

Introdução às Medidas em Física

(Turma 43)

Aula 06 05/05/2023

Gisell Ruiz Boiset

gisell@if.usp.br

Bloco F – Conjunto Alessandro Volta – sl. 209

Material preparado com base no material gentilmente cedido pela Profa Dra. Paula R. P. Allegro

Na aula de hoje

- Resumo dos principais pontos da aula anterior
- Conceitos:
 - Medidas indiretas
 - Análise de dados:
 - Análise Gráfica – ajuste de reta
 - Comparação com um modelo
- Experiência 4: Movimento de Queda Livre

Referências para a aula de hoje:

- Apostila do curso (página principal do moodle):
 - Capítulo IV: Interpretação Gráfica De Dados
 - Experiência IV (Aulas 06 e 07) - Queda Livre.

Da aula Anterior - Média ponderada

$$\bar{f} = \frac{p_1 f_1 + p_2 f_2 + p_3 f_3 + p_4 f_4 + p_5 f_5}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5}$$

$$\bar{f}_{pond} = \frac{\sum p_i f_i}{\sum p_i} \quad \text{onde: } p_i = \frac{1}{\sigma_{f_i}^2}$$

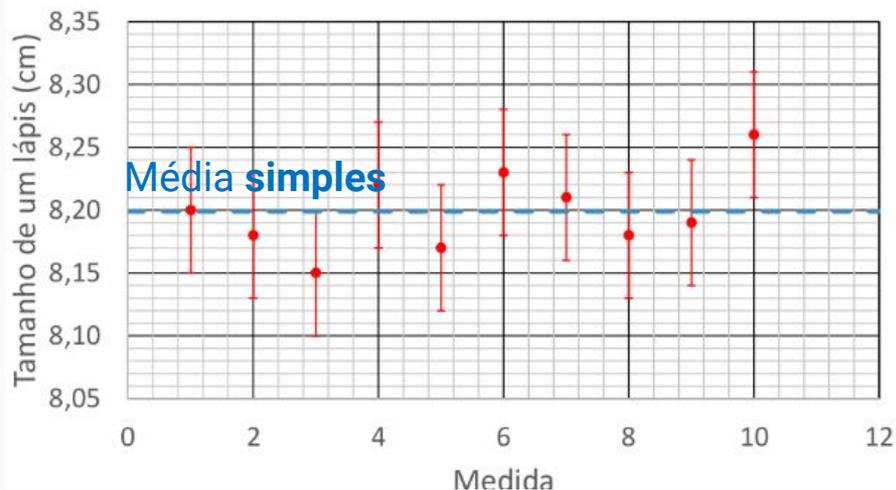
- E a incerteza de \bar{f}_{pond} é dada por:

$$\sigma_{f_{pond}} = \sqrt{\frac{1}{\sum p_i}}$$

Média simples e Média ponderada

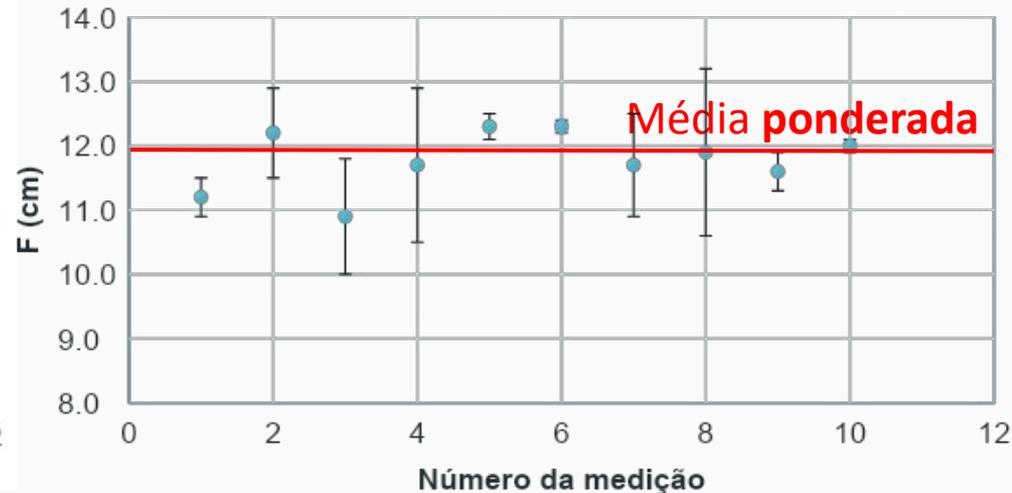
Média simples

Quando se faz **várias determinações de uma grandeza** e cada valor tem **incertezas iguais**



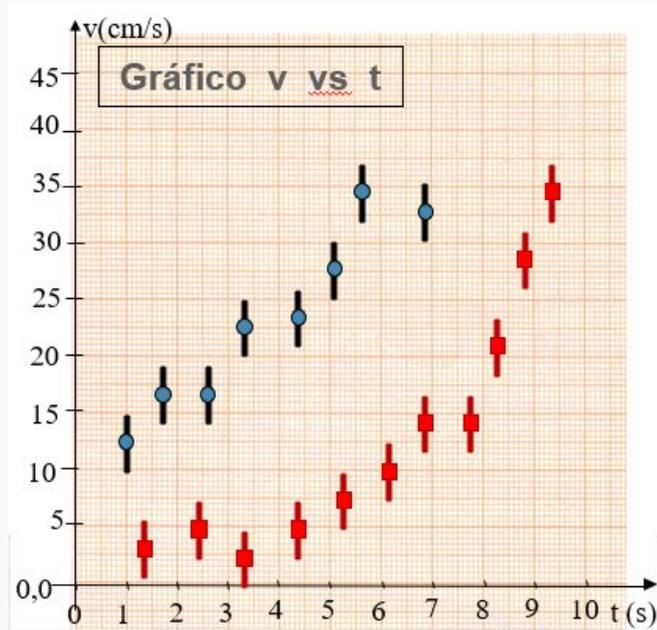
Média ponderada

Quando se faz **várias determinações de uma grandeza** e cada valor tem **incerteza diferente**



Aula de hoje: Análise Gráfica

- Como determinar o comportamento dos meus dados experimentais?
- Será que os dados seguem algum modelo proposto?



Gráficos

- O que um gráfico deve conter:

- Título e legenda do gráfico
- Legenda e unidade nos eixos
- Escala adequada para os eixos
- Dados experimentais e incertezas
- Funções teóricas ou curvas médias (algumas vezes é optativo)

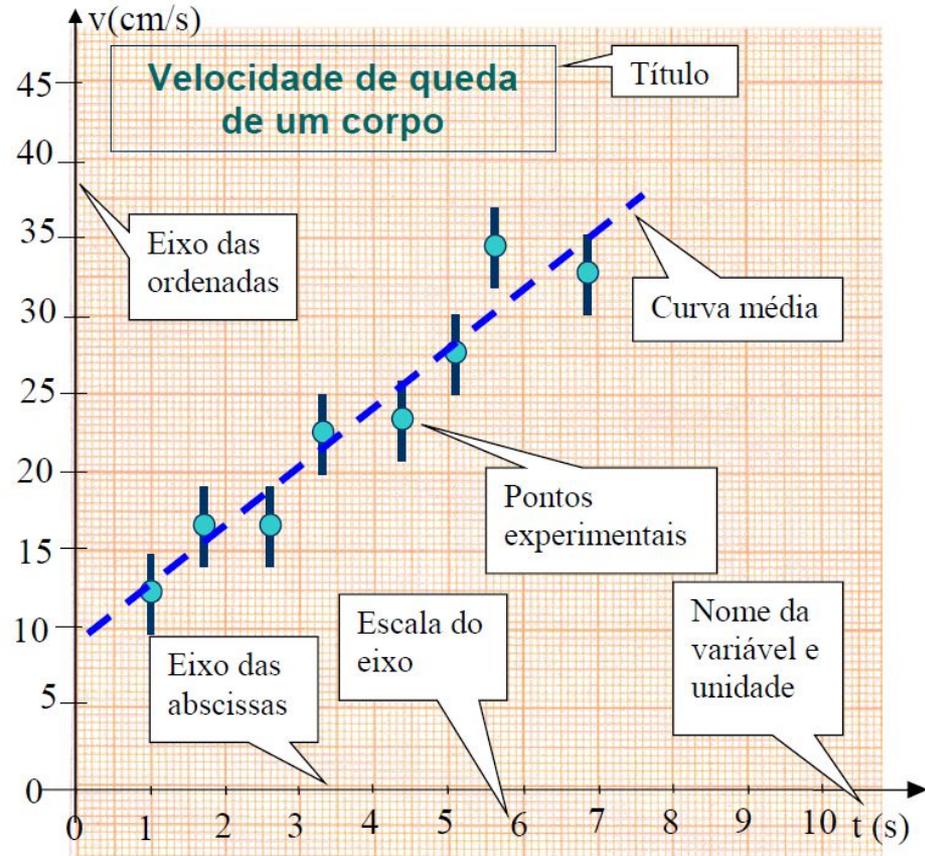
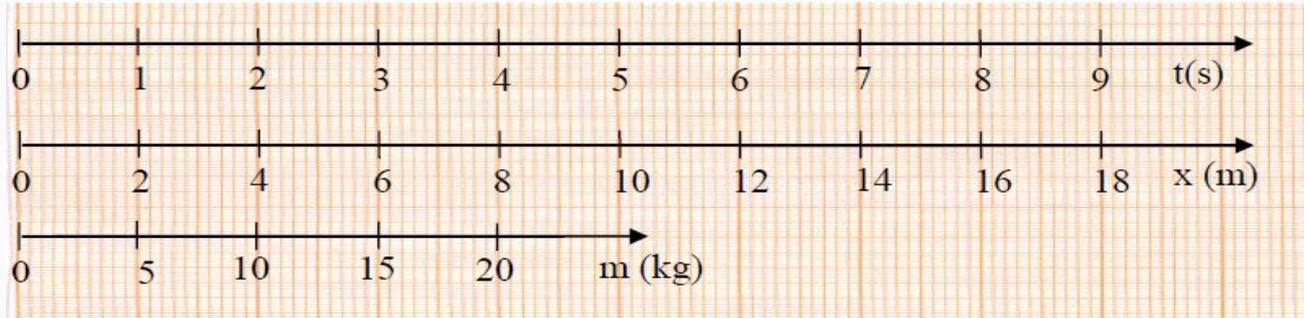


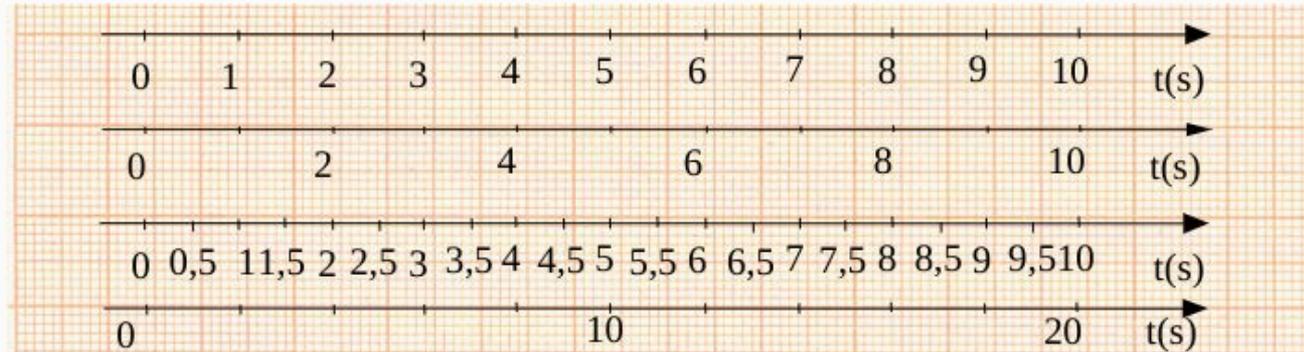
Figura 3.1. Componentes típicos de um gráfico científico padrão.

Eixos em um gráfico

- Escolha uma escala que se adapte ao tamanho do papel utilizado
- Utilize **APENAS** escalas “múltiplas” (na base 10) de **1, 2** ou **5**



- Gradue os eixos de 1 em 1 cm (ou 2 em 2). **Evite** escalas muito espaçadas ou muito comprimidas

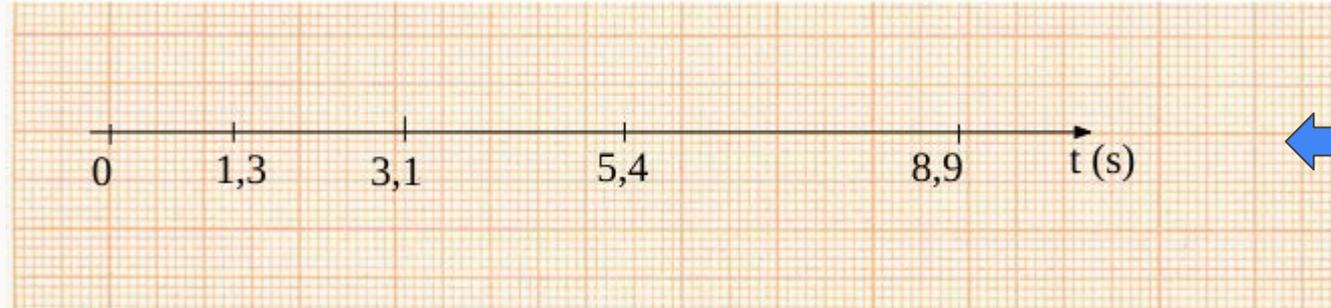


← Muito próxima

← Muito afastada

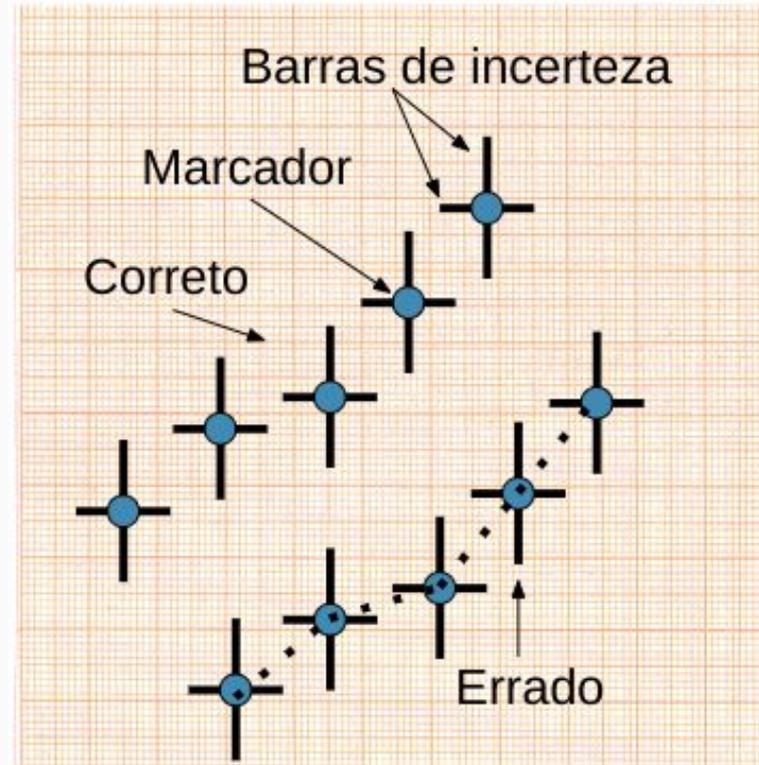
Eixos em um gráfico

- Desenhe os eixos. Não utilize os eixos e escalas pré-desenhadas no papel
- Coloque legendas em cada um dos eixos
- **NUNCA** escreva os valores dos pontos nos eixos nem desenhe traços indicando os pontos



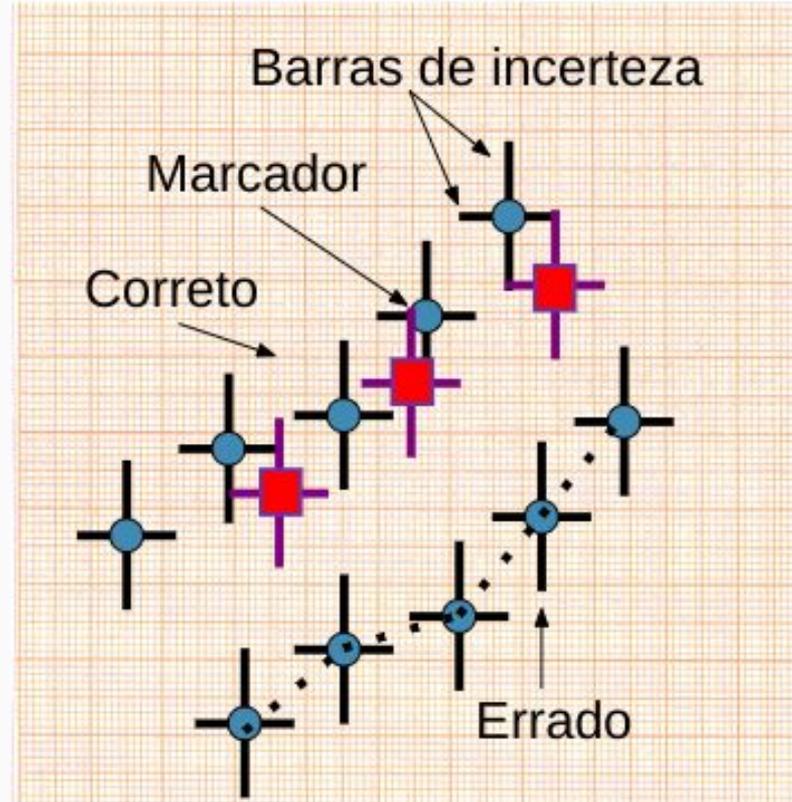
Representação dos pontos no gráfico

- Utilize marcadores visíveis
- Represente as barras de incerteza em y e x (quando houver) de forma clara
- **NUNCA LIGUE OS PONTOS**



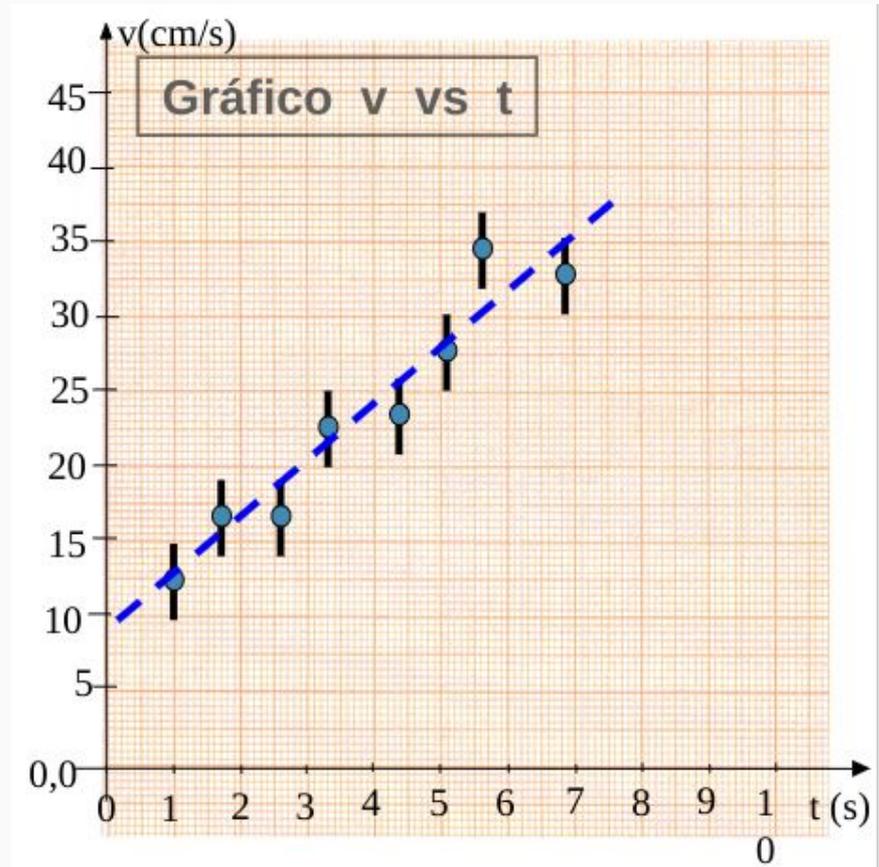
Representação dos pontos no gráfico

- Utilize marcadores visíveis
- Represente as barras de incerteza em y e x (quando houver) de forma clara
- **NUNCA LIGUE OS PONTOS**
- Conjunto de dados diferentes devem ser representados com símbolos (ou cores) diferentes



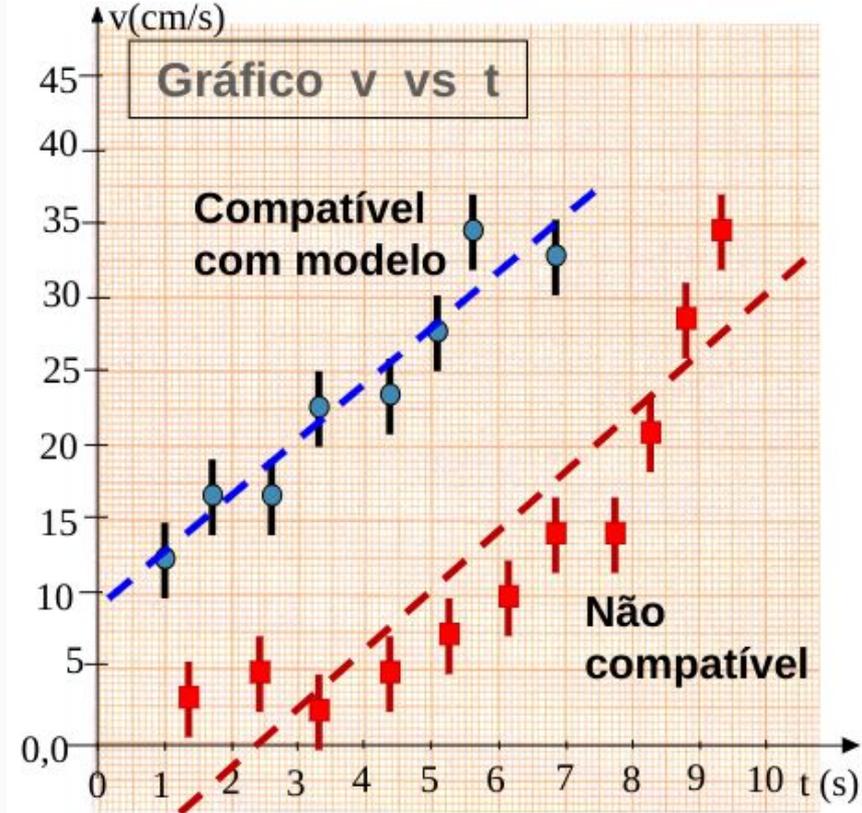
Ajuste de função

- Dados seguem um comportamento aparentemente **linear**
- Escolha de um modelo:
$$Y = A + B X$$
- Neste exemplo:
$$v(t) = A + B t$$
- Ajustar uma reta média entre os pontos experimentais
- Critério: distribuir pontos igualmente entre os dois lados da reta



Compatibilidade com modelo

- Verificar **SEMPRE** se o modelo escolhido (reta média) realmente descreve adequadamente a tendência dos dados experimentais
- Pontos **vermelhos** – reta claramente **NÃO** representa a tendência dos dados, apesar da distribuição igualitária dos pontos ao redor da reta



Análise Gráfica - ajuste de reta

- Modelo linear:

$$Y = A + B X$$

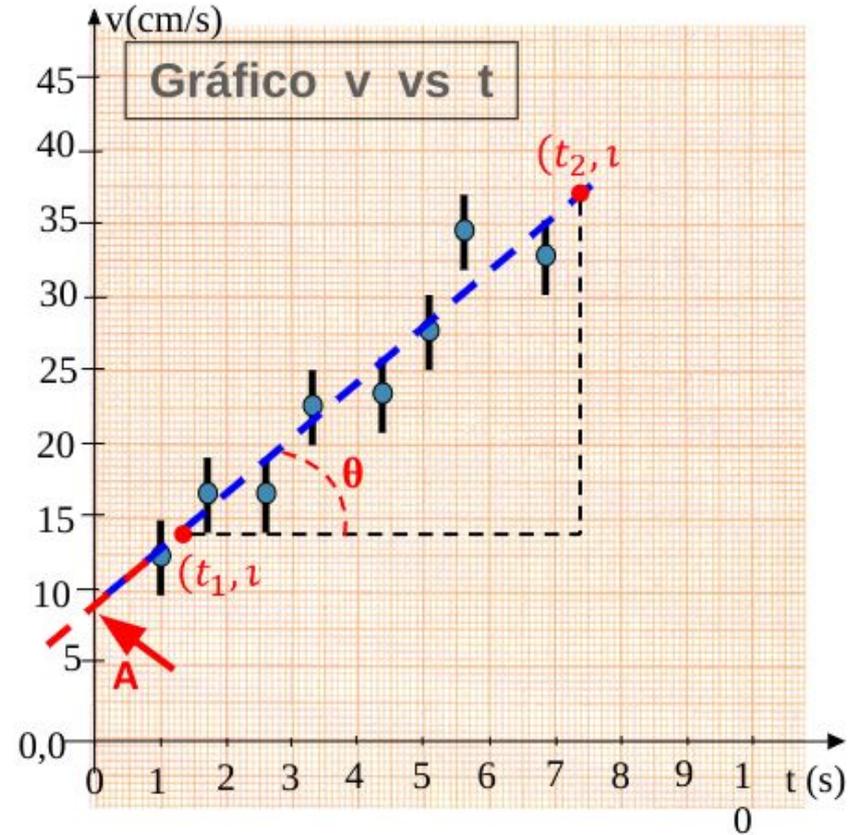
- Determinação dos coeficientes angular (A) e linear (B):

- Coeficiente linear A: ponto em y que a reta cruza o eixo vertical ($x=0$)

- Coeficiente angular B:

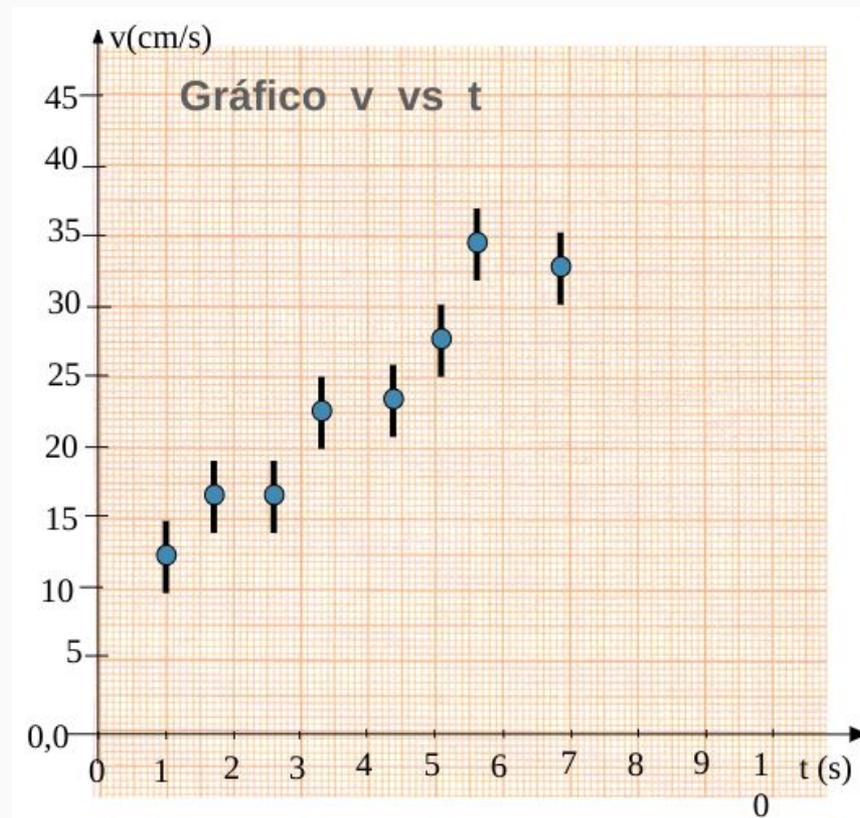
- Escolher pontos distantes sobre a reta, que **NÃO** sejam pontos experimentais

$$B = \tan \theta = \left. \frac{\Delta Y}{\Delta X} \right|_{\text{reta}} = \left. \frac{\Delta v}{\Delta t} \right|_{\text{reta}} \\ = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$



Análise Gráfica - incertezas

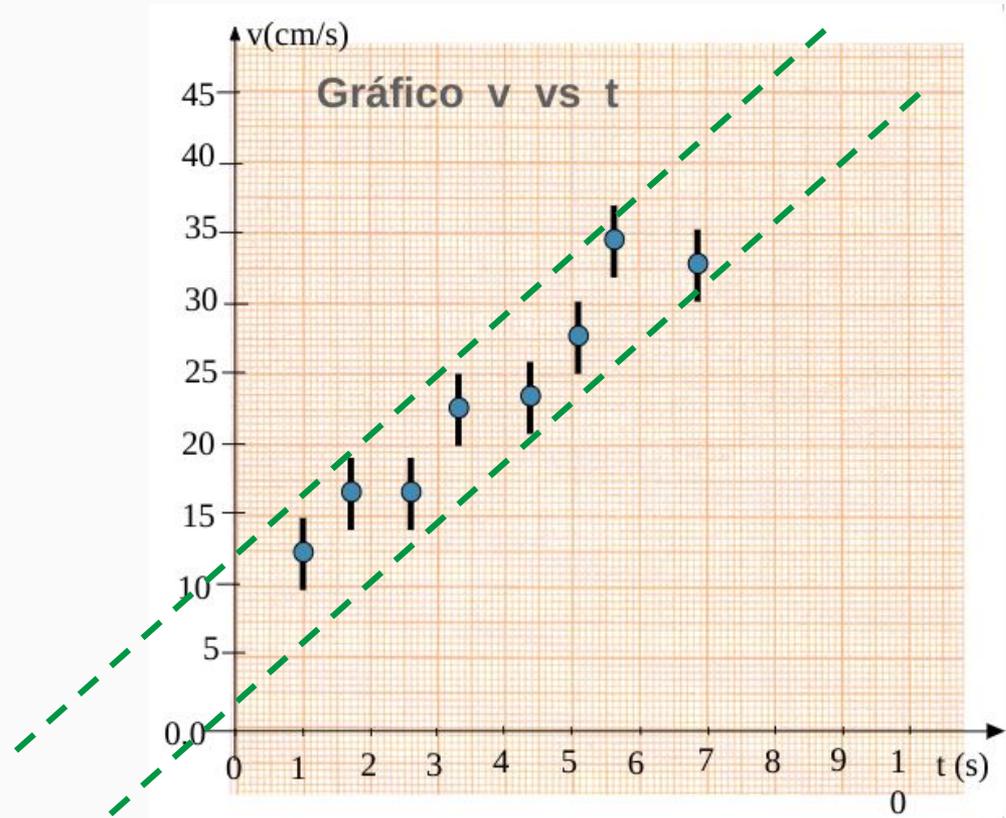
- A incerteza de **A** e **B** também é obtida graficamente:



Análise Gráfica - incertezas

- A incerteza de **A** e **B** também é obtida graficamente:

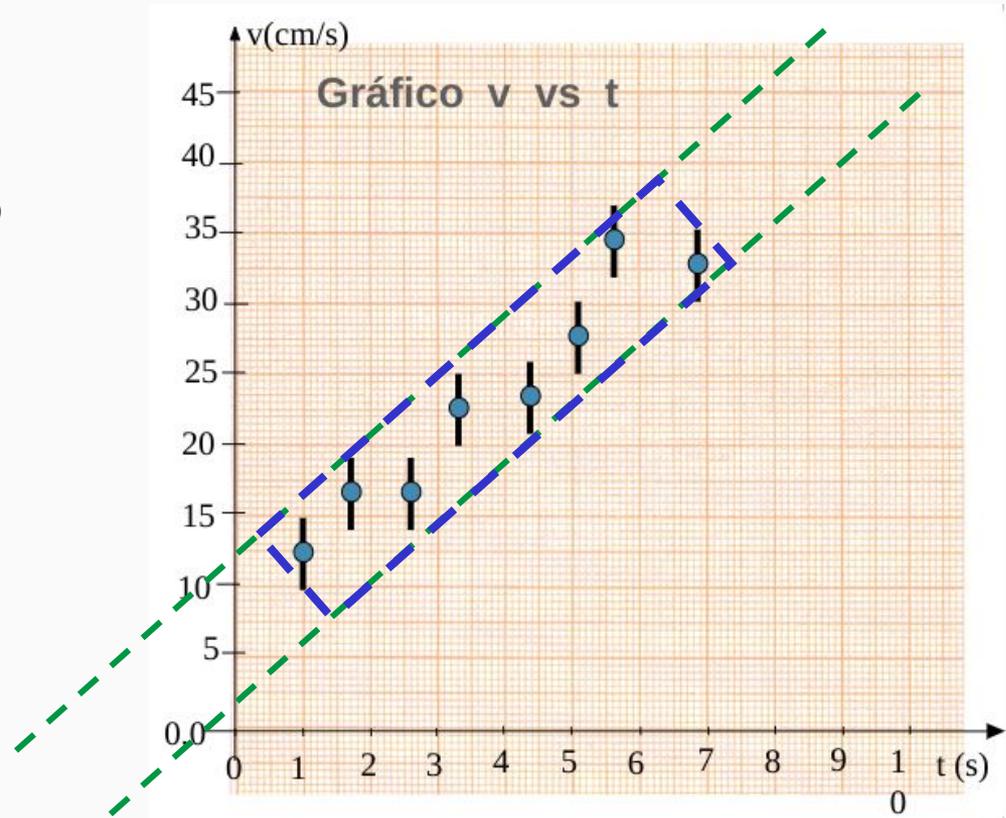
1) Determinar a região da incerteza dos pontos.



Análise Gráfica - incertezas

- A incerteza de **A** e **B** também é obtida graficamente:

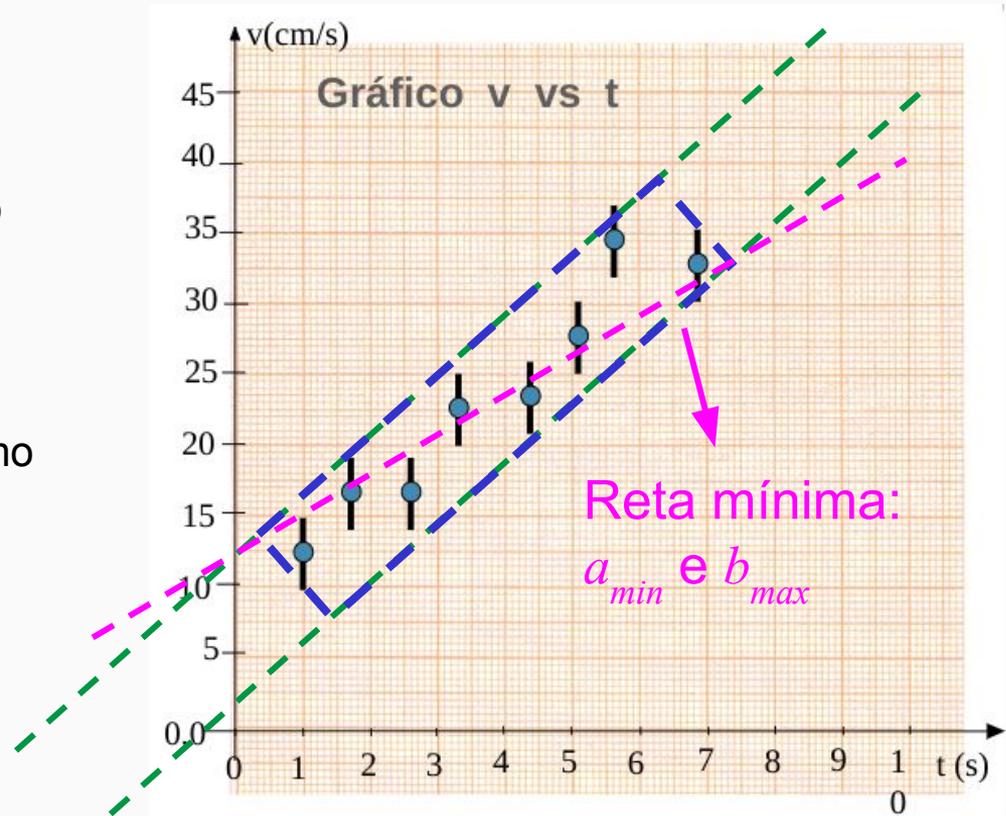
1) Determinar a região da incerteza dos pontos. Traçar o menor retângulo possível.



Análise Gráfica - incertezas

- A incerteza de **A** e **B** também é obtida graficamente:

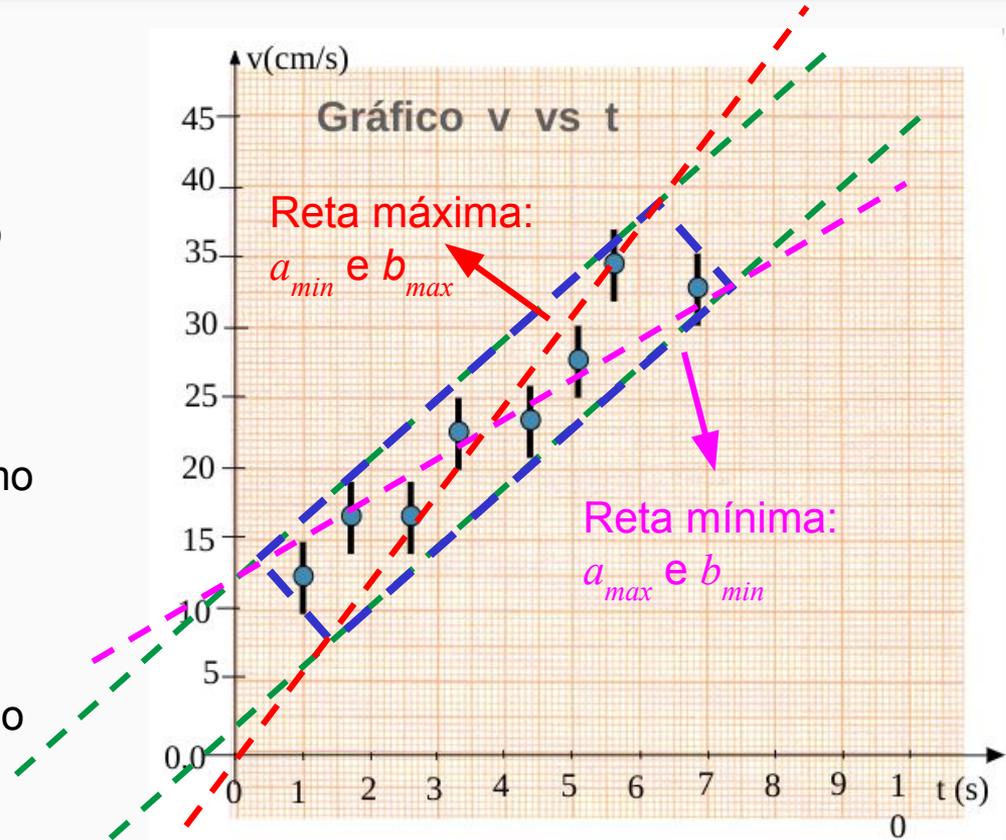
- 1) Determinar a **região da incerteza dos pontos**. Traçar o **menor retângulo possível**.
- 2) Estimar a **reta de menor inclinação possível** que ainda descrevem os pontos, o que determina os parâmetros máximo a_{min} e mínimo b_{max} ;



Análise Gráfica - incertezas

- A incerteza de **A** e **B** também é obtida graficamente:

- 1) Determinar a **região da incerteza dos pontos**. Traçar o **menor retângulo possível**.
- 2) Estimar a **reta de menor inclinação possível** que ainda descrevem os pontos, o que determina os parâmetros máximo a_{max} e mínimo b_{min} ;
- 3) Estimando a **reta de maior inclinação possível** que ainda descrevem os pontos, o que determina os parâmetros mínimo a_{min} e máximo b_{max} ;



Análise Gráfica - incertezas

- As incertezas do coeficiente linear A e do coeficiente angular B são dadas por:

$$\sigma_A = \frac{A_{\text{máximo}} - A_{\text{mínimo}}}{2}$$

$$\sigma_B = \frac{B_{\text{máximo}} - B_{\text{mínimo}}}{2}$$

- Uma vez com as incertezas calculadas, podemos avaliar se o resultado está de acordo com o modelo proposto, isto é, se os valores dos parâmetros A e B são compatíveis com os valores esperados segundo o modelo.

Reta Média

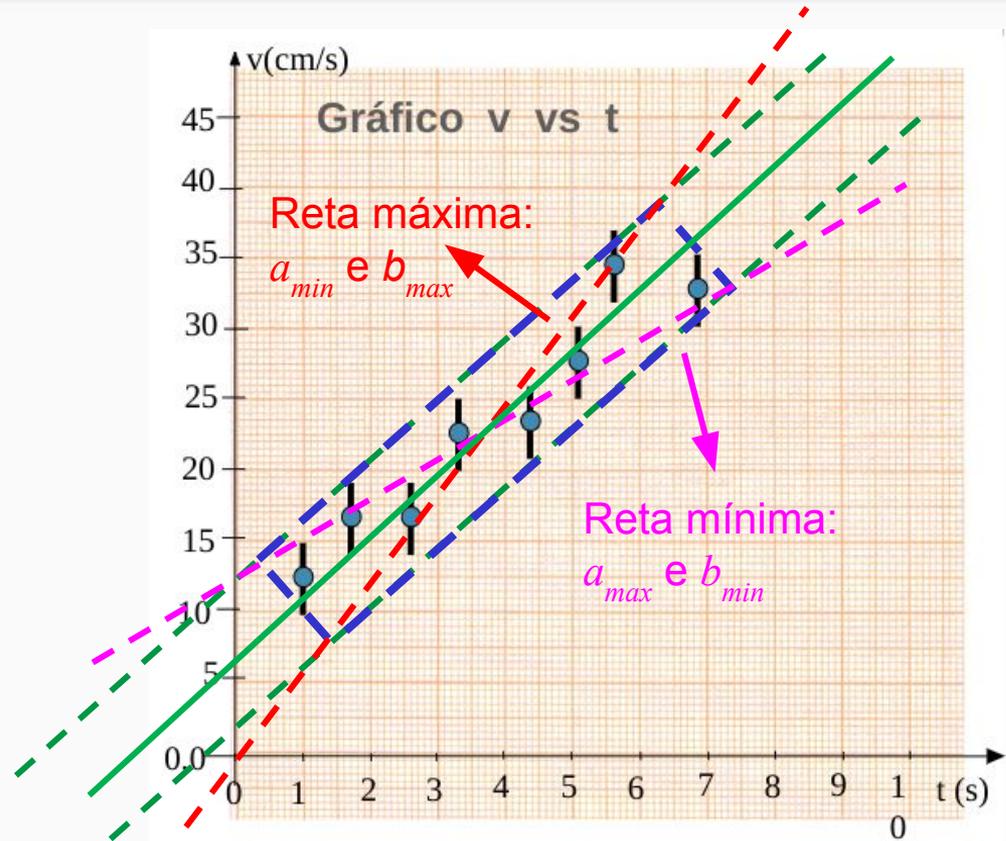
- Valores de a e b para a reta média

Retângulo

- Menor possível
- Inclui as incertezas

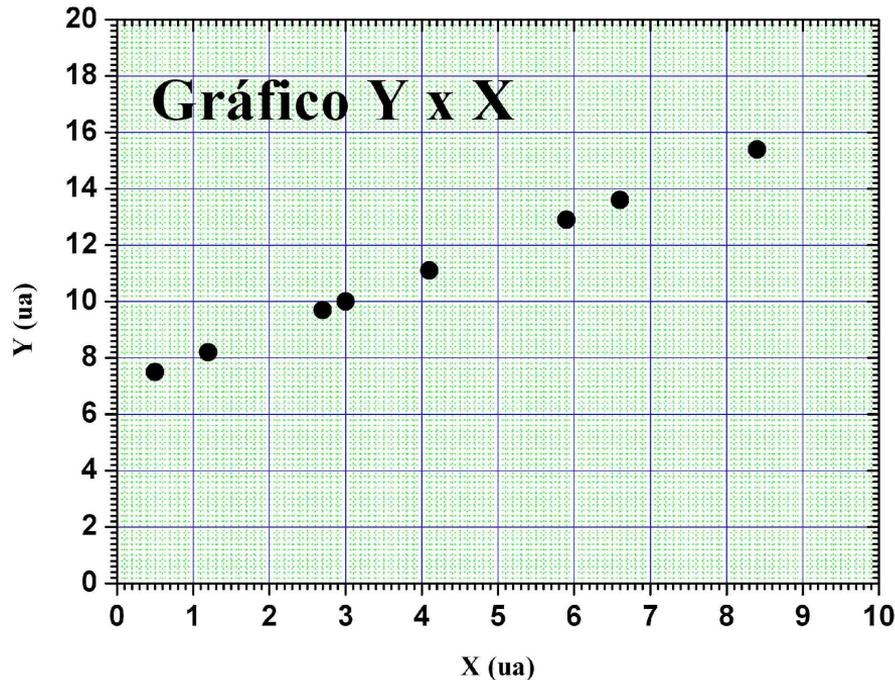
Retas máxima e mínima

- Avaliar a e b para cada reta diagonal



Análise Gráfica - incertezas

- Para incertezas pequenas e pontos bem alinhados:
 - Usar **precisão da leitura** no gráfico, se não for possível traçar um retângulo.



No exemplo:
 $\frac{1}{2}$ da menor divisão da escala.

Escala em x - $\sigma_x = 0,05$ ua

Escala em y - $\sigma_y = 0,1$ ua

Exercícios em aula

- Posicione na figura abaixo, o terceiro ponto da tabela. Para realizar esse posicionamento, primeiro você terá que calcular o valor da escala.

Medidas de tempo (s)				
2,3	4,56	8,294	11,1	3,2



2,0

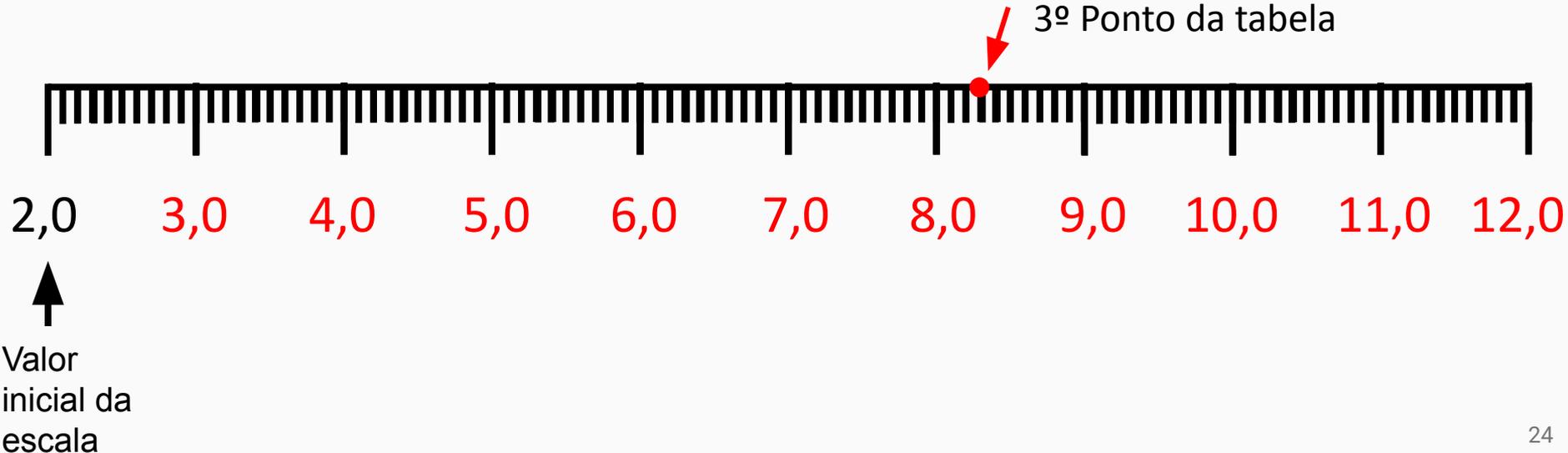


Valor
inicial da
escala

Exercícios em aula

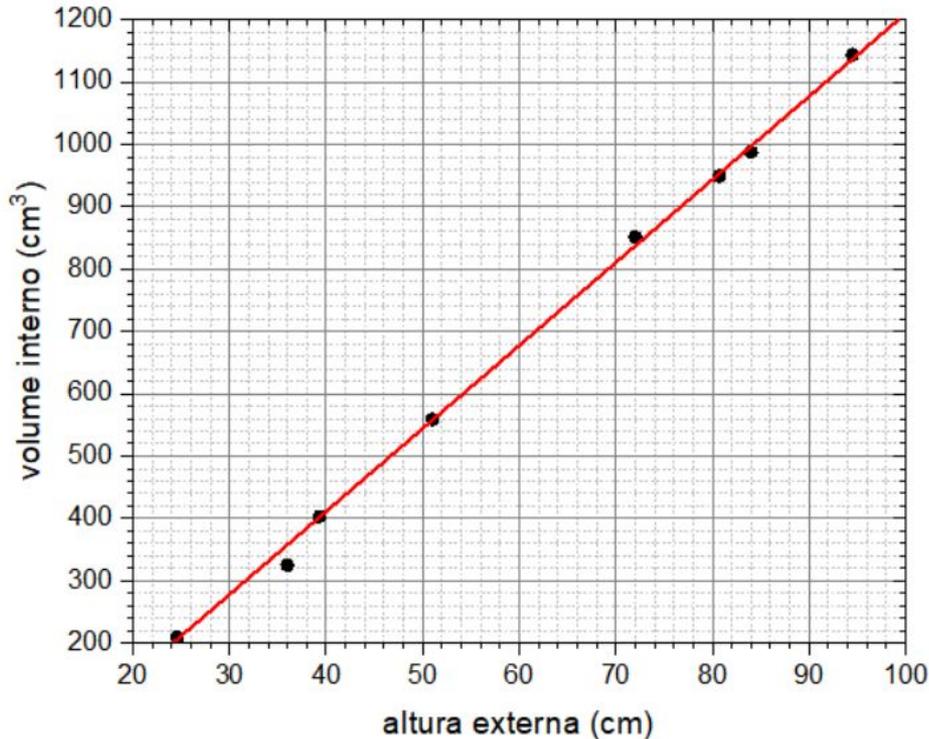
- Posicione na figura abaixo, o terceiro ponto da tabela. Para realizar esse posicionamento, primeiro você terá que calcular o valor da escala.

Medidas de tempo (s)				
2,3	4,56	8,294	11,1	3,2



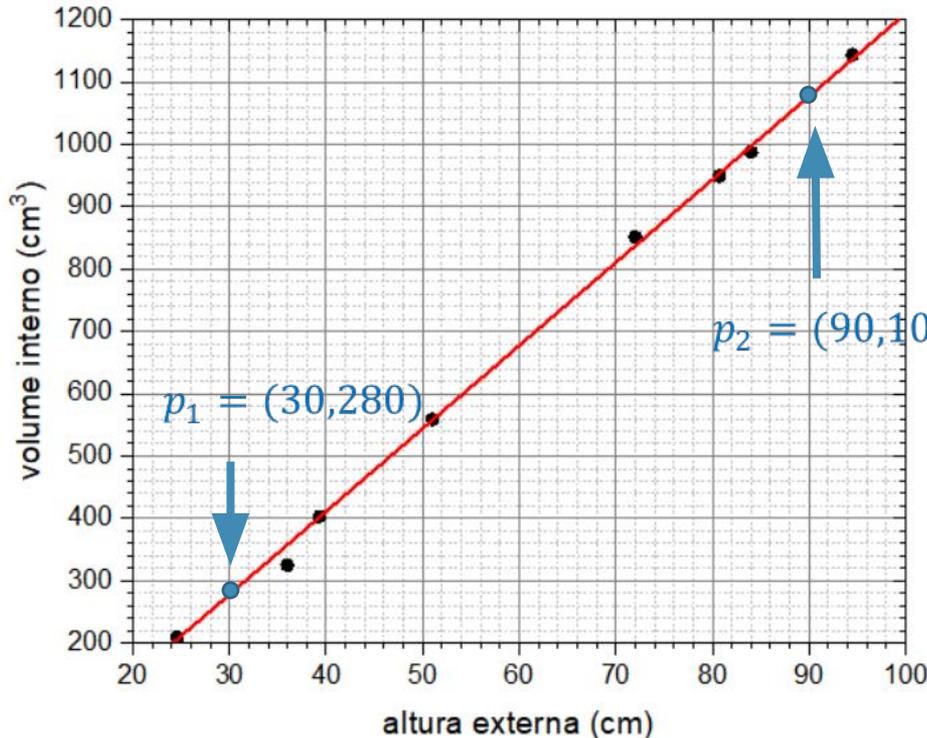
Exercícios em aula

- O volume interno de diversos cilindros e sua altura externa foram medidos para um conjunto de cilindros produzidos a partir de um mesmo tubo. Este gráfico mostra a variação dessas duas grandezas. Obtenha o coeficiente angular da reta vermelha do gráfico



Exercícios em aula

- O volume interno de diversos cilindros e sua altura externa foram medidos para um conjunto de cilindros produzidos a partir de um mesmo tubo. Este gráfico mostra a variação dessas duas grandezas. Obtenha o coeficiente angular da reta vermelha do gráfico



Escolher dois pontos na
reta vermelha afastados
um do outro

$$B = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$B = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{1080 - 280}{90 - 30}$$

$$B = 13,3 \text{ cm}^2$$

Estudo do Movimento de Queda de um Objeto



- **Quais são as características desse movimento?**

- - Questões históricas (**Aristóteles** × **Galileu**)
- - O papel da experimentação na Física (método científico)
- - Apolo 15 – homenagem a Galileu (pena e martelo, sem ar) -
<https://www.youtube.com/watch?v=Zo9jlzAssA>

- **O movimento corresponde a uma queda livre? Como verificar isso?**

- - Eleger um **Modelo experimental** próximo ao teórico (evitar resistência do ar; evitar velocidades muito elevadas: atrito (resistência) cresce com a velocidade)
- - Obter o **registro temporal da queda** e não somente o tempo de queda.

<https://www.youtube.com/watch?v=qSeW0f51QzY>

Experimento de hoje: Estudo do Movimento de Queda de um Objeto

- Hipótese sobre o movimento de um corpo em queda livre:

- Um corpo em queda está sob a influência de uma força constante, a força da gravidade, portanto se movimenta com uma aceleração constante:

$$\vec{F} = m\vec{g} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

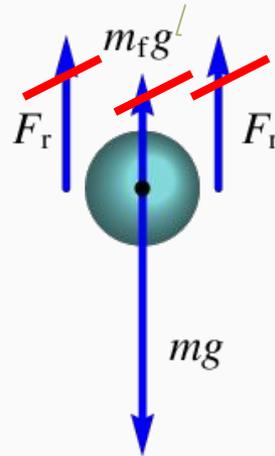
- O que leva às equações para velocidade e posição:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g} \cdot t$$

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{\vec{g}}{2} \cdot t^2$$

resistência
do fluido

empuxo
do fluido

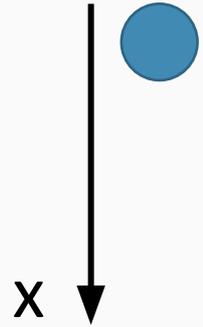


Hipótese sobre o movimento de queda livre

- Observando o movimento na direção vertical (eixo-x orientado para baixo) pode-se abandonar a notação vetorial:

$$v(t) = v_0 + g \cdot t$$

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{g}{2} \cdot t^2$$

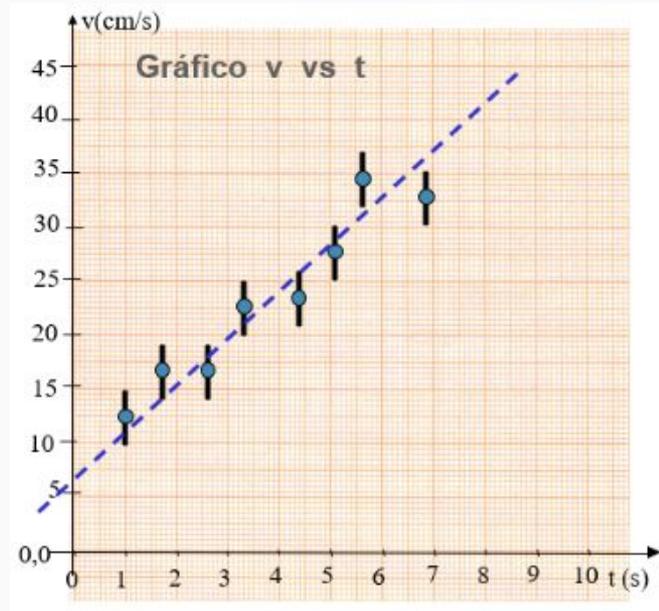


- **corolário**: a velocidade média num intervalo de tempo coincide com a velocidade instantânea no centro do intervalo de tempo:

$$\bar{v}(t_1, t_2) = v\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)$$

Como podemos verificar esse modelo?

- Estudando o movimento de queda de um objeto:
 - Medidas de posição em função do tempo
 - Verificando se a velocidade $v(t)$ apresenta uma dependência linear com o tempo t , isto é, $v(t) = v_0 + gt$, através do gráfico v vs t :



Atividade prática

Procedimento Experimental

- Medir o movimento de queda de um objeto usando:
 - um corpo em forma oval com um anel condutor a sua volta;
 - um trilho com dois fios condutores;
 - um eletroímã que segura o corpo no topo do trilho;
 - um faiscador que gera faíscas entre o anel condutor do corpo em queda e os fios do trilho a cada **$1/60$ segundos** (frequência da rede elétrica);
 - uma fita que permite registrar as faíscas.

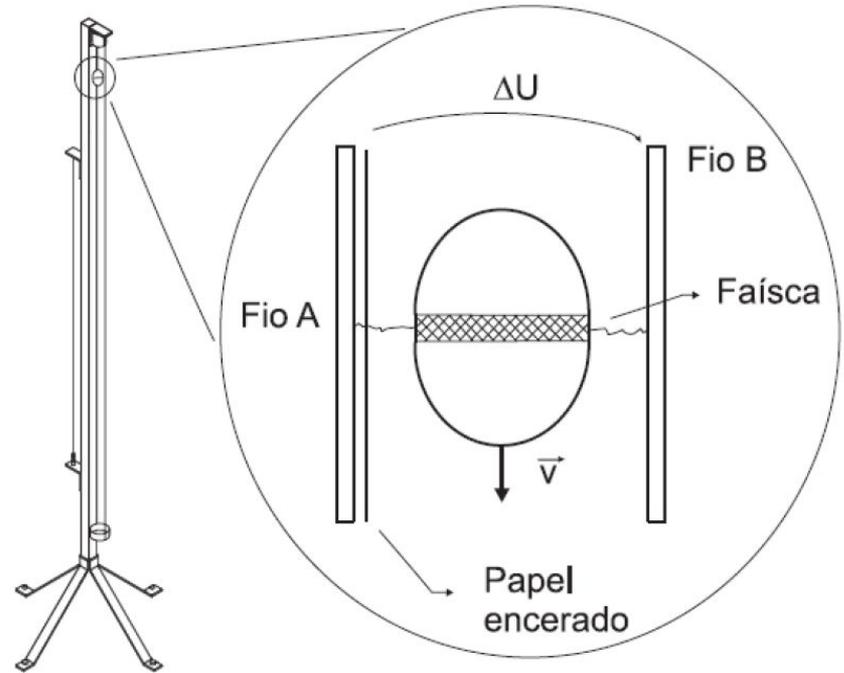


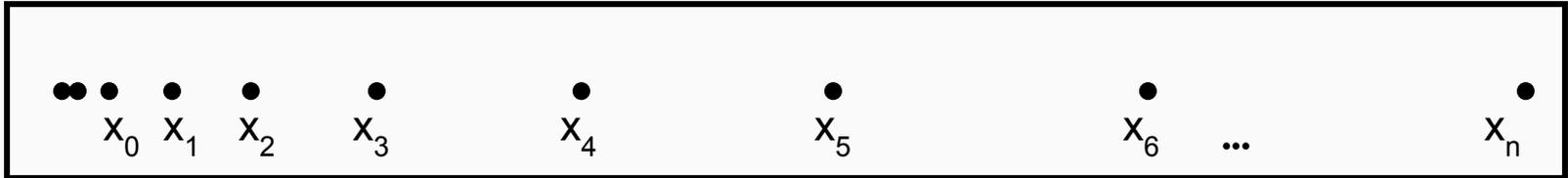
Figura 5.1: equipamento utilizado para o estudo da queda do corpo. As faíscas provocadas pelos pulsos de alta tensão entre os dois fios marcam um papel encerado.

Cuidados durante as medidas

- Alinhar o trilho na vertical (usar o fio de prumo);
- Colar bem a fita na lateral do trilho, com seu lado mais brilhante para fora;
- Verificar imediatamente após a medida, se os pontos foram marcados na fita (na frente ou no verso...)
- **MUITO CUIDADO** com choques elétricos (**só ligar a fonte quando for soltar o corpo em estudo**)
- **DESLIGAR** o fuscador após a medida!!!

Resultado do Experimento

- Que dados obtivemos?
 - Posição em função do tempo.

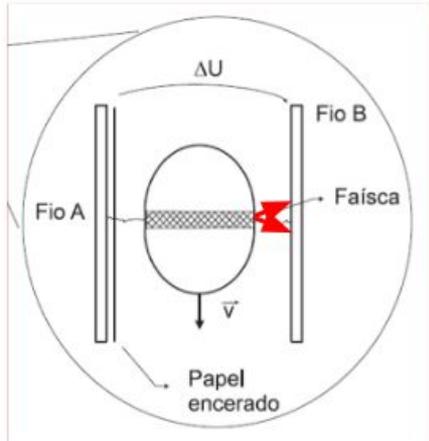


Incertezas na posição

- **Não há garantia** que a faísca que marcou a fita saiu exatamente na perpendicular



imprecisão na posição do corpo em queda.



Incerteza na posição – metade do diâmetro da mancha

Análise de dados – Comparação com o modelo

- Modelo de queda livre: $v(t) = v_0 + g \cdot t$
- Dados: $x(t)$
- Comparação:
 - Precisamos obter a **velocidade instantânea em função do tempo $v(t)$**

Como podemos calcular a velocidade do objeto em cada instante (t_n)?

- A velocidade média entre dois pontos é dada por:

$$v_{\text{média}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

Δx é a distância entre esses dois pontos

Δt é o intervalo de tempo que o objeto levou para ir do primeiro para o segundo ponto

- A velocidade instantânea para um corpo que se move a aceleração constante é dada por:

$$v_i(t') = v_{\text{média}} \quad t' = (t_i + t_f)/2 = t_{\text{medio}}$$

- Portanto, precisamos obter da fita marcada:

- $\Delta X = X_{n+1} - X_{n-1}$

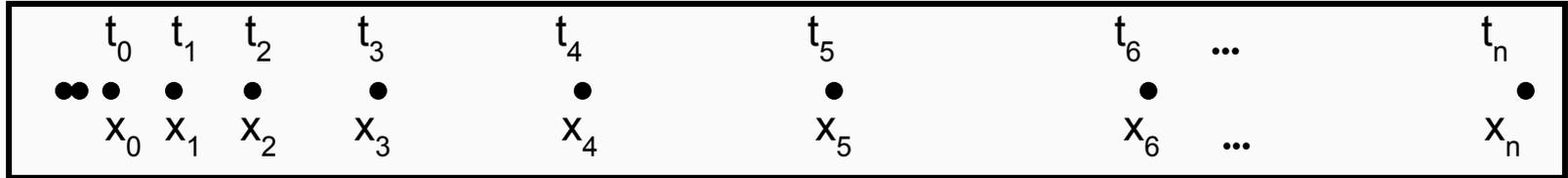
- $t_{\text{médio}} = \frac{t_{n+1} + t_{n-1}}{2}$

- que leva a:

$$v_{\text{médio}} = \frac{\Delta X}{\Delta t} \quad \text{no instante } t_{\text{médio}}$$

Análise dos dados: Tempo

- Dados: Posição em função do tempo.

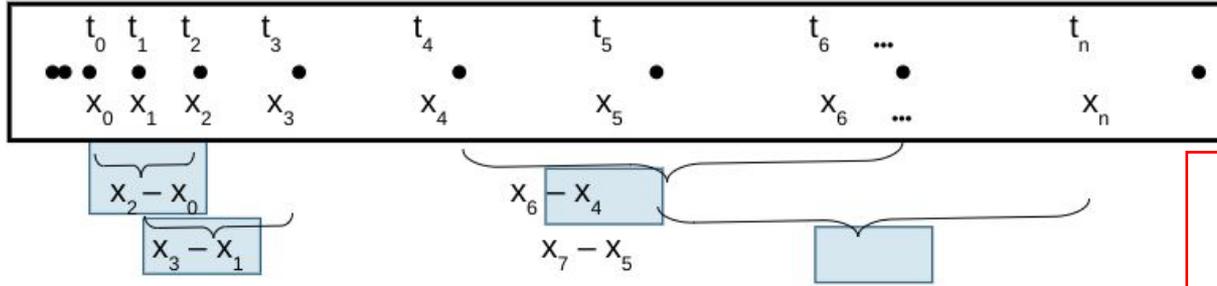


- Como determinar o tempo (ou instante) de cada posição?
 - Escolher $t=0$ e usar a frequência da rede ($1/60$ s).
- Vamos trabalhar com o tempo em unidades de $1/60$ s.

$$1 \text{ ut} = \frac{1}{60} \text{ s}$$

- Conversão para segundos **SÓ NO FINAL** de toda a análise!
 - Isso **EVITA CÁLCULOS DESNECESSÁRIOS** e **EVITA ERROS**

Análise de dados: ΔX



- Construir a tabela:

Tabela 1: Medidas das posições do corpo em função do tempo e medidas das distâncias percorridas em intervalos ΔT .

Medidas		Aluno 1		Aluno 2		Aluno 3	
Tempo (1/60 s)	Posição (cm)	pontos usados	$\Delta T=(1/60 \text{ s})$ Distância (cm)	pontos usados	$\Delta T=(2/60 \text{ s})$ Distância (cm)	pontos usados	$\Delta T=(1/60 \text{ s})$ Distância (cm)
0		0 - 1					
1				0 - 2		1 - 2	
2		2 - 3		1 - 3			
3						3 - 4	
4		4 - 5					
5				4 - 6		5 - 6	
6		6 - 7		5 - 7			

Cada ponto usado
uma só vez para
EVITAR CORRELAÇÃO !

Análise de dados

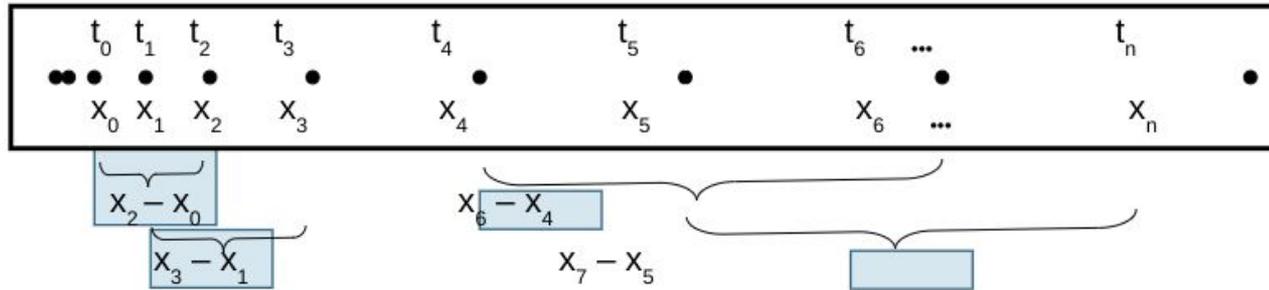


Tabela 2. Velocidade do elipsoide em função do tempo, para cada aluno

Aluno 1		Aluno 2		Aluno 3	
Tempo t (ut)	Velocidade (cm/ut)	Tempo t (ut)	Velocidade (cm/ut)	Tempo t (ut)	Velocidade (cm/ut)

Análise de dados - incertezas

- Devemos considerar uma incerteza em $t_{\text{médio}}$?
- Qual é a incerteza no intervalo de tempo $\Delta t = t_f - t_i$?
 - Propagação incerteza do tempo
- Qual é a incerteza em $\Delta x = X_f - X_i$?
 - Propagação incerteza da posição

- Qual é a incerteza na velocidade $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$?

- Propagação Δx e Δt

$$\frac{\sigma_v}{v} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\Delta x}}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta t}}{\Delta t}\right)^2} = \frac{\sigma_{\Delta x}}{\Delta x}$$

Valor frequência muito precisa

Propagação de incertezas

$$V = \frac{\Delta X}{\Delta t}$$

$$\frac{\sigma V}{V} = \sqrt{\left(\frac{\sigma \Delta X}{\Delta X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma \Delta t}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma \Delta X}{\Delta X}\right)^2}$$

Valor frequência muito precisa

Distância

$$\Delta X = X_f - X_i$$

$$\sigma \Delta X = \sqrt{(\sigma X_f)^2 + (\sigma X_i)^2} = \sigma X \sqrt{2}$$

Intervalo de tempo

$$\Delta t = t_f - t_i$$

$$\sigma \Delta t = \sqrt{(\sigma t_f)^2 + (\sigma t_i)^2} = \sigma t \sqrt{2}$$

Velocidade final

$$\sigma V = \frac{\sigma \Delta X}{\Delta X} V = \frac{\sigma \Delta X}{\Delta X} \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{\sigma \Delta X}{\Delta t}$$

Atividades do guia 4-1

- Obter os dados de deslocamento da fita. Colocar os valores das medidas no guia e na planilha online:
 - link da planilha:
https://drive.google.com/drive/folders/1KJwxSm-eWm0AoQBpjGQO2BpfPpwsc0Ng?usp=share_link
- Construir a tabela de velocidade em função do tempo. Não esquecer as incertezas
- Fazer o gráfico de velocidade em função do tempo (Cada aluno faz o seu gráfico com seus dados!)
- Avaliar g e v_0
- Comparar com valores esperados

- O parâmetro a (v_0) é coerente com um movimento que se iniciou no repouso? Quantas faíscas você desprezou para iniciar a escala de tempo ($t=0$)? Como avaliar se v_0 está dentro do esperado?
- E b é compatível com o valor da aceleração da gravidade? O IAG obteve o valor de $978,622 \text{ cm/s}^2$ para a aceleração da gravidade fazendo uma medida bastante precisa.

Para a próxima aula (12/05):

- Entrega do Guia 4.1 (**um por grupo**)
- No moodle (aba Experimento # 4- Queda livre):
 - Exercício **casa 4.1 - Sexta de manhã** (até dia 12/05).
- Dúvidas para P1

Gisell Ruiz Boiset

gisell@if.usp.br

Bloco F – Conjunto
Alessandro Volta – sl. 209

