso:
Incerteza instrumental > estatística
 - Período do pêndulo medido com o cronômetro de 0,01s
Incerteza estatística > instrumental

Uma medida obtida de outra medida tem incerteza?

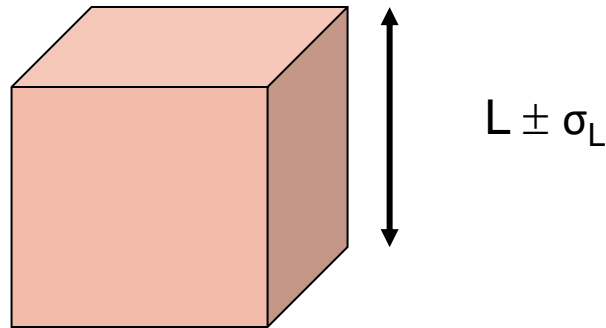
- Por exemplo, vamos determinar o volume de um cubo:

$$V = L^3$$



Uma medida obtida de outra medida tem incerteza?

- Inicialmente medimos o tamanho de sua aresta L com uma régua (que tem incerteza).

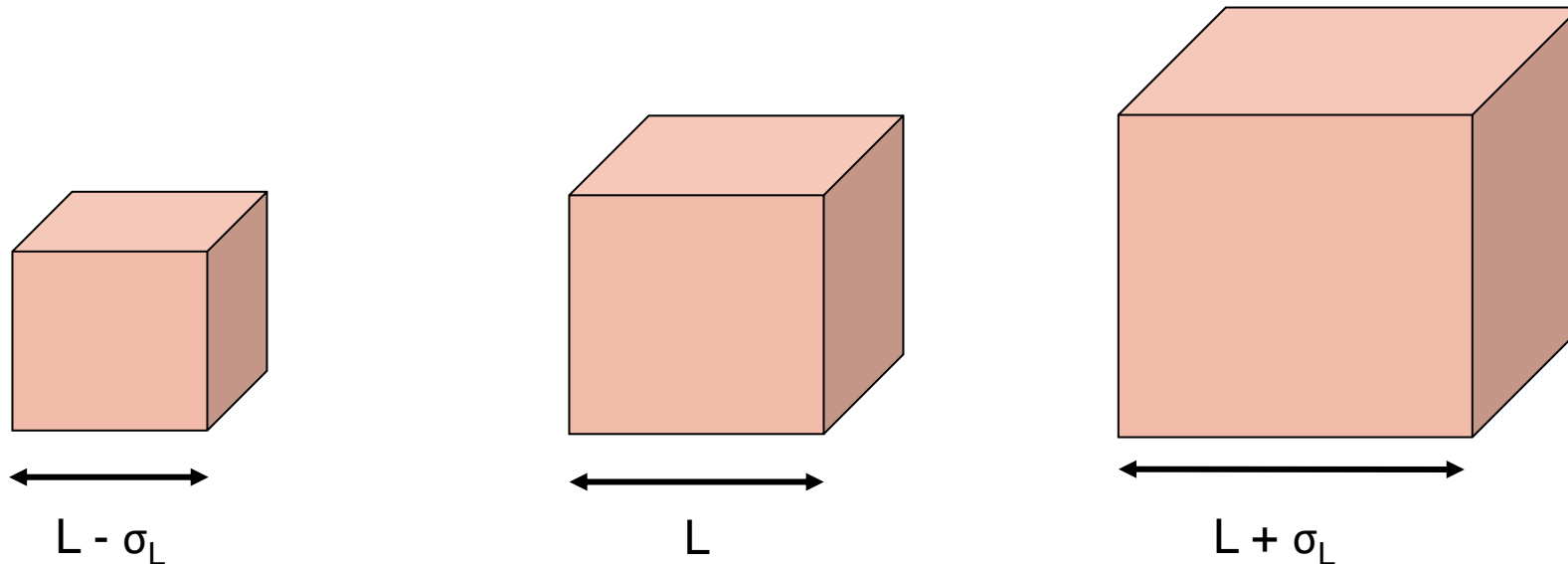


- Depois calculamos seu volume: $V = L^3$

O volume do cubo tem uma incerteza?

Uma medida obtida de outra medida tem incerteza?

- A incerteza de uma medida **se propaga** para as grandezas obtidas a partir do valor dessa medida.
- No caso do cubo:
 - A incerteza na medida da aresta (L) se propaga para a medida do volume V



Como calcular essa incerteza?

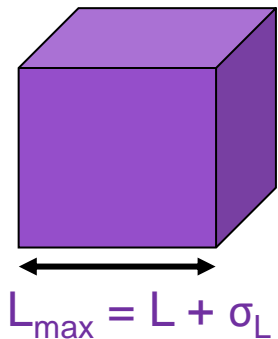
- No exemplo do cubo, temos:

$V = L^3$ onde: $L \pm \sigma_L$ é a aresta do cubo medida com a régua e sua incerteza.

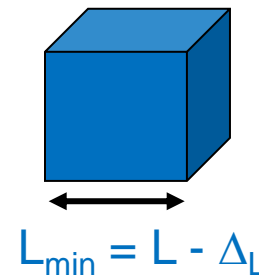
- A incerteza no volume do cubo (σ_V) pode ser inicialmente obtida considerando os volumes máximo (V_{max}) e mínimo (V_{min}) possíveis:

$$\sigma_V = \frac{V_{max} - V_{min}}{2}$$

Sendo:



$$V_{max} = (L_{max})^3$$
$$V_{max} = (L + \sigma_L)^3$$



$$V_{min} = (L_{min})^3$$
$$V_{min} = (L - \sigma_L)^3$$

Propagação de incerteza

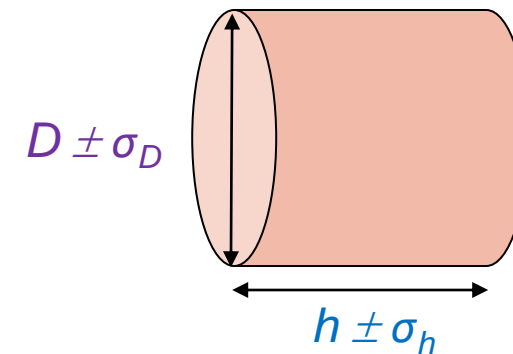
- E se uma grandeza depende de outras duas medidas, como por exemplo, na medida do volume de um cilindro? O que fazer?
- O volume (V) de um cilindro é dado por:

$$V = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 h$$

Onde:

D é o diâmetro do cilindro \pm incerteza (σ_D)

h é a altura do cilindro \pm incerteza (σ_h)



Propagação de incerteza

- A incerteza final (σ_V) no volume V do cilindro depende:
 - da incerteza no volume ($\sigma_{V\sigma_D}$) devido à incerteza (σ_D) no diâmetro do cilindro
 - da incerteza no volume ($\sigma_{V\sigma_h}$) devido à incerteza (σ_h) na altura do cilindro
- Assim:

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\sigma_{V\sigma_D}\right)^2 + \left(\sigma_{V\sigma_h}\right)^2}$$

Assumindo que a incerteza devido ao diâmetro ($\sigma_{V\sigma_D}$) é independente da incerteza devido à altura ($\sigma_{V\sigma_h}$)

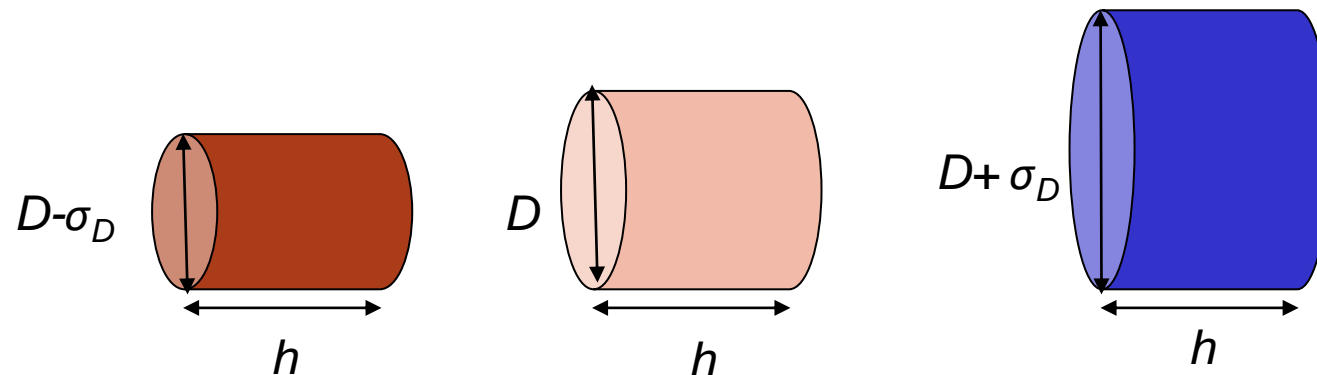
Propagação de incerteza

- Calculando a incerteza no volume ($\sigma_{V_{\sigma_D}}$) devido à incerteza (σ_D) no diâmetro do cilindro:

$$\sigma_{V_{\sigma_D}} = \frac{V_{\text{máximo (devido a } \sigma_D)} - V_{\text{mínimo (devido a } \sigma_D)}}{2}$$

Com:

$$V_{\text{mínimo (devido a } \sigma_D)} = \pi \left(\frac{(D - \sigma_D)}{2} \right)^2 h \quad V_{\text{máximo (devido a } \sigma_D)} = \pi \left(\frac{(D + \sigma_D)}{2} \right)^2 h$$



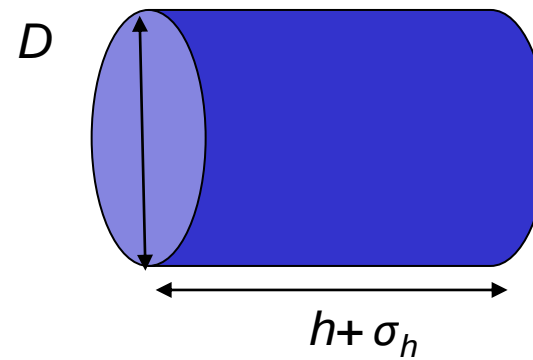
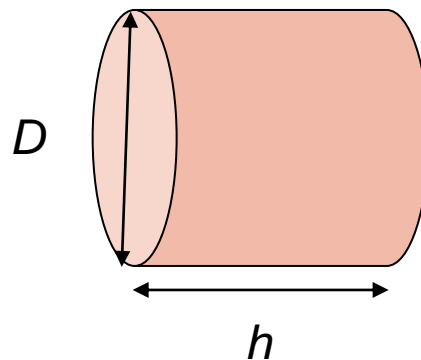
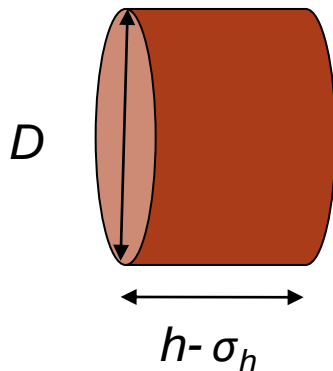
Propagação de incerteza

- Calculando a incerteza no volume ($\sigma_{V_{\sigma_h}}$) devido à incerteza (σ_h) na altura do cilindro:

$$\sigma_{V_{\sigma_h}} = \frac{V_{\text{máximo (devido a } \sigma_h)} - V_{\text{mínimo (devido a } \sigma_h)}}{2}$$

Com:

$$V_{\text{mínimo (devido a } \Delta h)} = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 (h - \sigma_h) \quad V_{\text{máximo (devido a } \Delta h)} = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 (h + \sigma_h)$$



Incerteza relativa

- Incerteza absoluta (σ_{abs}): Valor apresentado no resultado

$$\text{Volume} = 27,4 \pm 0,5 \text{ cm}^3$$

- Incerteza relativa (σ_{rel}): Porcentagem da incerteza sobre o valor principal

$$\sigma_{rel} = \frac{\sigma_{abs}}{\text{valor principal}} = \frac{0,5}{27,4} = 0,018 \text{ ou } 1,8\%$$

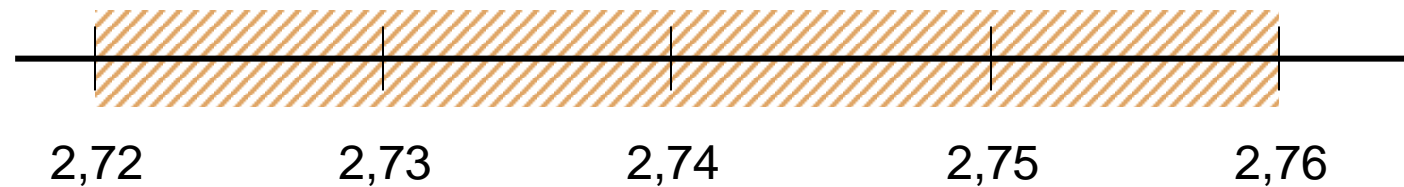
- Assim, se o valor da incerteza representa 5% do valor medido:

$$\sigma_{abs} = \text{valor principal} \times 0,05$$

$$\sigma_{abs} = 27,4 \times 0,05 = 1,4$$

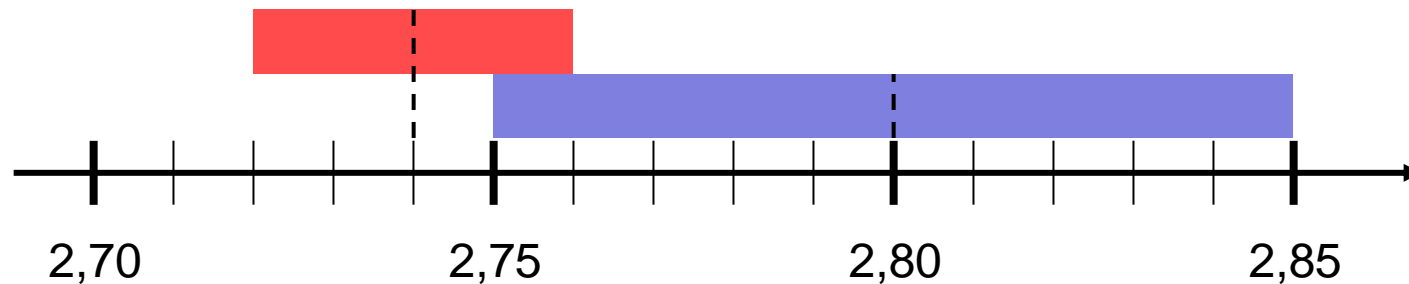
Como interpretar o significado da incerteza?

- O que significa dizer que minha medida, é $2,74 \pm 0,02$ mm?
 - Eu tenho confiança que o valor verdadeiro da grandeza medida está entre $(2,74 - 0,02)$ e $(2,74 + 0,02)$



Como comparar os resultados de duas medidas?

- É preciso sempre se levar em consideração a incerteza da medida.
 - Por isso perguntamos se as medidas são **compatíveis** ao invés de “iguais”
 - Exemplo: $2,74 \pm 0,02$ mm é compatível com $2,80 \pm 0,05$ mm ?



Exercícios em aula

- Um aluno calculou o valor do volume do cilindro obtendo o seguinte valor:

$$V = 6,3302 \text{ cm}^3$$

- Sabendo que a incerteza relativa é de 5%, qual é o valor da incerteza do volume ?

Exercícios em aula

- Um aluno calculou o valor do volume do cilindro obtendo o seguinte valor:

$$V = 6,3302 \text{ cm}^3$$

- Sabendo que a incerteza relativa é de 5%, qual é o valor da incerteza do volume ?

$$\sigma_V = 6,3302 \times 0,05 = 0,3 \text{ cm}^3$$

Exercícios em aula

- Verifique a compatibilidade dos conjuntos de valores apresentados abaixo testando a superposição dos intervalos representados pelas medidas.

	Aluno 1	Aluno 2	Compatível?
Medida	$1,20 \pm 0.01$	$1,23 \pm 0.01$	

	Aluno 1	Aluno 2	Compatível?
Medida	1.20 ± 0.09	1.24 ± 0.04	

Exercícios em aula

- Verifique a compatibilidade dos conjuntos de valores apresentados abaixo testando a superposição dos intervalos representados pelas medidas.

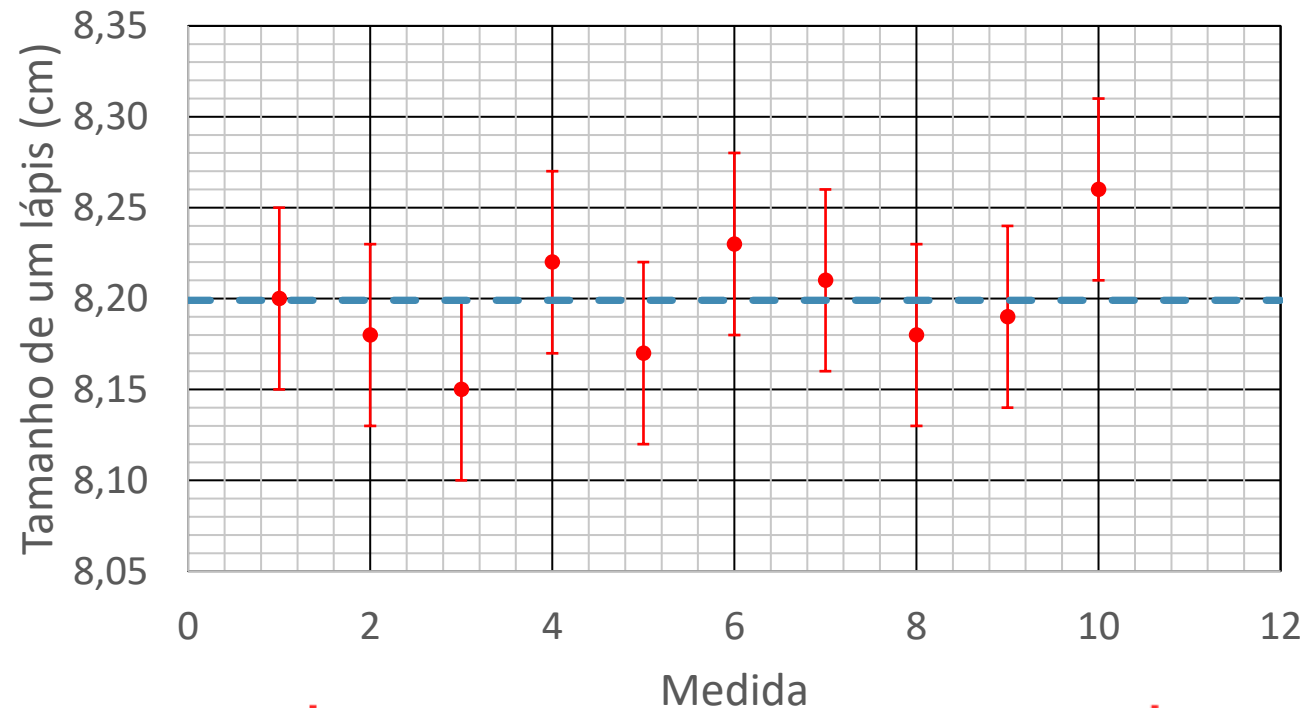
	Aluno 1	Aluno 2	Compatível?
Medida	$1,20 \pm 0.01$	$1,23 \pm 0.01$	Não

	Aluno 1	Aluno 2	Compatível?
Medida	1.20 ± 0.09	1.24 ± 0.04	Sim

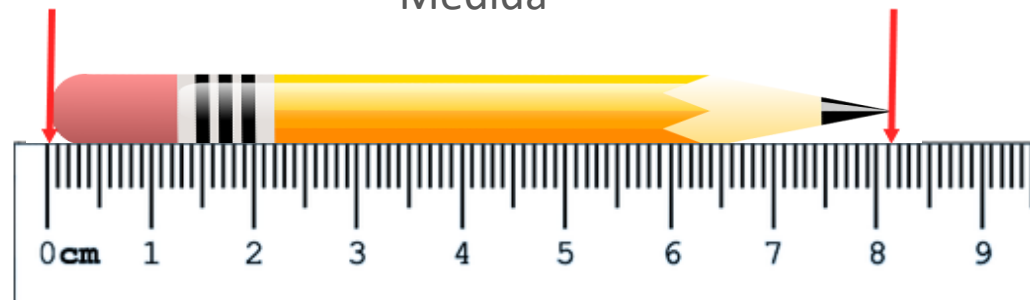
Representando valores: gráfico

- Vamos considerar as seguintes medidas:

Medida	Tamanho de um lápis (cm)
1	$8,20 \pm 0,05$
2	$8,18 \pm 0,05$
3	$8,15 \pm 0,05$
4	$8,22 \pm 0,05$
5	$8,17 \pm 0,05$
6	$8,23 \pm 0,05$
7	$8,21 \pm 0,05$
8	$8,18 \pm 0,05$
9	$8,19 \pm 0,05$
10	$8,26 \pm 0,05$



Tamanho lápis: $8,20 \pm 0,01$ cm



Atividade prática

Medida da Densidade de Sólidos

- Objetivo

- Identificar os diferentes tipos de plásticos que compõem um conjunto de objetos

- Identificação

- Comparação das medidas de densidade (+incertezas) com valores tabelados de diferentes tipos de plásticos

Densidade

- A densidade (d) de materiais sólidos homogêneos é dada por:

$$d = \frac{m}{V}$$

Onde:

m é a massa do cilindro \pm incerteza (σ_m)

V é o volume do cilindro \pm incerteza (σ_V)

Necessário medir a massa e o volume do objeto !

Cálculo da incerteza da densidade

- Apesar das incertezas da massa e do volume serem independentes, vamos utilizar a seguinte aproximação:
 - Propagação simultânea dos valores das incertezas do volume e da massa:

$$\sigma_d = \frac{d_+ - d_-}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{(m + \sigma_m)}{(V - \sigma_v)} - \frac{(m - \sigma_m)}{(V + \sigma_v)} \right]$$

Volume e incerteza do cilindro

- O volume (V) de um cilindro é dado por:

$$V = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 h$$

D é o diâmetro do cilindro \pm incerteza (σ_D)
 h é a altura do cilindro \pm incerteza (σ_h)

- Cálculo da incerteza (σ_V):
 - Apesar das incertezas do diâmetro e da altura serem independentes, vamos utilizar a seguinte aproximação:
 - Propagação simultânea dos valores das incertezas do diâmetro e da altura:

$$\sigma_V = \frac{(V_+ - V_-)}{2} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{(D + \sigma_D)^2 (h + \sigma_h) - (D - \sigma_D)^2 (h - \sigma_h)}{2} \right)$$

Procedimento Experimental 1

- Medidas dos cilindros da caixa:
 - Grupos de 3: dois alunos medem 2 peças e 1 aluno mede 1 peça
 - Grupos de 2: um aluno mede 3 peças e o outro mede 2 peças

ANOTAR NÚMERO DA CAIXA (VAI SER USADA NA PRÓXIMA AULA)!

NÃO MISTUREM CILINDROS DE CAIXAS DIFERENTES!

- Medir as dimensões necessárias para **determinar o volume + incerteza das peças.**
- Medir a massa usando a balança digital da sala de aula

Análise dos dados 1

- Calcular:
 - o volume + incerteza de cada peça
 - densidade + incerteza de cada peça
- Colocar os valores das medidas de massa, diâmetro e altura no guia e na planilha online:
 - link da planilha:
https://drive.google.com/drive/folders/1KjwxSm-eWm0AoQBpjGQO2BpfPpwsc0Ng?usp=share_link

Conclusão Parcial

- É possível determinar quantos tipos de plástico nas peças da turma?

Determinação dos tipos de plásticos

- Como seria possível saber quantos tipos de plástico nas peças da turma?

Determinação dos tipos de plásticos

- Como seria possível saber quantos tipos de plástico nas peças da turma?

Melhorando a precisão do experimento, ou seja, diminuindo as incertezas nas densidades.

Procedimento Experimental 2

- Melhorar a medida de massa das peças
 - Medir novamente todas as peças, mas desta vez usando uma balança analítica (disponível na sala dos técnicos)
 - Anotar os valores no guia e na planilha online

Análise de dados 2

- Calcular novamente a densidade do objeto estudado e sua incerteza com as novas medidas
- Comparar os valores novos com os antigos. É possível dizer quantos tipos de plástico existem na turma?

Para a próxima aula (14/04):

- Entrega do Guia 2.1 (um por grupo)
- No moodle (aba Experimento # 2- Densidade de sólidos):
 - Exercício individual (até dia 14/04).
- Texto: Instrumentos de Medidas (aba Material Didático / arquivos 2023)
- Lembrando: dia 07/04/23 não haverá aula (Semana Santa)
- Pra quem ainda não fez o Guia 1.2:
 - Entrega do guia 1.2 até 06/04 nos escaninhos perto da sala dos técnicos.
 - Exercício individual (até dia 07/04).