Introdução às Medidas em Física
(Turma 43)

Aula 07 12/05/2023

Gisell Ruiz Boiset

gisell@if.usp.br

Bloco F – Conjunto Alessandro Volta – sl. 209

Material preparado com base no material gentilmente cedido pela Profa Dra. Paula R. P. Allegro

Na aula de hoje

- Resumo dos principais pontos da aula anterior

- Conceitos:
  - Medidas indiretas
  - Análise de dados:
    - Análise Gráfica – linearização
    - Comparação com um modelo

- Experiência 4: Movimento de Queda Livre

Referências para a aula de hoje:

- Apostila do curso (página principal do moodle):
  - Capítulo IV: Interpretação Gráfica De Dados
  - Experiência IV (Aulas 06 e 07) - Queda Livre.

Da aula anterior: Análise Gráfica

- O que um gráfico deve conter:
  - Título e legenda do gráfico
  - Legenda e unidade nos eixos
  - Escala adequada para os eixos
  - Dados experimentais e incertezas
  - Funções teóricas ou curvas médias (optativo)
- Critérios para escolha da escala:
  - Escolher uma escala que se adapte ao tamanho do papel utilizado
  - Utilizar APENAS escalas "múltiplas" (na base 10) de 1, 2 ou 5
  - NUNCA escrever os valores dos pontos nos eixos nem desenhar traços indicando os pontos
- Representação dos pontos no gráfico
  - Utilizar marcadores visíveis e de cores e símbolos diferentes para conjuntos de dados diferentes
  - Representar as barras de incerteza em y e x (quando houver) de forma clara
  - NUNCA ligar os pontos

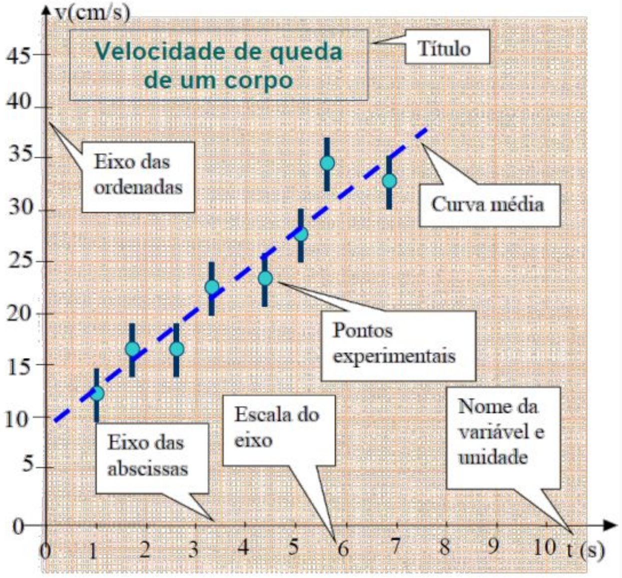


Figura 3.1. Componentes típicos de um gráfico científico padrão.

Da aula anterior: Ajuste de função

- Escolher um modelo:

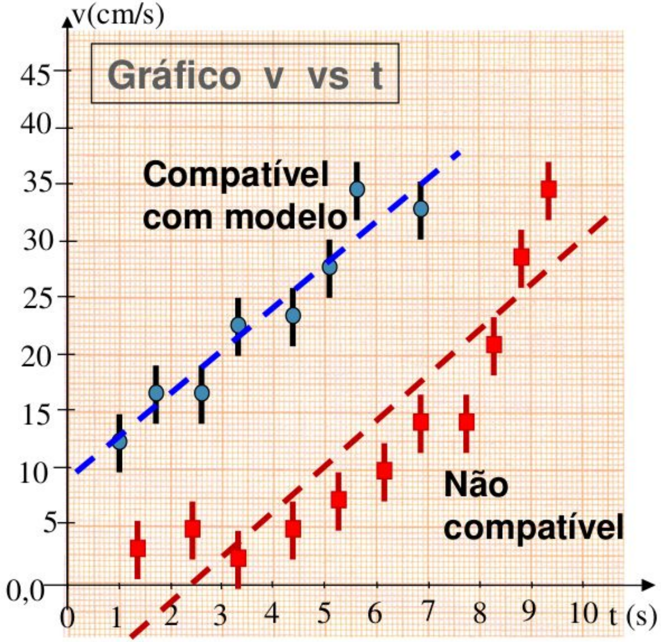
  Y = A+B X

- Neste exemplo:

  v(t) = A+B t

- Ajustar uma reta média entre os pontos experimentais:
  - Critério: distribuir pontos igualmente entre os dois lados da reta

- Compatibilidade com modelo:
  - Verificar SEMPRE se o modelo escolhido (reta média) realmente descreve adequadamente a tendência dos dados experimentais



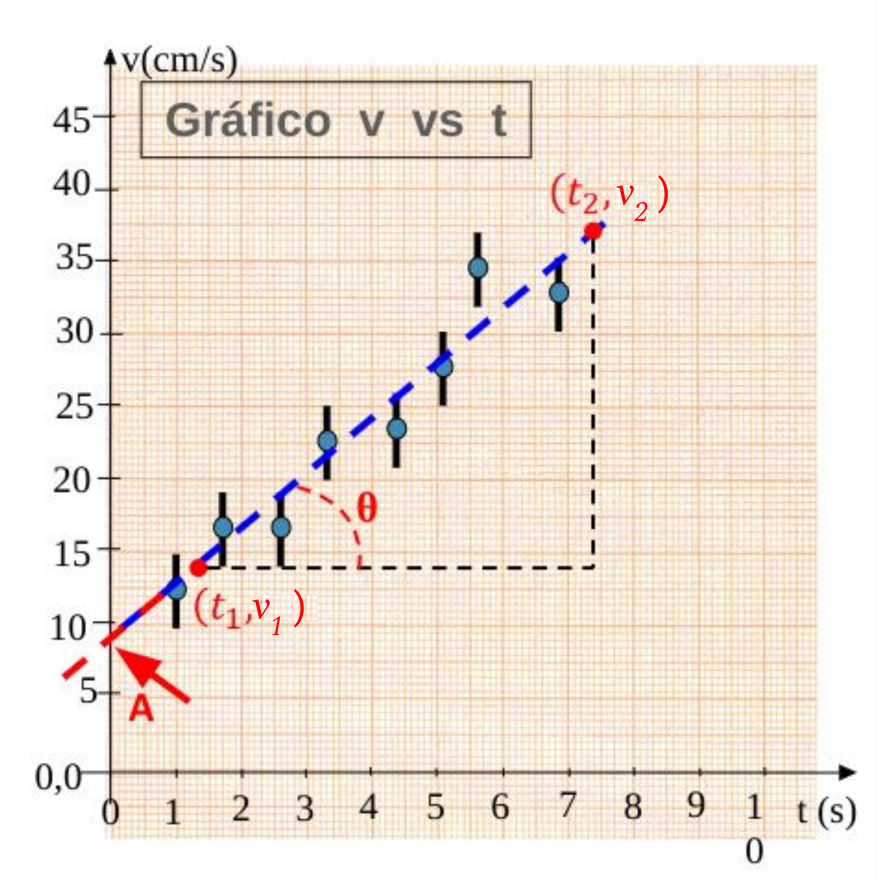
Da aula anterior: - ajuste de reta

- Modelo linear:

$$Y = A + B\,X$$

- Determinação dos coeficientes angular (A) e linear (B):
    - Coeficiente linear A: ponto em *y* que a reta cruza o eixo vertical (*x=0*)
    - Coeficiente angular B:
        - Escolher pontos distantes sobre a reta, que NÃO sejam pontos experimentais

$$B = \tan\theta = \frac{\Delta Y}{\Delta X}\bigg|_{reta} = \frac{\Delta v}{\Delta t}\bigg|_{reta} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

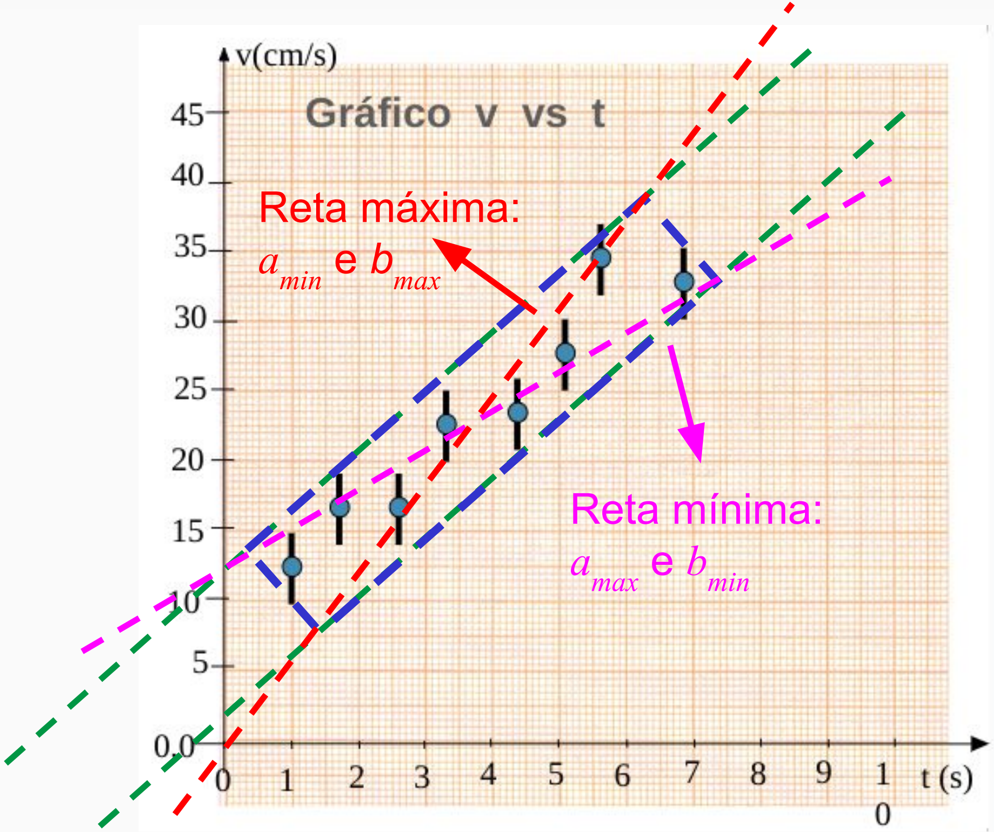


Da aula anterior: incertezas

- A incerteza de A e B também é obtida graficamente:
  - Estimar a reta de menor inclinação possível que ainda descreve os pontos, o que determina os parâmetros máximo A_{max} e mínimo B_{min};
  - Estimar a reta de maior inclinação possível que ainda descreve os pontos, o que determina os parâmetros mínimo A_{min} e máximo B_{max};

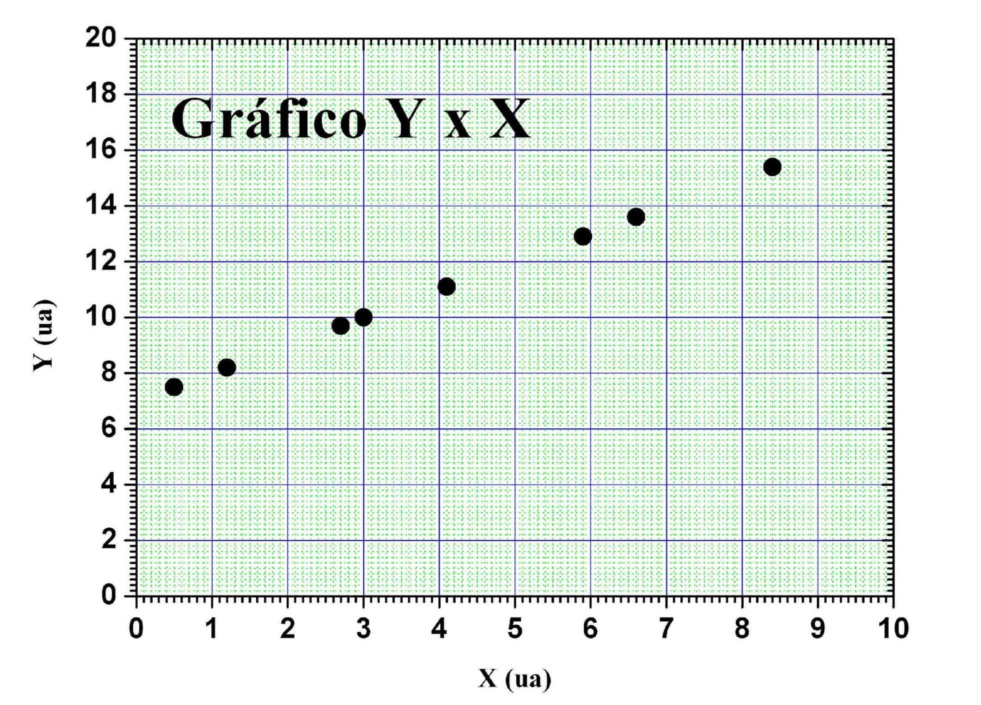
$$\sigma_A = \frac{A_{máximo} - A_{mínimo}}{2}$$

$$\sigma_B = \frac{B_{máximo} - B_{mínimo}}{2}$$



Análise Gráfica - incertezas

- Para incertezas pequenas e pontos bem alinhados:
  - Usar precisão da leitura no gráfico, se não for possível traçar um retângulo.

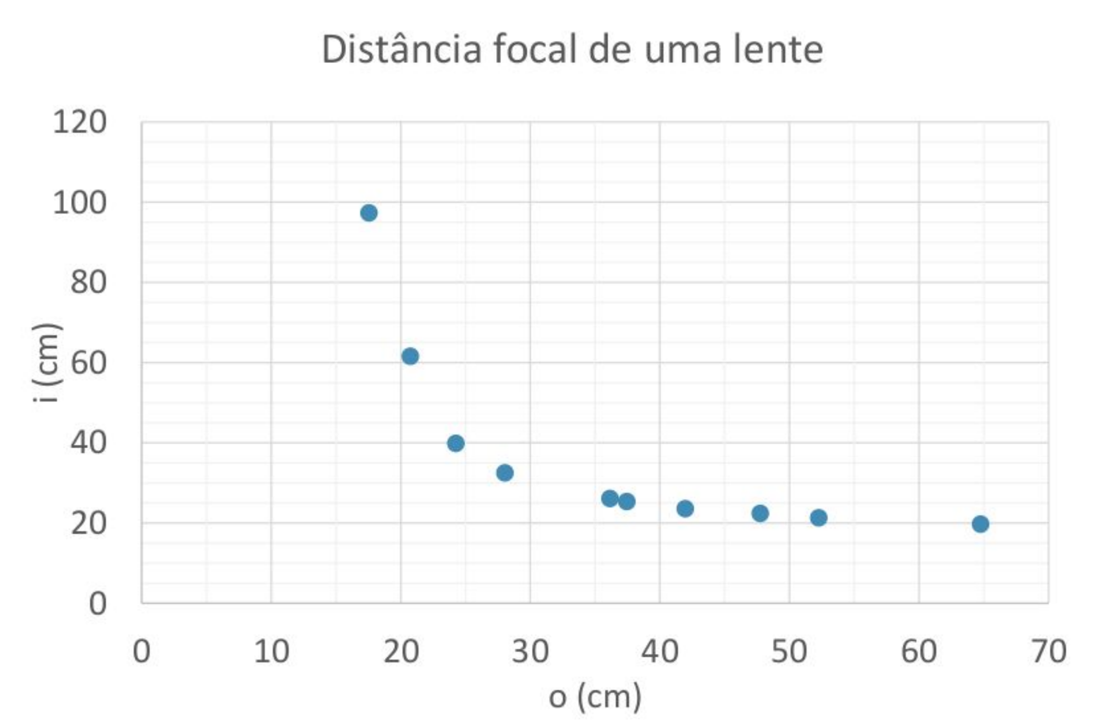


No exemplo:
½ da menor divisão da escala.

Escala em x - σ_x = 0,05 ua
Escala em y - σ_y = 0,1 ua

Aula de hoje: linearização

- O que fazer quando os dados não possuem tendência linear?



$$\frac{1}{i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{o}$$

f: distância focal

o: distância do objeto

i: distância da imagem

Linearização

- Partindo de uma relação não linear:

$$Y = K\,X^n$$

Onde K e n são constantes e se tem interesse em determinar K

- Para obter relação linear, criamos uma nova variável:

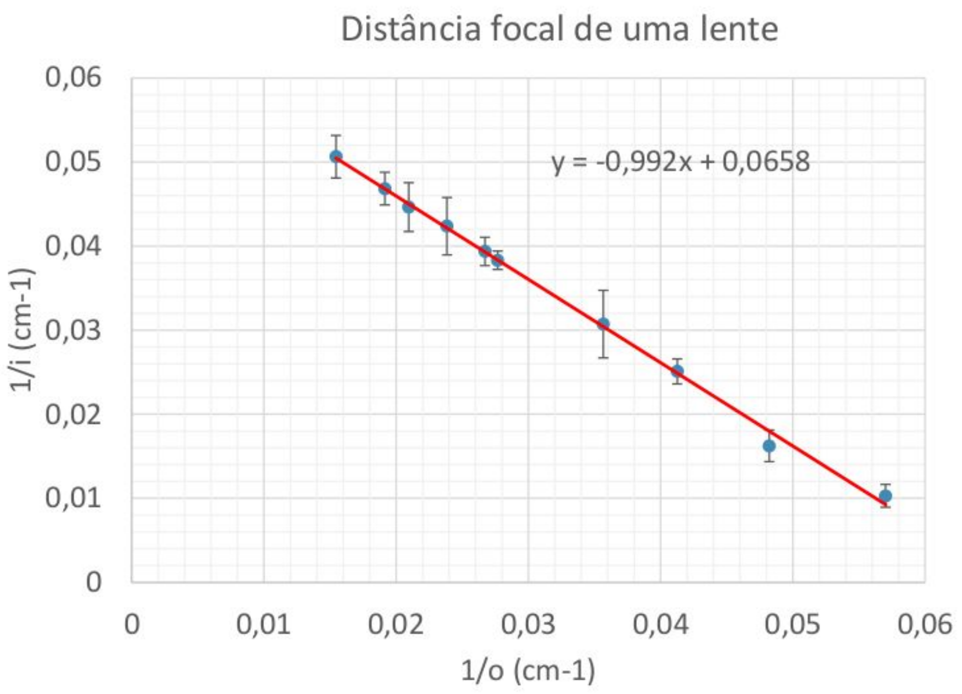
$$Z = X^n$$

- Reescrevemos a equação com a nova variável:

$$Y = K\,Z$$

- Obtém-se o valor de K a partir do ajuste de reta no gráfico de Y vs Z.

Linearização - lentes



$$\frac{1}{i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{o}$$

$$y = a + bx$$

$$y = \frac{1}{i} \quad x = \frac{1}{o}$$

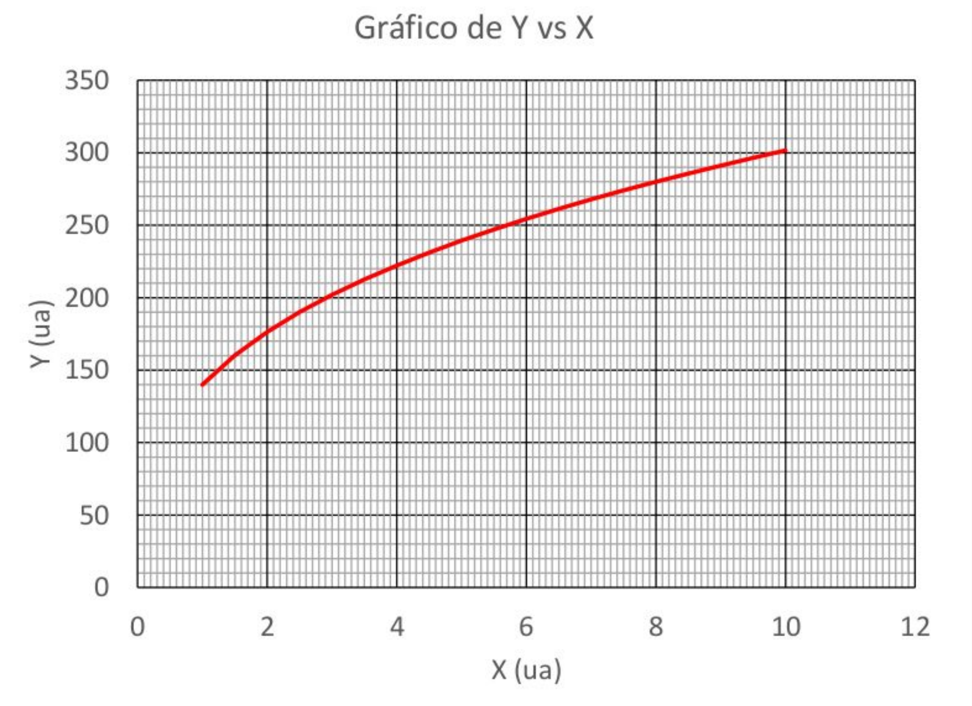
$$a = \frac{1}{f} \qquad b = -1$$

a = 0,0658 $\qquad$ f = 15,2 ± 0,6 cm

b = -0,992 $\qquad$ $f_{nominal}$ =14,4 cm

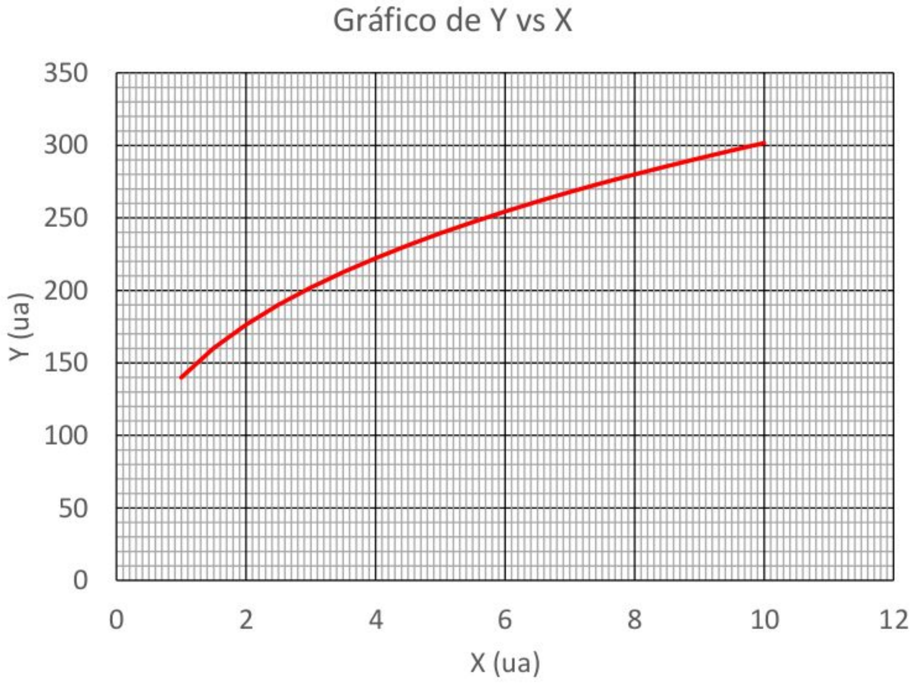
Exercício em aula

- O gráfico abaixo representa a relação entre a função Y e a variável X. Como pode-se perceber, a relação entre X e Y não é linear, e pode ser descrita com a seguinte equação: $Y = \frac{A}{7}\sqrt[3]{X}$. Obtenha o valor da constante A.



Exercício em aula - Resolução

- O gráfico abaixo representa a relação entre a função Y e a variável X. Como pode-se perceber, a relação entre X e Y não é linear, e pode ser descrita com a seguinte equação: $Y = \frac{A}{7}\sqrt[3]{X}$. Obtenha o valor da constante A.



1) Devemos linearizar esse gráfico fazendo uma mudança de variável de maneira que possamos reescrever a equação acima como:

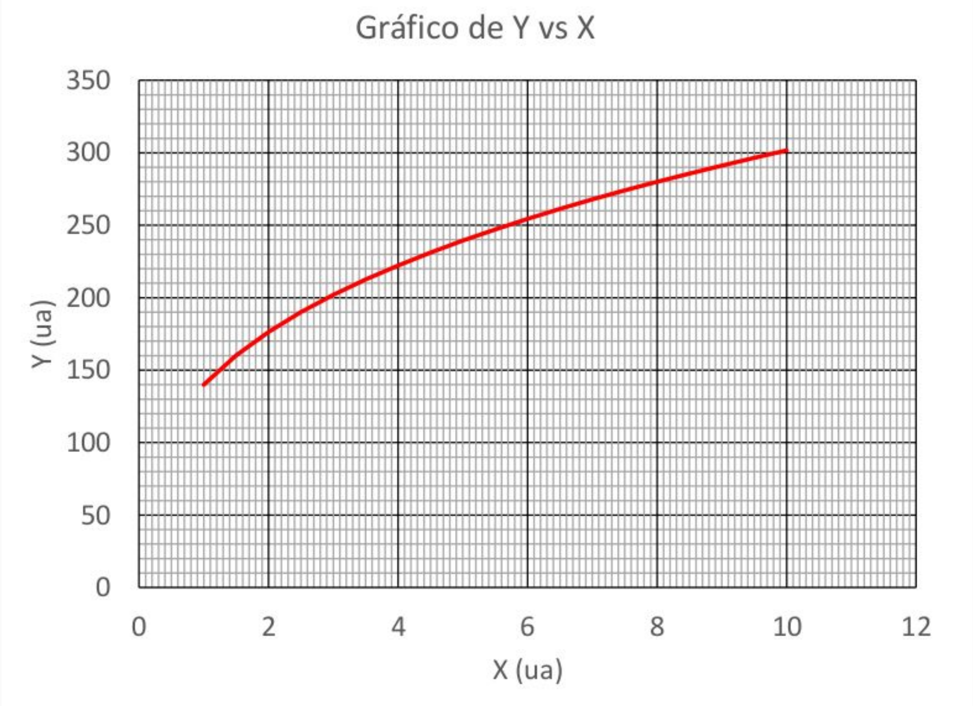
$$Y = CZ$$

Sendo:

$$C = \frac{A}{7}$$
$$Z = \sqrt[3]{X}$$

Exercício em aula - Resolução

- O gráfico abaixo representa a relação entre a função Y e a variável X. Como pode-se perceber, a relação entre X e Y não é linear, e pode ser descrita com a seguinte equação: $Y = \frac{A}{7}\sqrt[3]{X}$. Obtenha o valor da constante A.

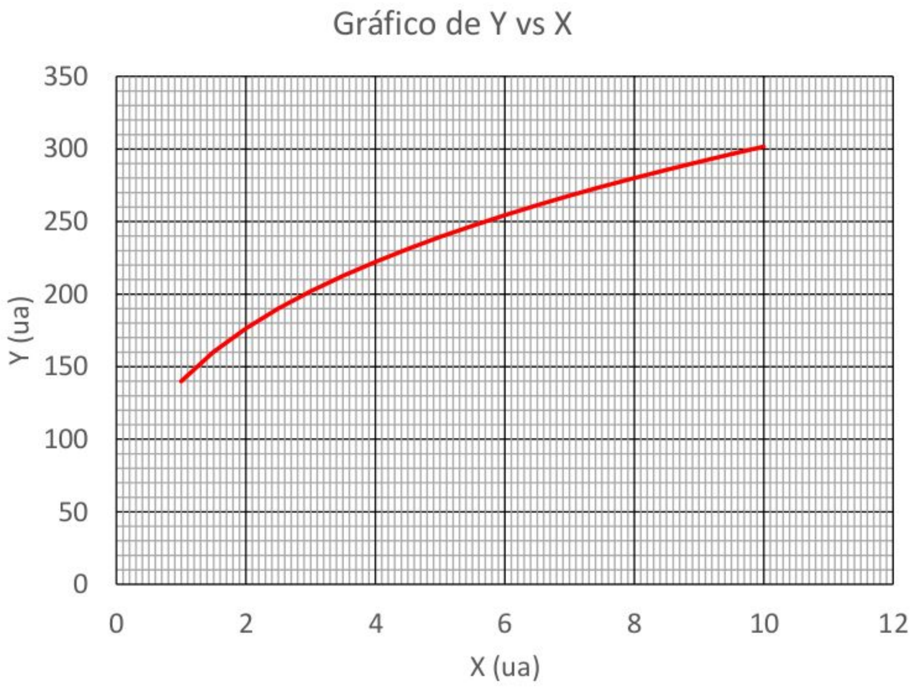


2) Devemos fazer um novo gráfico de Y x Z. Para isso, devemos preencher a seguinte tabela a partir dos dados originais:

X (ua)	Y (ua)	Z ($ua^{1/3}$)
1,0		
2,5		
5,0		
8,0		

Exercício em aula - Resolução

- O gráfico abaixo representa a relação entre a função Y e a variável X. Como pode-se perceber, a relação entre X e Y não é linear, e pode ser descrita com a seguinte equação: $Y = \frac{A}{7}\sqrt[3]{X}$. Obtenha o valor da constante A.

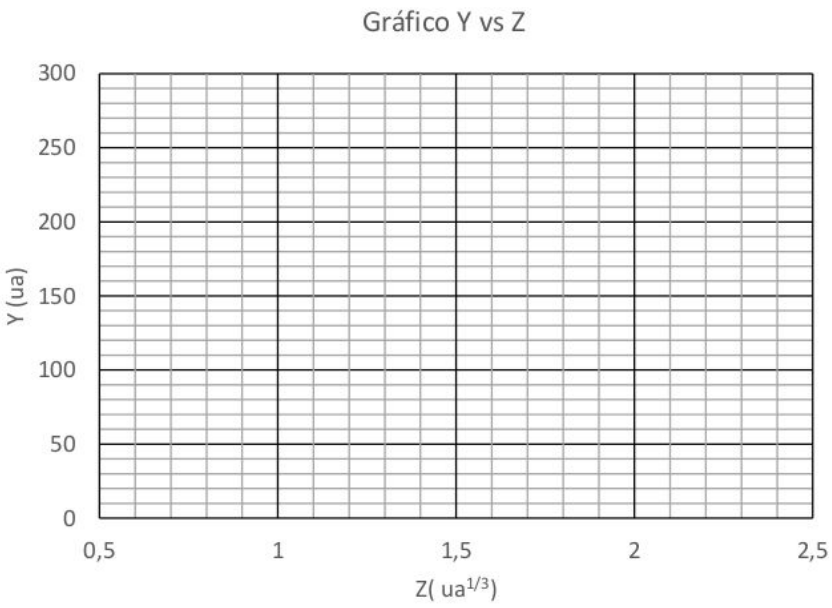


2) Devemos fazer um novo gráfico de Y x Z. Para isso, devemos preencher a seguinte tabela a partir dos dados originais:

X (ua)	Y (ua)	Z ($ua^{1/3}$)
1,0	140	1,0
2,5	190	1,4
5,0	239	1,7
8,0	280	2,0

Exercício em aula - Resolução

- O gráfico abaixo representa a relação entre a função Y e a variável X. Como pode-se perceber, a relação entre X e Y não é linear, e pode ser descrita com a seguinte equação: $Y = \frac{A}{7}\sqrt[3]{X}$. Obtenha o valor da constante A.



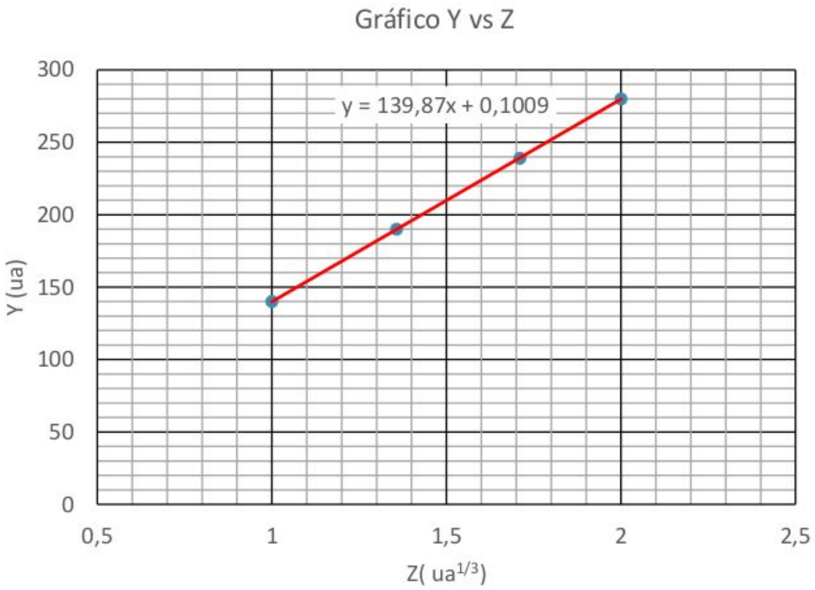
3) Fazemos um novo gráfico de Y x Z a partir dos dados da tabela anterior. Ajustamos a melhor reta e obtemos C.

4) Calculamos A a partir de C:

$$A = 7C$$

Exercício em aula - Resolução

- O gráfico abaixo representa a relação entre a função Y e a variável X. Como pode-se perceber, a relação entre X e Y não é linear, e pode ser descrita com a seguinte equação: $Y = \frac{A}{7}\sqrt[3]{X}$. Obtenha o valor da constante A.



3) Fazemos um novo gráfico de Y x Z a partir dos dados da tabela anterior. Ajustamos a melhor reta e obtemos C.

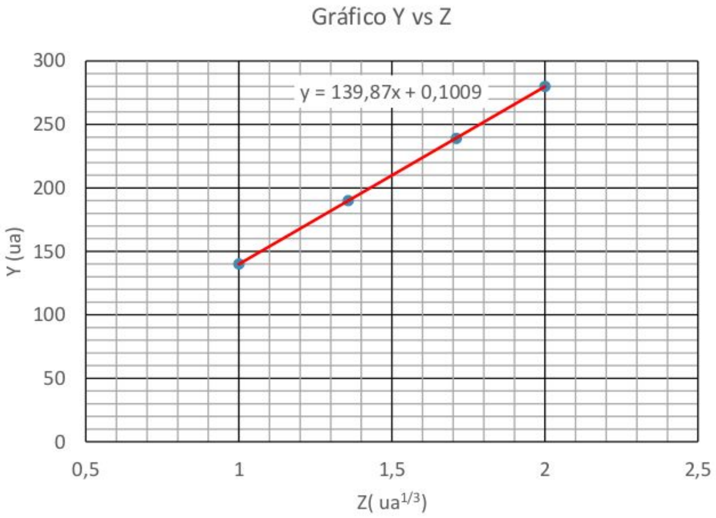
4) Calculamos A a partir de C:

$$A = 7C$$

$A_{gráfico}$ =979,1 ua^3 $A_{nominal}$ =979,1 ua^3

Exercício em aula - Resolução

- O gráfico abaixo representa a relação entre a função Y e a variável X. Como pode-se perceber, a relação entre X e Y não é linear, e pode ser descrita com a seguinte equação: $Y = \frac{A}{7}\sqrt[3]{X}$. Obtenha o valor da constante A.



3) Fazemos um novo gráfico de Y x Z a partir dos dados da tabela anterior. Ajustamos a melhor reta e obtemos C.

4) Calculamos A a partir de C:

$$A = 7C$$

$A_{gráfico}$ =979,1 ua^3 $A_{nominal}$ =979,1 ua^3

5) Para saber se os dois valores são compatíveis é necessário calcular a incerteza de A:

Ajustamos as retas maior e menor no gráfico de Y X Z e obtemos a incerteza de C:

$$\sigma_C = \frac{C_{máximo} - C_{mínimo}}{2}$$

6) Calculamos a incerteza de A:

$$\sigma_A = \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial C}\sigma_C\right)^2}$$

Aula de hoje: Continuação da análise do Movimento de Queda de um Objeto

- Hipótese sobre o movimento de um corpo em queda livre:
  - Um corpo em queda está sob a influência de uma força constante, a força da gravidade, portanto se movimenta com uma aceleração constante:

$$\vec{F} = m\vec{g} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

  - O que leva às equações para velocidade e posição:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g} \cdot t$$

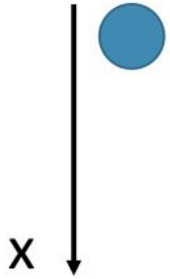
$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{\vec{g}}{2} \cdot t^2$$

Hipótese sobre o movimento de queda livre

- Observando o movimento na direção vertical (eixo-x orientado para baixo) pode-se abandonar a notação vetorial:

$$v(t) = v_0 + g \cdot t$$

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{g}{2} \cdot t^2$$

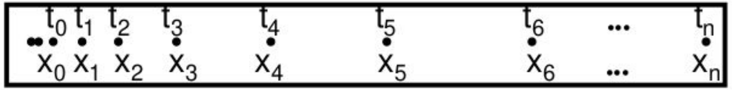


- corolário: a velocidade média num intervalo de tempo coincide com a velocidade instantânea no centro do intervalo de tempo:

$$\bar{v}(t_1, t_2) = v\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)$$

Como verificamos esse modelo na aula passada?

- Estudando o movimento de queda de um objeto:
  - Medidas de posição em função do tempo



  - Verificando se a velocidade *v(t)* apresenta uma dependência linear com o tempo *t*, isto é, $v(t) = v_0 + gt$, através do gráfico v vs t.

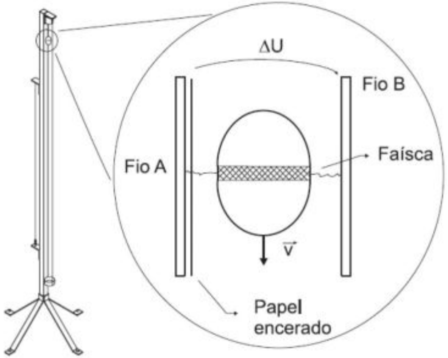
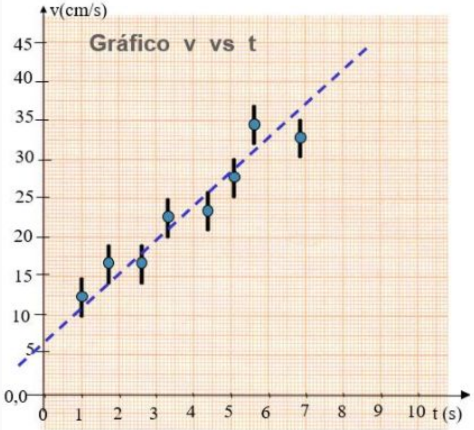


Figura 5.1: equipamento utilizado para o estudo da queda do corpo. As faíscas provocadas pelos pulsos de alta tensão entre os dois fios marcam um papel encerado.



Influência de V_0 na obtenção de um valor para a gravidade

- Do modelo: $v(t) = v_0 + gt$, sendo v_0=0 m/s^2 se o objeto é simplesmente solto.

- Pelo nosso arranjo experimental:
  - Objeto oval está preso por um ímã que desliga no início da medida (v_0=0 m/s^2)

- Da análise dos dados:
  - Escolha arbitrária de t_0 e x_0: v_0 pode ou não ser igual 0 m/s^2

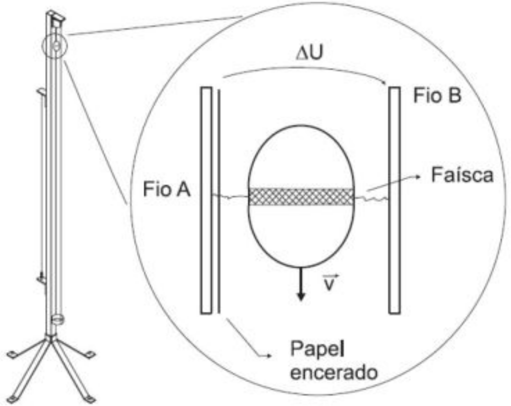
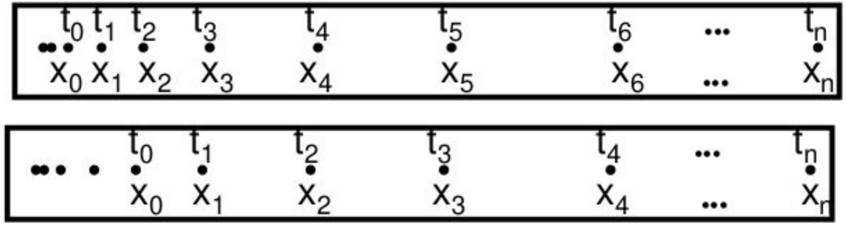
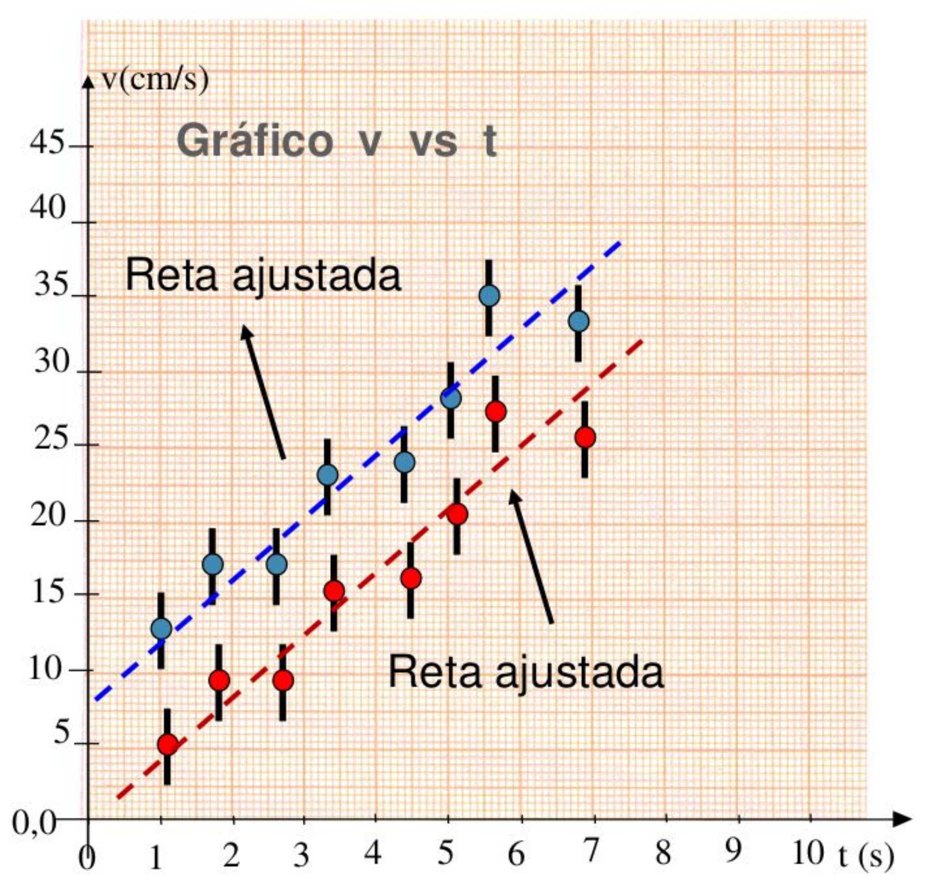


Figura 5.1: equipamento utilizado para o estudo da queda do corpo. As faíscas provocadas pelos pulsos de alta tensão entre os dois fios marcam um papel encerado.



O que acontece com o valor da gravidade e com o nosso modelo se $v_0 \neq 0$ m/s^2 ?

Influência de V_0 na obtenção de um valor para a gravidade



- Para $V_0 = 0$:
  - Ajuste passa pela origem
  - Coeficiente angular = g
- Para $V_0 \neq 0$:
  - Ajuste não passa pela origem
  - Coeficiente angular = g
- Para nosso modelo e valor de g: $v(t) = v_0 + g \cdot t$
  - Sem influência.
    - Retas paralelas
    - Mesmo coeficiente angular: g

Aula de hoje: continuação da verificação do modelo de queda livre

- Nosso modelo diz que:

$$v(t) = v_0 + g \cdot t$$

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{g}{2} \cdot t^2$$

x_0=0 cm pela escolha do sistemas de coordenadas onde o objeto é solto (ímã).

- Verificação do nosso modelo através da análise de como a posição varia com o tempo.

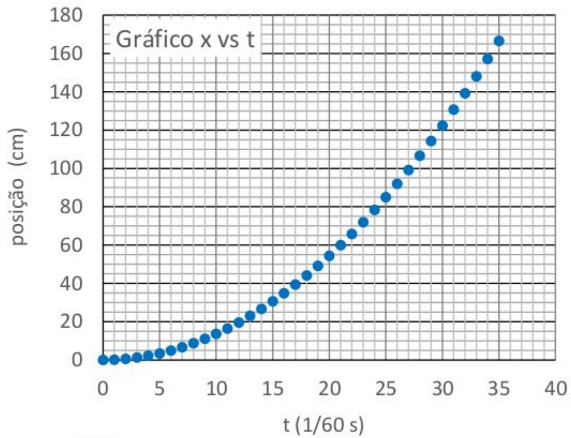
- Simulação do nosso modelo

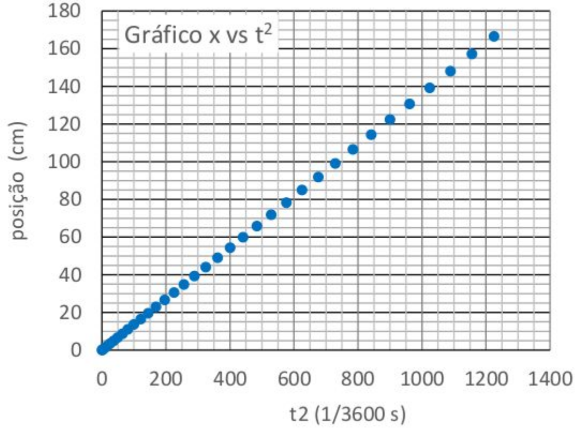
Análise de dados - Linearização

- Gráfico de x vs t: não linear já que

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{g}{2} \cdot t^2$$

- Linearização de X vs t (se v_0=0 cm/s^2)
  - Gráfico de X vs T^2
  - Obter coeficiente angular + linear
    - Obter g e X_0



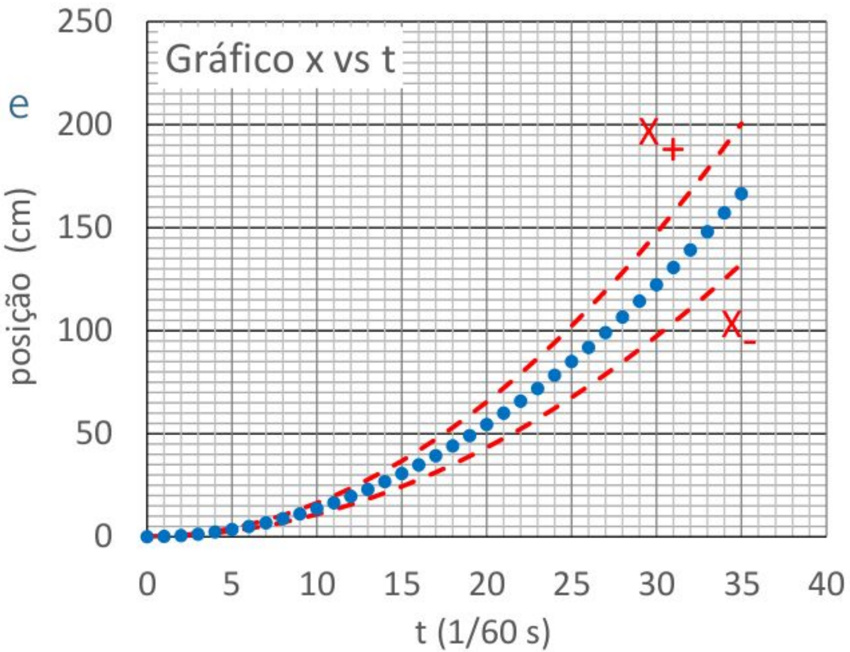


Análise de dados - Simulação

- Verificação se hipóteses sobre o arranjo e procedimento foram adequadas:
  - Comparação do modelo teórico e dados experimentais
    - Gráfico x vs t dos pontos experimentais + simulação
- Simulação
  - Usar valor de g obtido no guia anterior (V x t)
  - Calcular valores limites X+ e X-:

$$x_+ = ½\,(g + \sigma_g)\,t^2$$

$$x_- = ½\,(g - \sigma_g)\,t^2$$



Dicussão

- O parâmetro a (v_0) é coerente com um movimento que se iniciou no repouso?

- E b é compatível com o valor da aceleração da gravidade? O IAG obteve o valor de 978,622 cm/s^2 para a aceleração da gravidade fazendo uma medida bastante precisa.

- O ajuste dos valores simulados (esperados) é compatível com os experimentais em todo o intervalo de medida?

Para a próxima aula (26/05):

- Entrega do Guia 4.2 (um por grupo)
- No moodle (aba Experimento # 4- Queda livre):
  - Exercício casa 4.2 - Sexta de manhã (até dia 26/05).
- Lembrando: dia 19/05/23 PROVA 01

LOCAL DA PROVA: sala 2021

HORÁRIO DA PROVA: das 8:30 hs às 11:30 hs

TRAZER: **Calculadora e régua**

Quaisquer mudanças: VER NO MOODLE (início/locais das provas)

Gisell Ruiz Boiset

gisell@if.usp.br

Bloco F – Conjunto
Alessandro Volta – sl. 209

Relembrando

Incertezas instrumentais

- Precisão do instrumento de medida:
  - Instrumentos analógicos (ex. régua): é a metade da menor divisão
    - Cuidado com instrumentos que possuem escalas auxiliares tipo nônio (ex: paquímetro): a incerteza é a menor divisão do nônio
  - Instrumentos digitais (ex: multímetro): 1 unidade na escala do último dígito dísponivel

Incertezas estatísticas

- Flutuação no resultado das medidas
  - Representação do resultado de N medidas x_i: média ($\bar{x}$)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

  - Incerteza estatística do resultado das medidas: desvio padrão da média (σ_m)

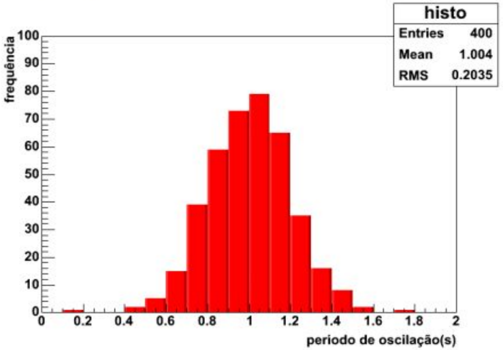
$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Sendo s o desvio padrão:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

Equações válidas para medidas realizadas nas mesmas condições e que possuem as mesmas incertezas (instrumental + aleatórias)

- Distribuição de dados:
  - simétrica em torno de um certo valor:
    - Valor médio = valor mais provável
  - decresce ao se afastar desse valor.



Incertezas sistemáticas

- A medida é desviada em uma única direção:
  - Ex: uma régua onde o primeiro mm está faltando e o experimentador não percebe
    - Todas as medidas serão 1 mm maiores do que deveriam
  - Ex: uma balança descalibrada e/ou com o zero deslocado
- Esse tipo de incerteza, em geral, só é percebida quando um resultado difere do esperado
  - Devem ser corrigidas ou refeitas

Incerteza total de uma medida

- Incertezas resultantes do ato de medir:
  - Instrumental: σ_{inst}
  - Estatística: σ_{estat}
- Incerteza total da medida (σ): combinação de todas as incertezas

$$\sigma = \sqrt{{\sigma_{inst}}^2 + {\sigma_{estat}}^2}$$

Representação dos resultados: algarismos significativos

Regra geral:

- Só faz sentido colocar **um** (em alguns casos dois) **algarismo significativo** na incerteza

- E a **incerteza** é que **determina o número de algarismos significativos** da medida

  Forma correta: (2,74 ± 0,05) cm

Incerteza absoluta e relativa

- Incerteza absoluta (σ_{abs}): Valor apresentado no resultado

Volume = 27,4 ± 0,5 cm³

- Incerteza relativa (σ_{rel}): Porcentagem da incerteza sobre o valor principal

$$\sigma_{rel} = \frac{\sigma_{abs}}{\text{valor principal}} = \frac{0,5}{27,4} = 0,018 \text{ ou } 1,8\%$$

  - Assim, se o valor da incerteza representa 5% do valor medido:

$$\sigma_{abs} = \text{valor principal} \times 0,05$$

$$\sigma_{abs} = 27,4 \times 0,05 = 1,4$$

Como fazer um Histograma

- 1ª etapa : decidir a escala e a largura do canal do histograma
    - mínimo : 2 s
    - máximo: 7 s
    - largura do canal: 1 s
- 2ª etapa : calcular a frequência com que os dados aparecem em cada intervalo

$[2,3[\rightarrow 1$

$[3,4[\rightarrow 0$

$[4,5[\rightarrow 2$

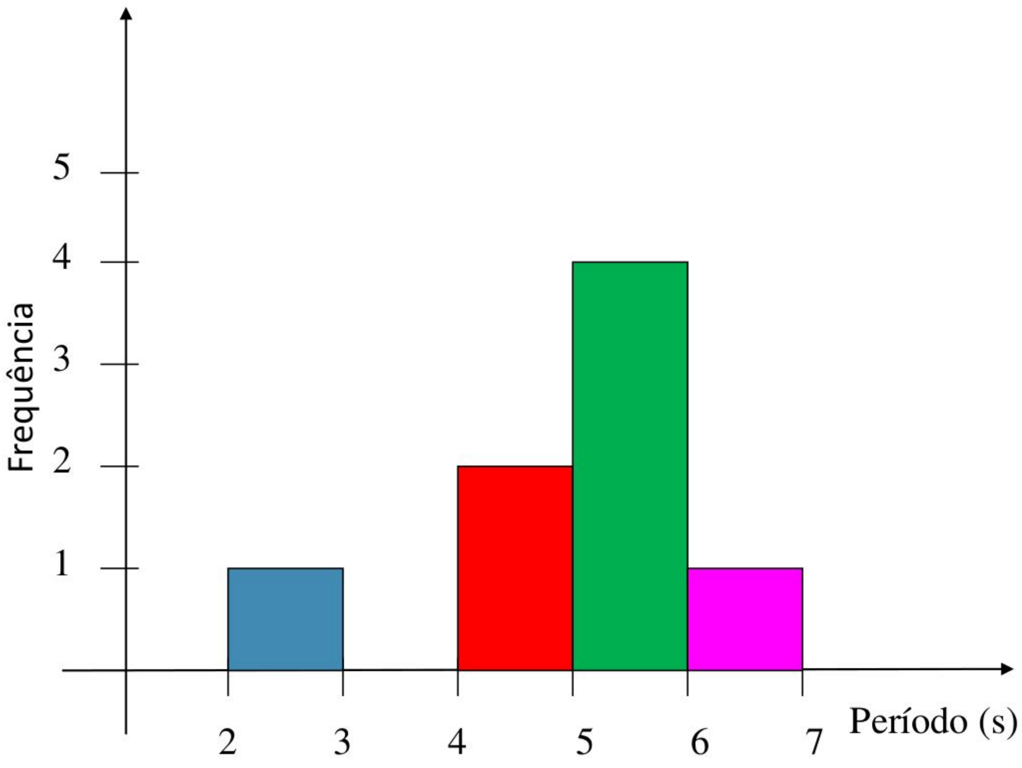
$[5,6[\rightarrow 4$

$[6,7[\rightarrow 1$

medida	período (s)
1	2,4
2	5,3
3	5,8
4	6,1
5	5,5
6	4,7
7	4,1
8	5,2

Como fazer um Histograma

- 3ª etapa : preencher o histograma



medida	período (s)
1	2,4
2	5,3
3	5,8
4	6,1
5	5,5
6	4,7
7	4,1
8	5,2

frequência

[2,3[→ 1
[3,4[→ 0
[4,5[→ 2
[5,6[→ 4
[6,7[→ 1

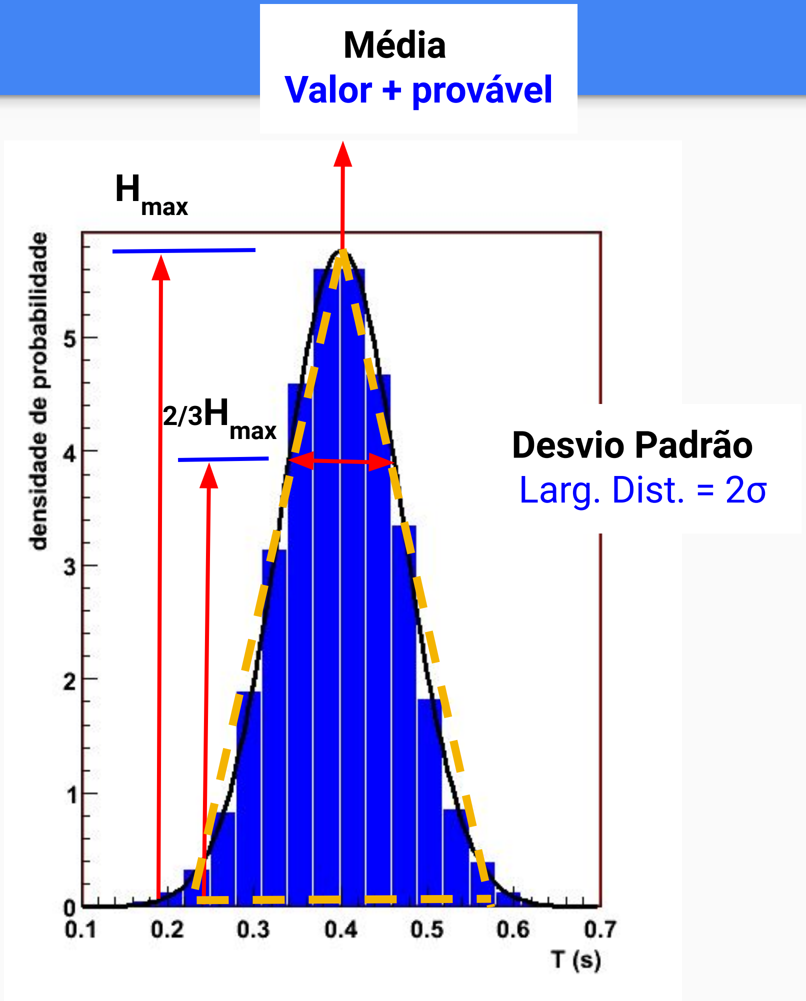
Propriedades Gráficas

- **Média**
  Valor mais provável
- **Desvio Padrão (σ)**
  1/2 largura a 2/3 da altura máxima(H_{max})
- **Total aproximado de eventos N**
  Área do triângulo ajustado na distribuição

$$N_{dist} = \frac{(N_{max} \cdot N_{colunas})}{2}$$

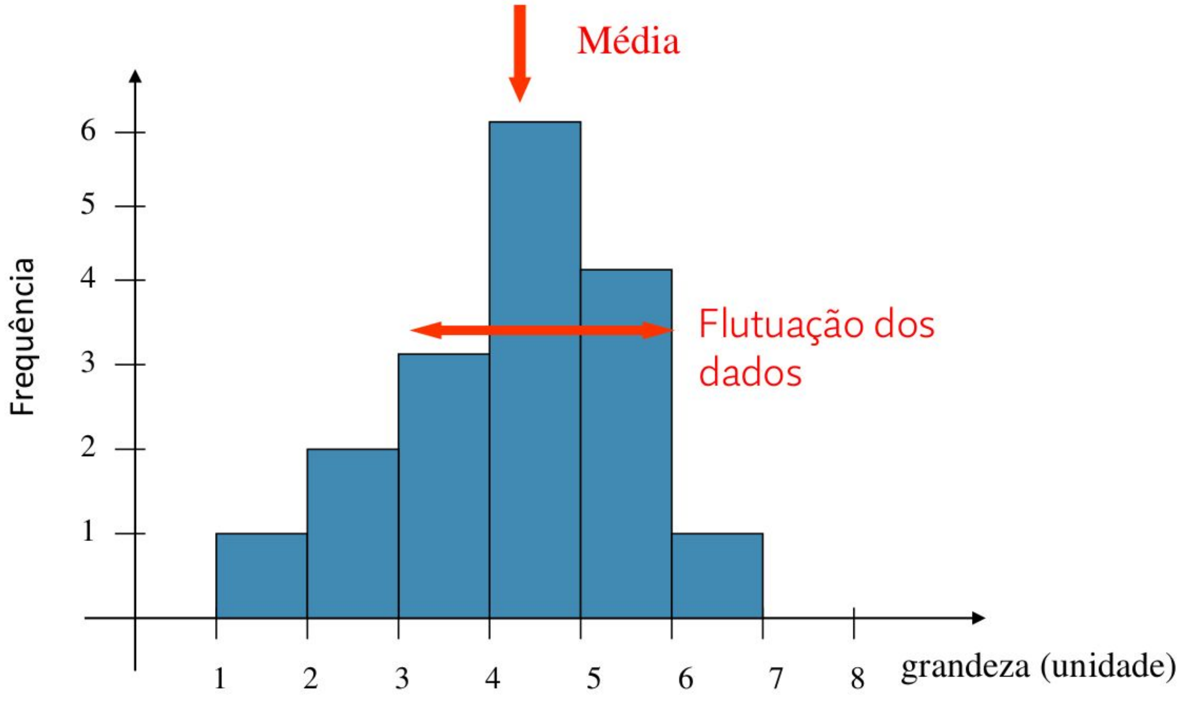
- **Incerteza da média**
  Incerteza estatística

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$



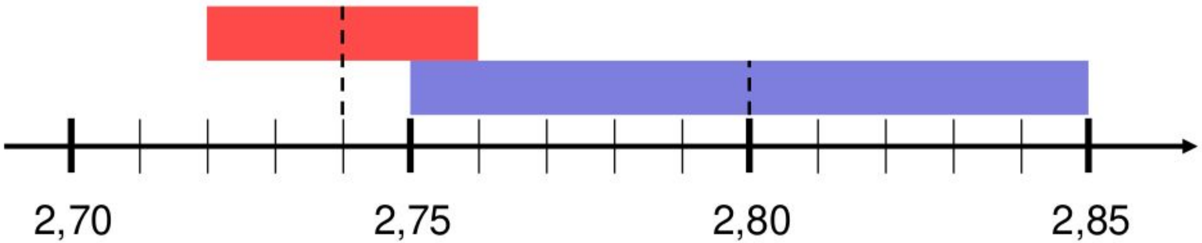
Representação de dados

$$x_{final} = \bar{x} \pm \sigma_m \text{ unid}$$



Como comparar os resultados de duas medidas?

- É preciso sempre se levar em consideração a incerteza da medida.
  - Por isso perguntamos se as medidas são compatíveis ao invés de "iguais"
  - Exemplo: $2{,}74 \pm 0{,}02$ mm é compatível com $2{,}80 \pm 0{,}05$ mm ?



Critério para compatibilidade

- Superposição em 1σ = compatíveis
  - Superposição em 2σ ou 3σ
    - Compatíveis com menor probabilidade
- Teste Z indica essa probabilidade
  - Comparação entre $(a \pm \sigma_a)$ e $(b \pm \sigma_b)$

$$Z = \frac{|a-b|}{\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}}$$

$0 < Z \leq 1$, compatíveis ao nível de 1σ
$1 < Z \leq 2$, compatíveis ao nível de 2 σ
$2 < Z \leq 3$, compatíveis ao nível de 3 σ
$Z > 3$, discrepantes

Propagação de incerteza

- Para medidas indiretas:
  - Calcular a influência da incerteza da medida primária para a grandeza calculada

    Medida: $x \pm \sigma_x$

    Grandeza calculada:

    $$w = w(x) \pm \quad \sigma_w = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\sigma_x\right)^2}$$

  - Se a função f (x,y,z,t....) calculada depende de várias variáveis:

    $x \pm s_x$; $y \pm s_y$; $z \pm s_z$; $t \pm s_t$; ....

$$\sigma_w = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\sigma_y\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\sigma_z\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\sigma_t\right)^2 + \cdots}$$

Propagação de incerteza

$$f = x \pm y \Rightarrow \sigma_f = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

$$o = Pos_{lente} - Pos_{fonte}$$

$$\sigma o = \sqrt{(\sigma P_L)^2 + (\sigma P_f)^2}$$

$$f = \frac{x^a y^b}{z^c} \Rightarrow \frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(a\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(b\frac{\sigma_y}{y}\right)^2 + \left(c\frac{\sigma_z}{z}\right)^2}$$

$$d = \frac{m}{V} = \frac{4m}{\pi D^2 h}$$

$$\frac{\sigma_d}{d} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2}$$

Média simples e Média ponderada

Média simples

Quando se faz **várias determinações de uma grandeza** e cada valor tem **incertezas iguais**

média ($\bar{x}$) $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

desvio padrão $$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

desvio padrão da média (σ_m) $$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Média ponderada

Quando se faz **várias determinações de uma grandeza** e cada valor tem **incerteza diferente**

$$\bar{f}_{pond} = \frac{\sum p_i f_i}{\sum p_i}$$

onde: $p_i = \frac{1}{\sigma_{f_i}^2}$

- E a incerteza de $\bar{f}_{pond}$ é dada por:

$$\sigma_{f_{pond}} = \sqrt{\frac{1}{\sum p_i}}$$