

Introdução às Medidas em Física

(Turma 43)

Aula 05 28/04/2023

Gisell Ruiz Boiset

gisell@if.usp.br

Bloco F – Conjunto Alessandro Volta – sl. 209

Material preparado com base no material gentilmente cedido pela Profa Dra. Paula R. P. Allegro

Na aula de hoje

- Resumo dos principais pontos da aula anterior
- Conceitos:
 - Medidas indiretas
 - Noções de estatística:
 - Propagação de Incertezas
 - Compatibilidade entre medidas
 - Média Ponderada
- Experiência 3: Medida da distância focal de uma lente

Referências para a aula de hoje:

- Apostila do curso (página principal do moodle):
 - Capítulo 3: Instrumentos de Medidas
 - Experiência III (Aula 05) Distância Focal De Uma Lente.

- Texto: Experimento 3 - propagação de incerteza (aba Material Didático / arquivos 2022)
 - Derivadas_quinta_tarde_Mariana.pdf

Das aulas anteriores: tipo de incertezas

- Tipos de incerteza que influenciam uma medida:
 - Instrumental
 - precisão do instrumento utilizado para realizar a medida direta de uma grandeza
 - dificuldade de realizar essa medida
 - Estatística
 - flutuação no resultado de uma mesma medida.
 - Cálculo de média, desvio padrão e desvio padrão da média
 - Sistemática
 - Aquela onde a medida é desviada em uma única direção, tornando os resultados viciados.
 - Devem ser corrigidas ou refeitas

Qual é a incerteza total de uma medida?

- Incertezas resultantes do ato de medir:
 - Instrumental: σ_{inst}
 - Estatística: σ_{estat}
- Incerteza total da medida (σ): **combinação de todas as incertezas**

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{inst}^2 + \sigma_{estat}^2}$$

σ_{inst}

- Instrumentos analógicos (ex. régua): é a metade da menor divisão
- Instrumentos digitais (ex: multímetro): 1 unidade na escala do último dígito disponível

σ_{estat}

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Da aula anterior: propagação de incerteza

- Para medidas indiretas:

- Calcular a influência da incerteza da medida primária para a grandeza calculada

Medida: $x \pm \sigma_x$

Grandeza calculada:

$$w = w(x) \pm \sigma_w = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x} \sigma_x\right)^2}$$

- Se a função $f(x, y, z, t, \dots)$ calculada depende de várias variáveis:

$x \pm s_x$; $y \pm s_y$; $z \pm s_z$; $t \pm s_t$;

$$\sigma_w = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x} \sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \sigma_y\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \sigma_z\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \sigma_t\right)^2 + \dots}$$

Propagação de incerteza

- Caso especial (multiplicação e divisão):

$$f(x, y, z, t) = K \frac{x^a}{y^b} \sqrt{\frac{z^c}{t^d}}$$

- Pode ser mais facilmente obtida pela incerteza relativa:

Incerteza absoluta


$$\frac{\sigma f}{f}$$

$$= \sqrt{\left(a \frac{\sigma x}{x}\right)^2 + \left(-b \frac{\sigma y}{y}\right)^2 + \left(\frac{c}{2} \frac{\sigma z}{z}\right)^2 + \left(-\frac{d}{2} \frac{\sigma t}{t}\right)^2}$$

Incerteza relativa

Propagação de incerteza - Exemplo...

$$d = \frac{m}{V} = \frac{4m}{\pi D^2 h}$$

$$D = 4,890 \pm 0,005 \text{ cm}$$

$$h = 1,850 \pm 0,005 \text{ cm}$$

$$m = 38,0443 \pm 0,0001 \text{ g}$$

$$d = 1,09497 \text{ g/cm}^3$$

$$\frac{\sigma_d}{d} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2}$$

$$\frac{\sigma_D}{D} = 0,00102$$

$$\frac{\sigma_h}{h} = 0,00270$$

$$\frac{\sigma_m}{m} = 2,63\text{e-}6$$

$$\frac{\sigma_d}{d} = 0,00339$$

$$\sigma_d = \frac{\sigma_d}{d} d = 0,00339 \times 1,09497 = 0,00371 \text{ g/cm}^3$$

$$d = (1,095 \pm 0,004) \text{ g/cm}^3$$

Dica: conferindo os resultados das derivadas

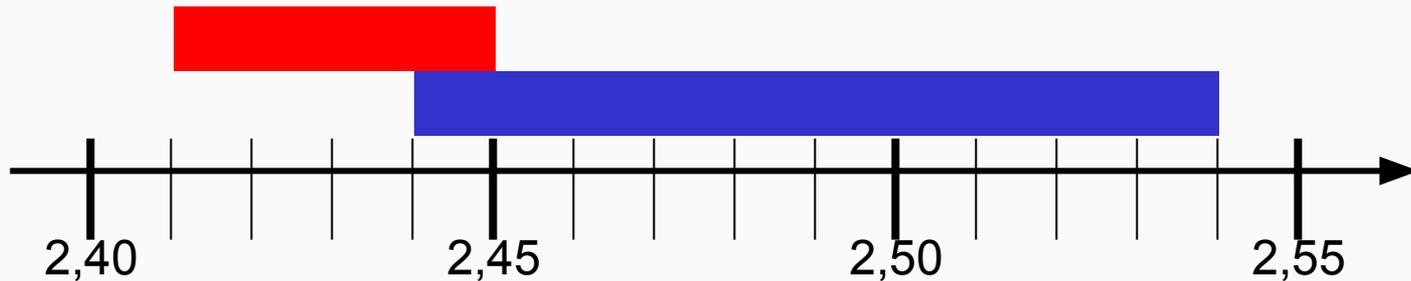


<https://www.wolframalpha.com/>

Como comparar os resultados de duas medidas?

- Levar em consideração sempre a incerteza de medida.
- Ao considerar a incerteza, nos perguntamos se as medidas são **compatíveis** ao invés de “iguais”;

Por exemplo, $2,43 \pm 0,02 \text{ mm}$ é compatível com $2,49 \pm 0,05 \text{ mm}$?



Critério para compatibilidade: teste Z

- Superposição em 1σ = compatíveis
 - Superposição em 2σ ou 3σ
 - Compatíveis com menor probabilidade
- Teste Z indica essa probabilidade
 - Comparação entre $(a \pm \sigma_a)$ e $(b \pm \sigma_b)$

$$Z = \frac{|a - b|}{\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}}$$

$0 < Z \leq 1$, compatíveis ao nível de 1σ

$1 < Z \leq 2$, compatíveis ao nível de 2σ

$2 < Z \leq 3$, compatíveis ao nível de 3σ

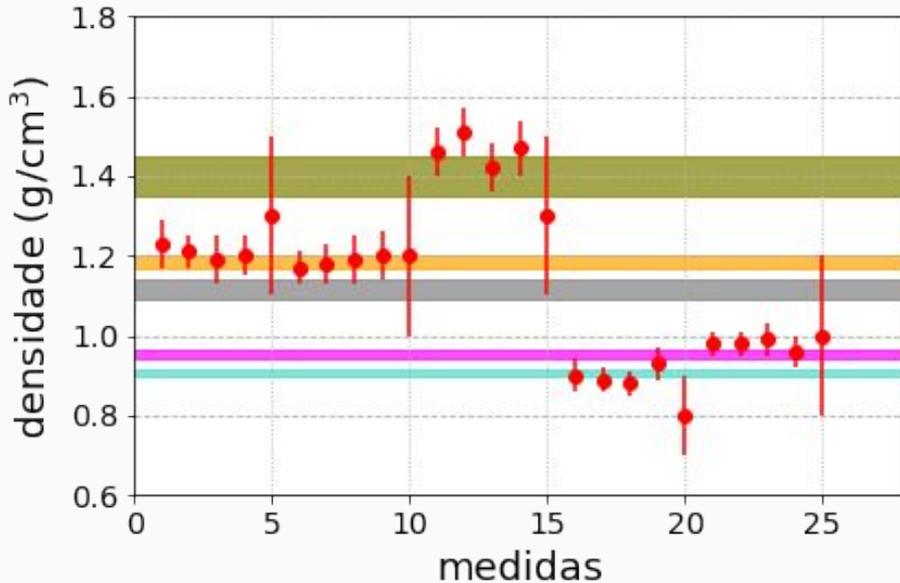
$Z > 3$, discrepantes

Análise dos resultados da aula passada

Quantos tipos de plástico tem na sala?

Dados densidade aula 2

Dados com balança analítica e régua



Dados com balança digital e régua

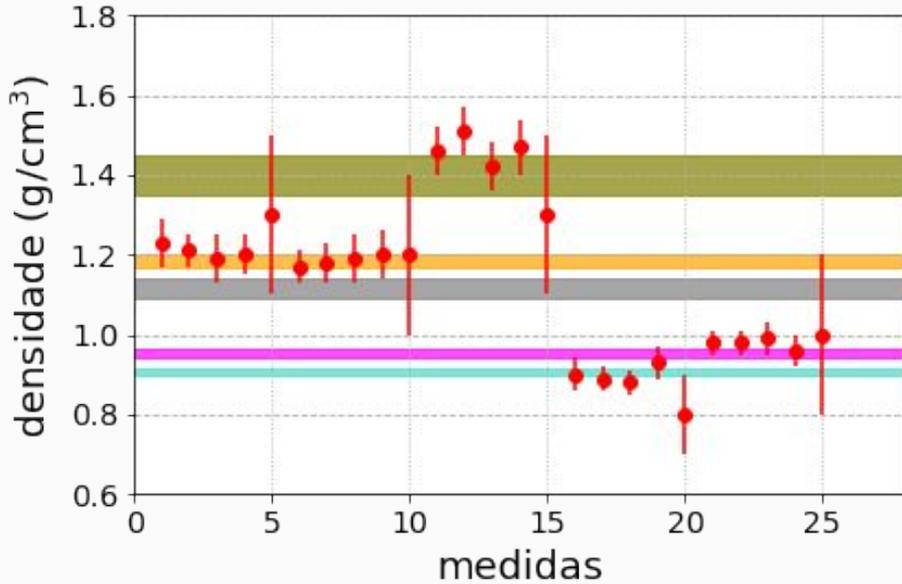
Incet. Rel. m	0,2	0,1	0,3	0,2	5,0
Incet. Rel. D	2,1	1,3	1,2	0,8	2,2
Incet. Rel. h	0,6	1,0	2,4	2,6	13,2

Dados com balança analítica, paquímetro e micrômetro

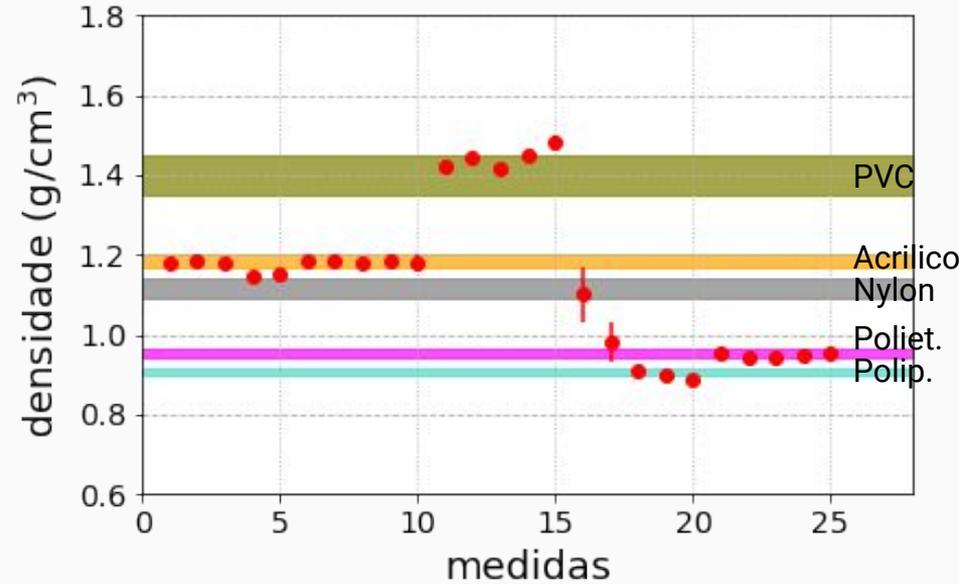
Incet. Rel. m	0,0002	0,0001	0,0003	0,0002	0,0049
Incet. Rel. D	0,3	0,2	0,2	0,3	0,3
Incet. Rel. h	0,8	0,1	0,3	0,4	1,8

Dados densidade aula 2

Dados com balança analítica e régua

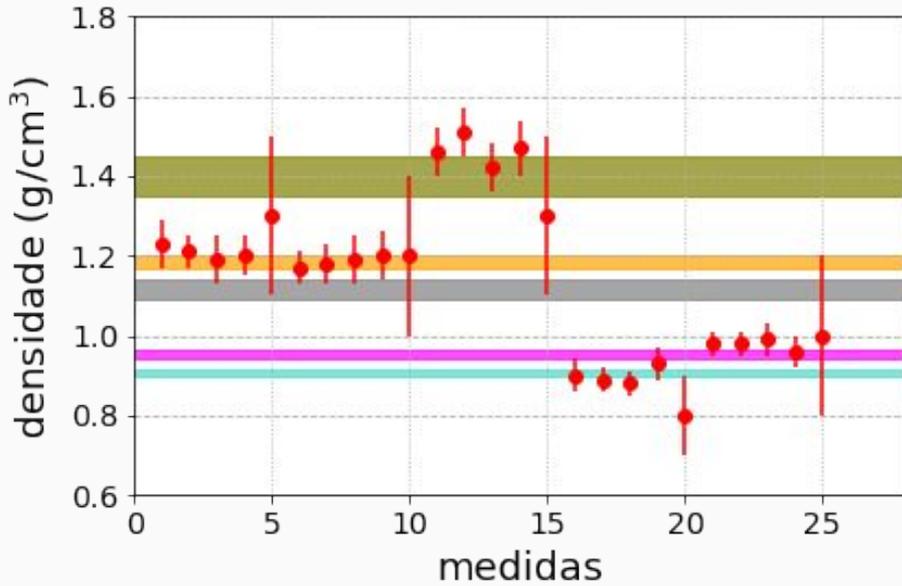


Dados com balança analítica, paquímetro e micrômetro

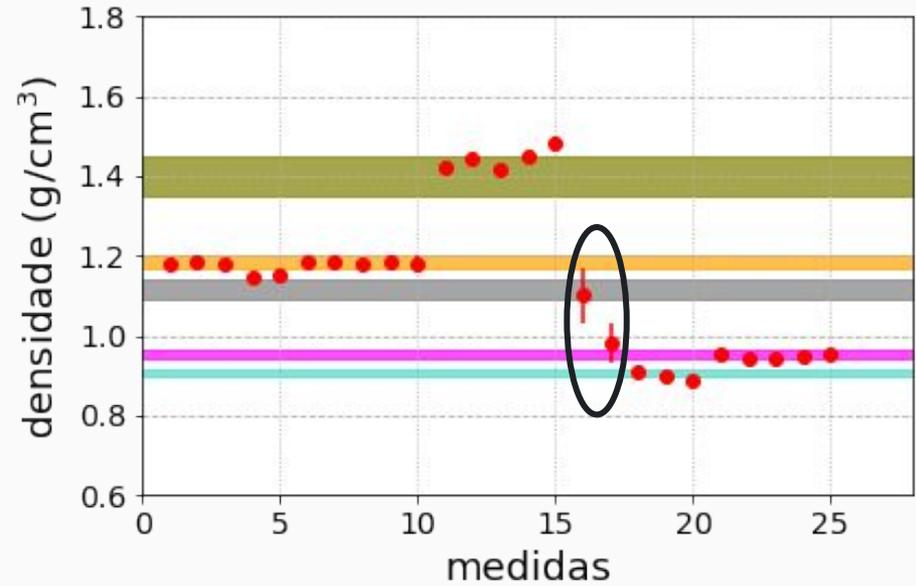


Dados densidade aula 2

Dados com balança analítica e régua



Dados com balança analítica, paquímetro e micrômetro

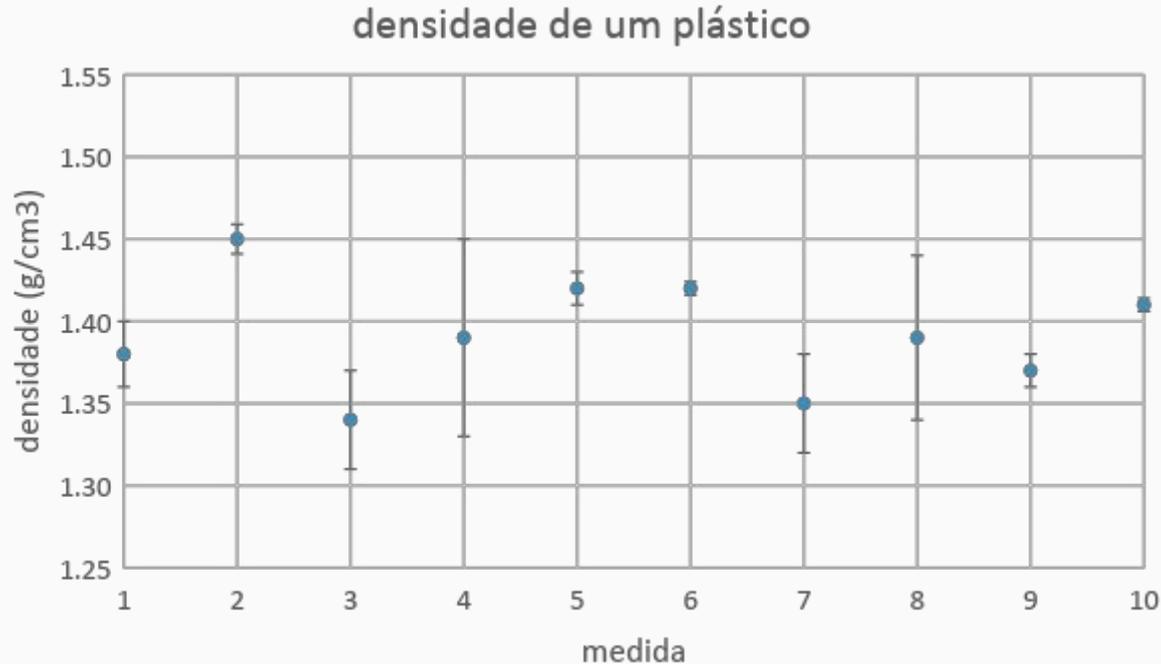


Lentes Delgadas - Objetivos

- Identificar lentes **convergentes** e **divergentes**
- Avaliar a **distância focal** da lente, grosseiramente
- Avaliar a distância focal de uma lente delgada *convergente* através da **relação entre posição de imagem e objeto** (**equação dos pontos conjugados, de Gauss**)
- Determinar a **incerteza da distância focal**
 - ❖ *estimar incertezas nas medidas diretas, levando em conta o **método** de medida e a **estatística***
 - ❖ *propagar incertezas*
 - ❖ *calcular **média ponderada***
- Verificar a **compatibilidade** de resultados

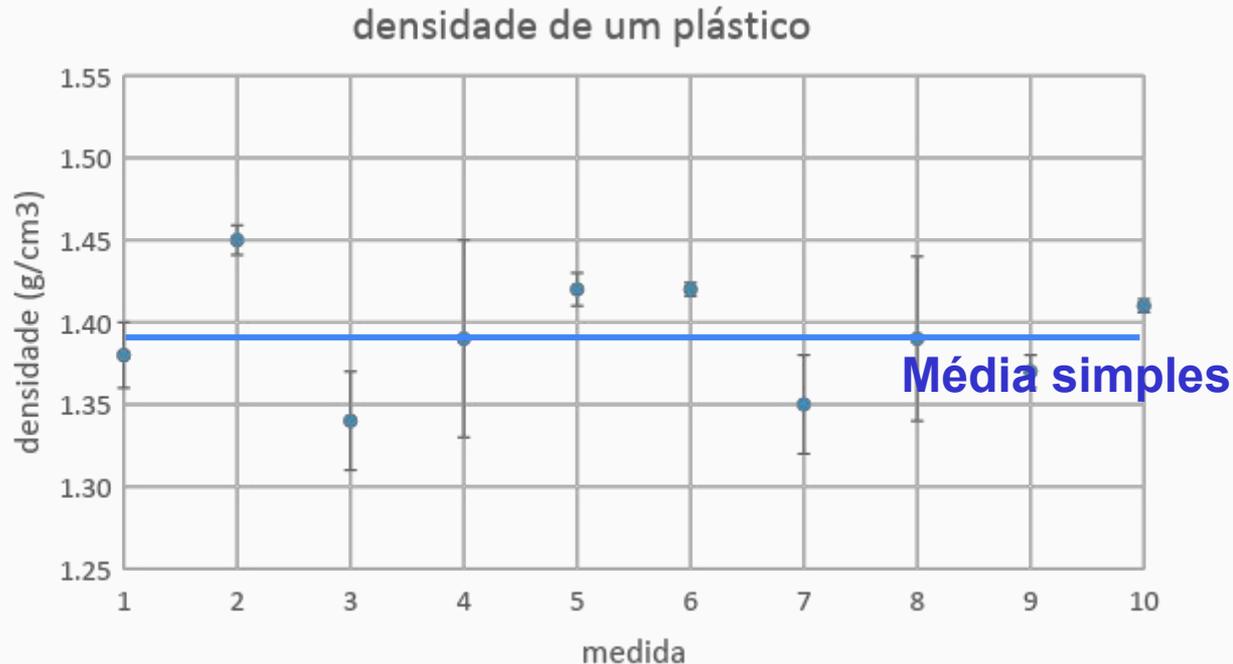
Média ponderada

- Como determinar o valor final de uma série de medidas com incertezas diferentes
 - Leva em conta as incertezas
 - Menor incerteza maior grau de confiabilidade



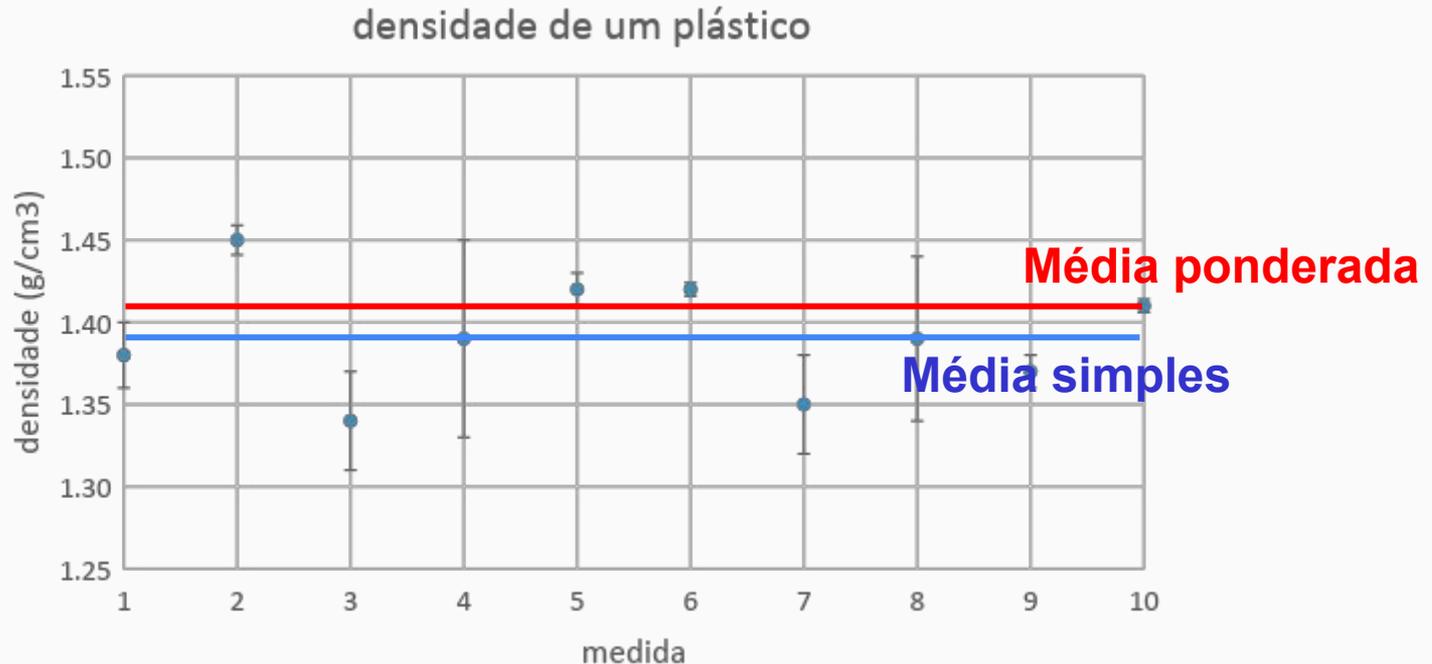
Aula de hoje: Média ponderada

- Como determinar o valor final de uma série de medidas com incertezas diferentes
 - Leva em conta as incertezas
 - Menor incerteza maior grau de confiabilidade



Média ponderada

- Como determinar o valor final de uma série de medidas com incertezas diferentes
 - Leva em conta as incertezas
 - Menor incerteza maior grau de confiabilidade



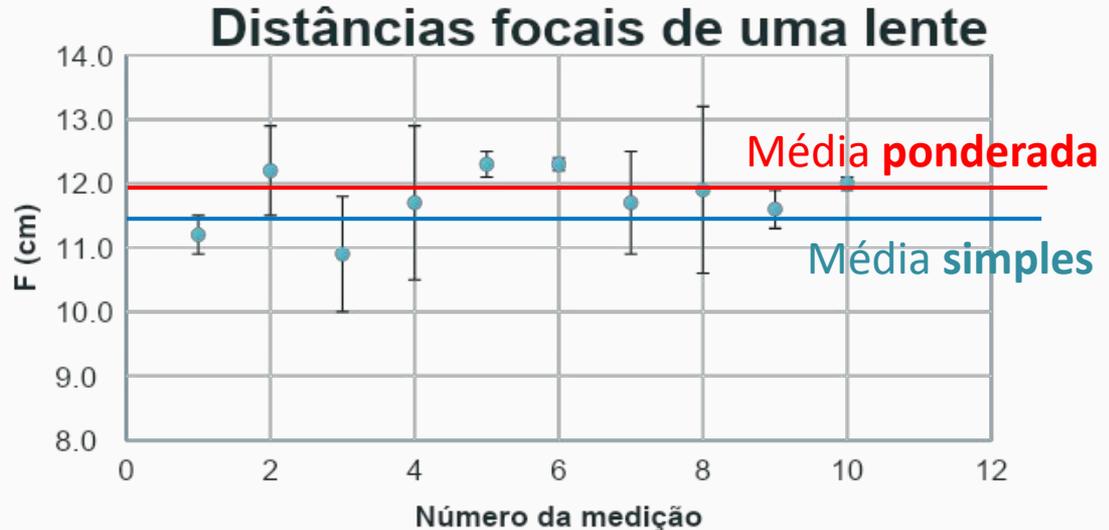
Média ponderada

Problema:

- quando se faz **várias determinações de uma grandeza** (p. exemplo, *distância focal F*) e cada valor tem **incerteza diferente...**

Qual o **valor final**?

Na média ponderada, têm maior peso os valores com menor barra de erro



Média ponderada

$$\bar{f} = \frac{p_1 f_1 + p_2 f_2 + p_3 f_3 + p_4 f_4 + p_5 f_5}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5}$$

$$\bar{f}_{pond} = \frac{\sum p_i f_i}{\sum p_i} \quad \text{onde: } p_i = \frac{1}{\sigma_{f_i}^2}$$

- E a incerteza de \bar{f}_{pond} é dada por:

$$\sigma_{f_{pond}} = \sqrt{\frac{1}{\sum p_i}}$$

Média ponderada e média simples

$$\bar{f}_{pond} = \frac{\sum p_i f_i}{\sum p_i} \quad \text{onde: } p_i = \frac{1}{\sigma_{f_i}^2}$$

- Se todas as incertezas foram iguais:

$$\sigma_{f_i} = \sigma_f \quad \longrightarrow \quad p_i = p = \frac{1}{\sigma_f^2}$$

$$\bar{f}_{pond} = \frac{\sum p_i f_i}{\sum p_i} = \frac{p \sum f_i}{Np} = \frac{\sum f_i}{N} = \bar{f}_{simples}$$

$$\sigma_{f_{pond}} = \sqrt{\frac{1}{\sum p_i}} = \sqrt{\frac{1}{Np}} = \sqrt{\frac{\sigma_f^2}{N}} = \frac{\sigma_f}{\sqrt{N}} = \sigma_{\bar{f}_{simples}}$$

Exercícios em aula

- Foram feitas três medidas com os seguintes resultados:

5,0±0,3 cm

6,0±0,1 cm

4,0±0,2 cm

- Calcule a média ponderada e a incerteza.

Exercícios em aula

- Foram feitas três medidas com os seguintes resultados:

$$5,0 \pm 0,3 \text{ cm}$$

$$6,0 \pm 0,1 \text{ cm}$$

$$4,0 \pm 0,2 \text{ cm}$$

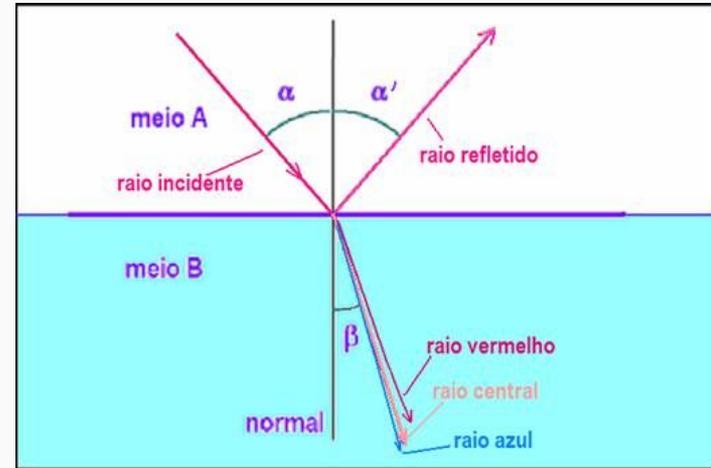
- Calcule a média ponderada e a incerteza.

$$\bar{x} = 5,55 \pm 0,09 \text{ cm}$$

Fenômeno físico: Refração

Uma lente é um dispositivo óptico transmissivo que focaliza ou dispersa um feixe de luz por meio de refração.

Refração : fenômeno que consiste na mudança de velocidade de propagação da luz quando atravessa meios ópticos diferentes.

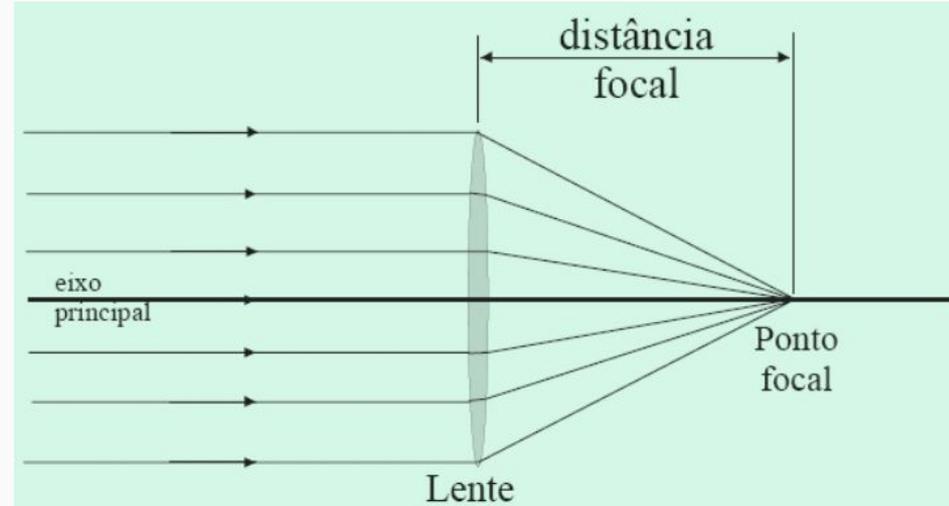
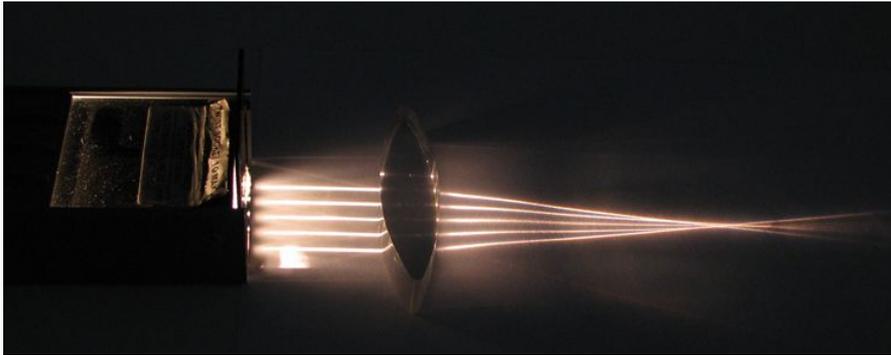


Fenômeno físico: Refração



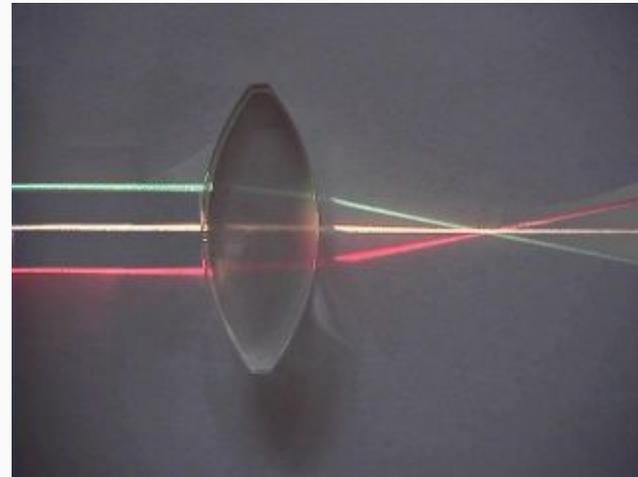
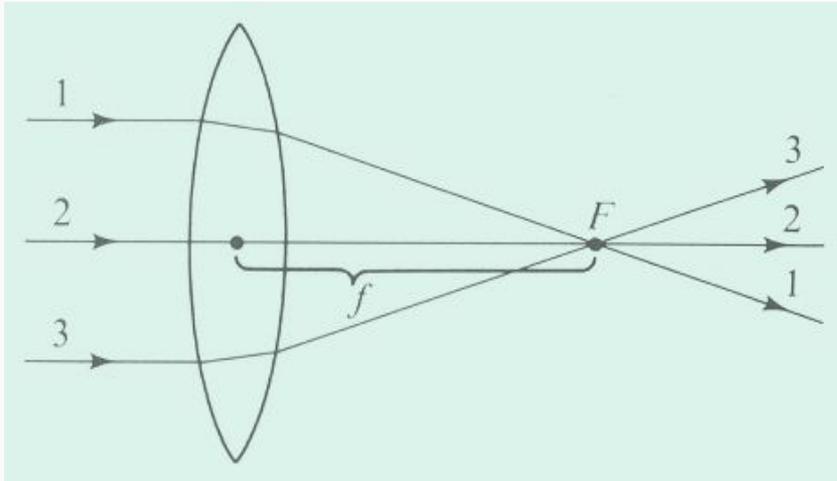
Distância Focal de uma Lente

Definição: É a **distância entre a lente e o ponto de foco de uma imagem**, caso o objeto que gera a imagem esteja a uma distância infinita da lente.



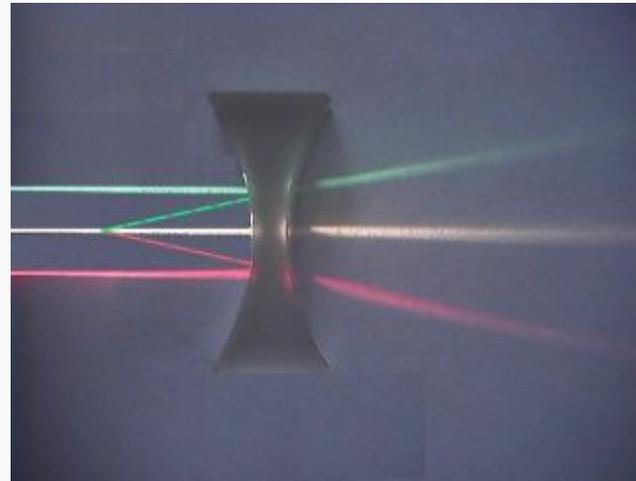
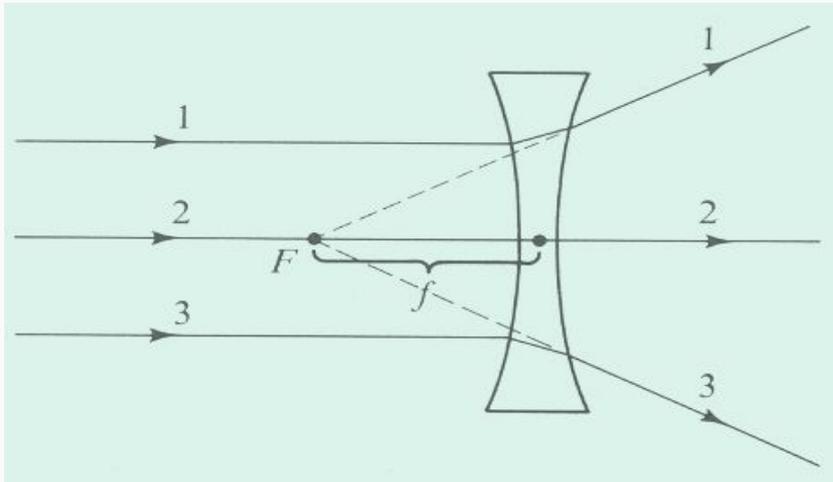
Lentes convergentes e divergentes

Convergente: São aquelas em que os raios de luz, paralelos ao eixo principal, sofrem refração de tal modo que se encontram em um único ponto, chamado de foco da lente, indicado por F

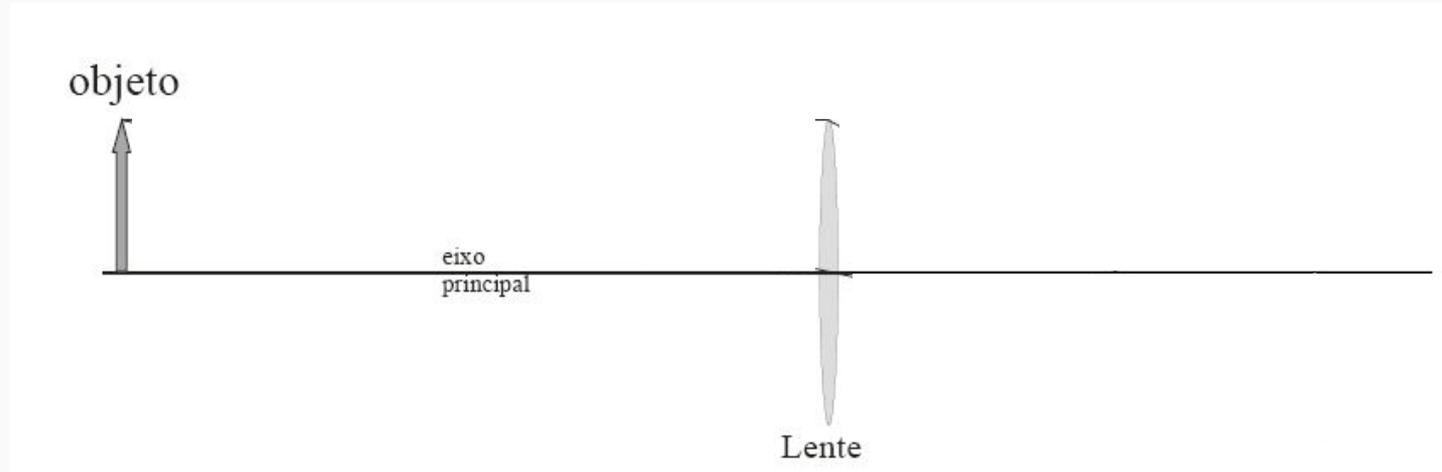


Lentes convergentes e divergentes

Divergente: Os raios de luz que incide paralelamente entre si sofrem refração, tomando direções que divergem a partir de um ponto único chamado de foco da lente, indicado por F

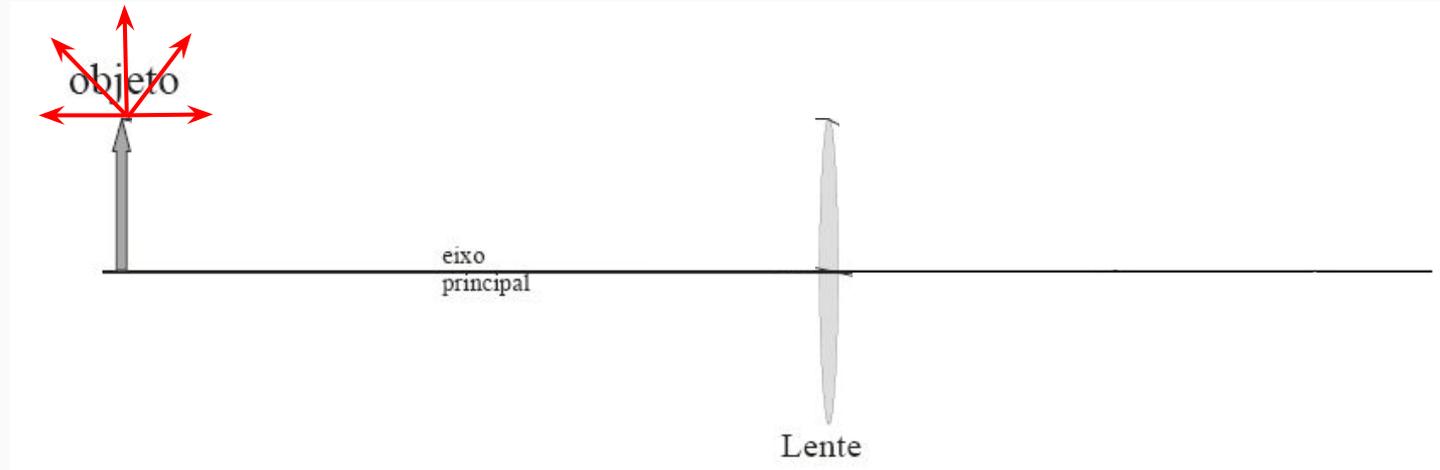


Formação da imagem usando lentes convergentes



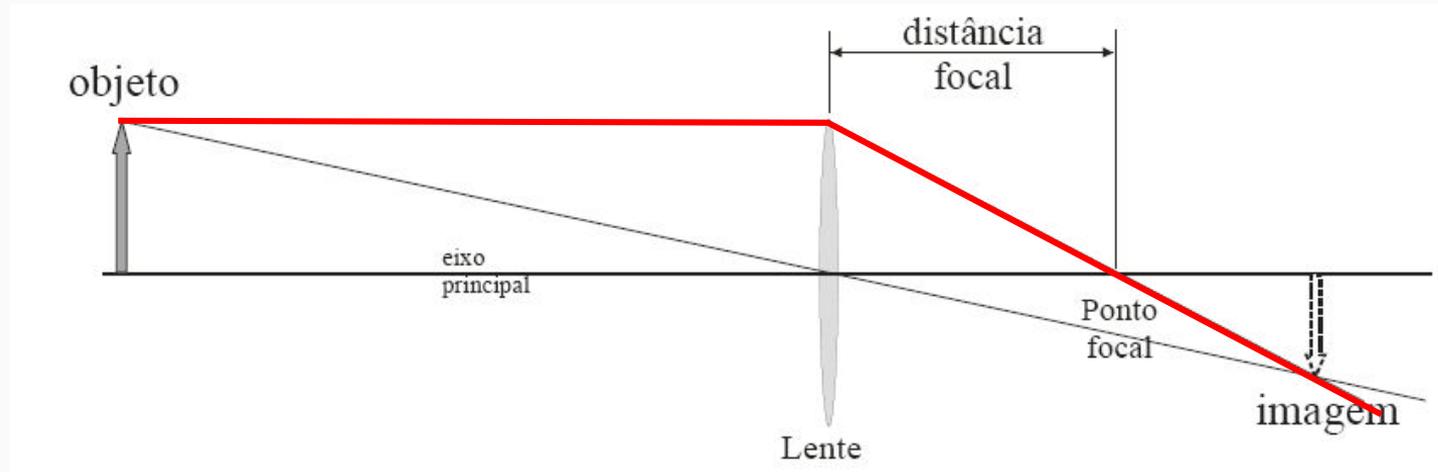
Formação da imagem usando lentes convergentes

- Raios luminosos saem de todos os pontos do objeto em todas as direções:



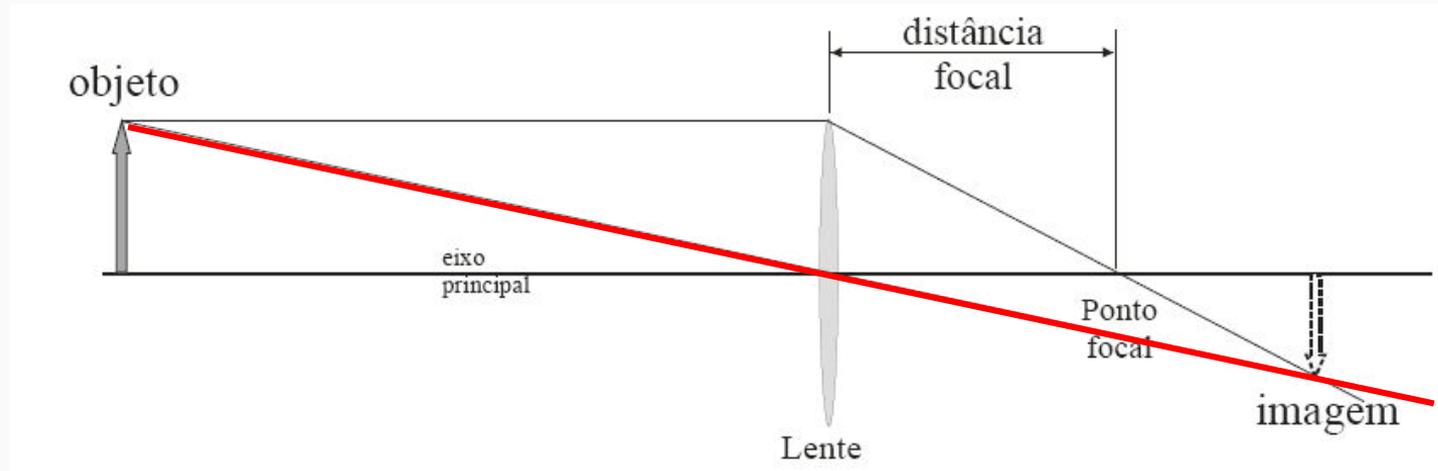
Formação da imagem usando lentes convergentes

- Raios luminosos saem de todos os pontos do objeto em todas as direções:
- Qualquer raio luminoso paralelo ao eixo principal da lente é desviado de tal forma a passar pelo **ponto focal** da lente (ponto no qual a luz colimada paralela ao eixo é focada) ;



Formação da imagem usando lentes convergentes

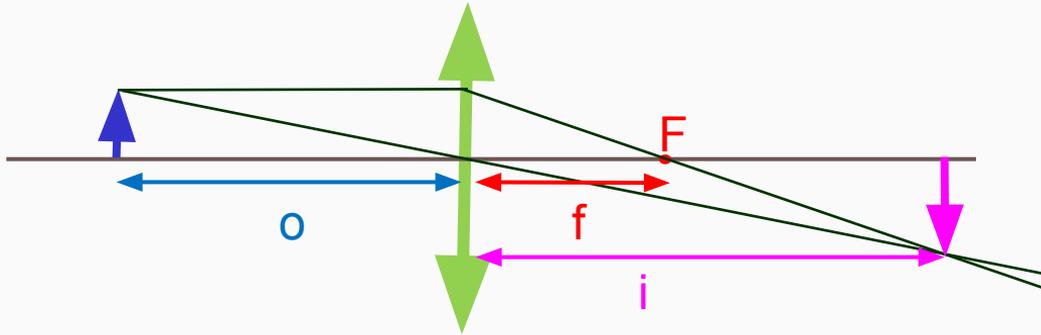
- Raios luminosos saem de todos os pontos do objeto em todas as direções:
- Qualquer raio luminoso paralelo ao eixo principal da lente é desviado de tal forma a passar pelo **ponto focal** da lente (ponto no qual a luz colimada paralela ao eixo é focada) ;
- Qualquer raio luminoso incidente sobre o **centro** da lente não sofre desvio.



Formação da imagem: Relação entre Distância do objeto e distância focal

- **Lente Convergente:**

Distância objeto (o) $>$ distância focal (f)



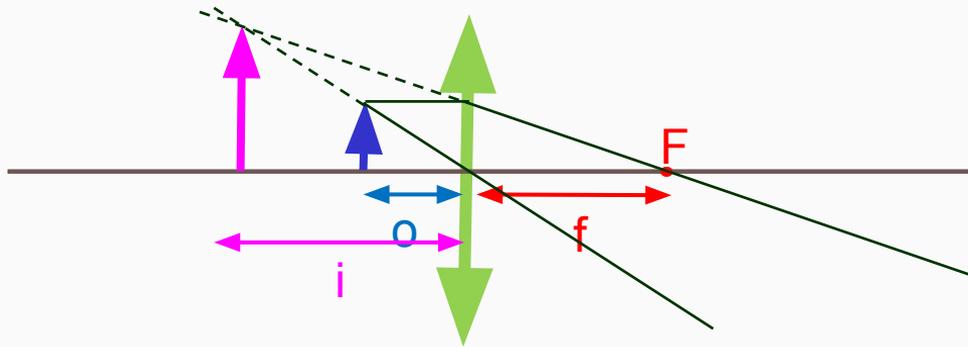
I , O e F têm sinal $+$ ou $-$, dependendo da situação:
 $F > 0$ - lentes convergentes;
 $F < 0$ - lentes divergentes;
 $O > 0$ - objeto real;
 $O < 0$ - objeto virtual (*“atrás da lente”*);
 $I > 0$ imagem real (*“projetável”*);
 $I < 0$ imagem virtual (*“atrás da lente, para objeto real”*);

- Imagem é **real** (cruzamento de raios reais)
 - Convenção de sinais: $i > 0$
- Imagem é **invertida**
- Conforme o objeto se afasta, a imagem diminui e se aproxima de F
- $f > 0$

Formação da imagem: Relação entre Distância do objeto e distância focal

- **Lente Convergente:**

Distância objeto (o) $<$ distância focal (f)



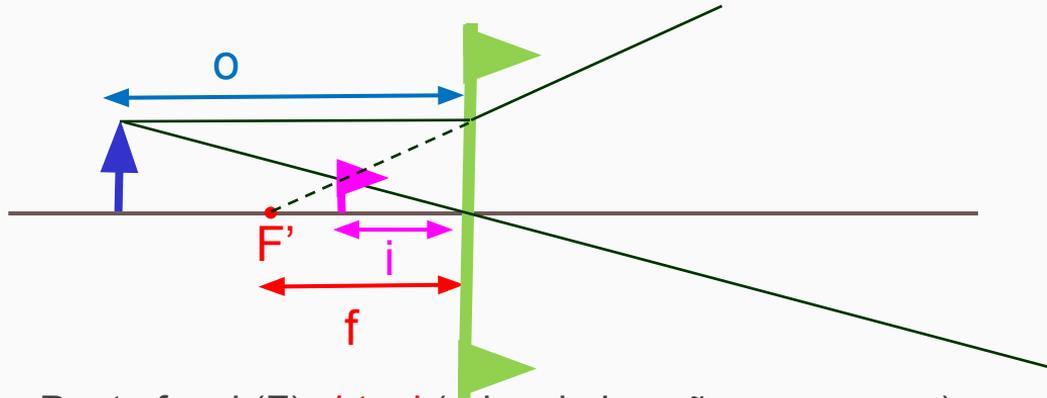
I , O e F têm sinal + ou -, dependendo da situação:
 $F > 0$ - lentes convergentes;
 $F < 0$ - lentes divergentes;
 $O > 0$ - objeto real;
 $O < 0$ - objeto virtual ("atrás da lente");
 $I > 0$ imagem real ("projetável");
 $I < 0$ imagem virtual ("atrás da lente, para objeto real");

- Imagem é **virtual** (cruzamento de prolongamentos dos raios)
 - **Convenção de sinais:** $i < 0$
- Imagem é **direita e maior** que o objeto
- A imagem sempre vai ser mais afastada da lente que objeto ($i > o$)
- $f > 0$

Formação da imagem: Relação entre Distância do objeto e distância focal

- **Lente Divergente:**

Distância objeto (o) $>$ distância focal (f)

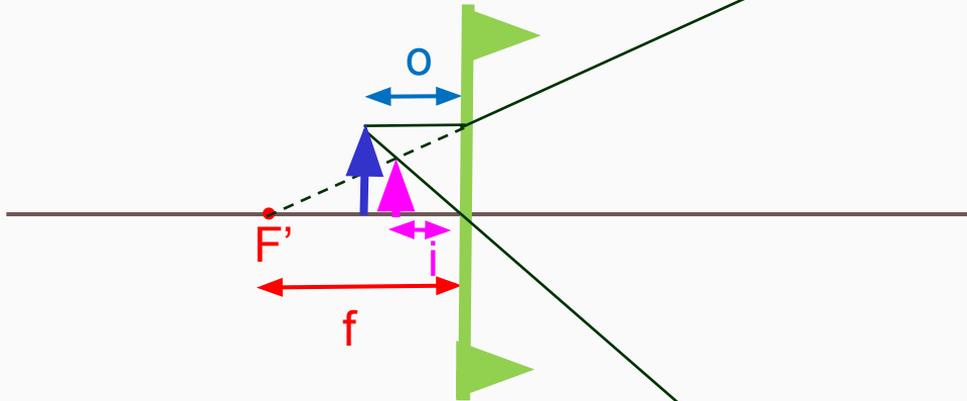


- Ponto focal (F) **virtual** (raios de luz não convergem)
- Imagem é **virtual** (cruzamento de prolongamentos dos raios)
 - **Convenção de sinais:** $i < 0$
- Imagem é **direita e menor** que o objeto
- A imagem **sempre vai estar entre o objeto e a lente**
- $f < 0$

I, O e F têm sinal + ou -, dependendo da situação:
 $F > 0$ - lentes convergentes;
 $F < 0$ - lentes divergentes;
 $O > 0$ - objeto real;
 $O < 0$ - objeto virtual (*"atrás da lente"*);
 $I > 0$ imagem real (*"projetável"*);
 $I < 0$ imagem virtual (*"atrás da lente, para objeto real"*);

Formação da imagem: Relação entre Distância do objeto e distância focal

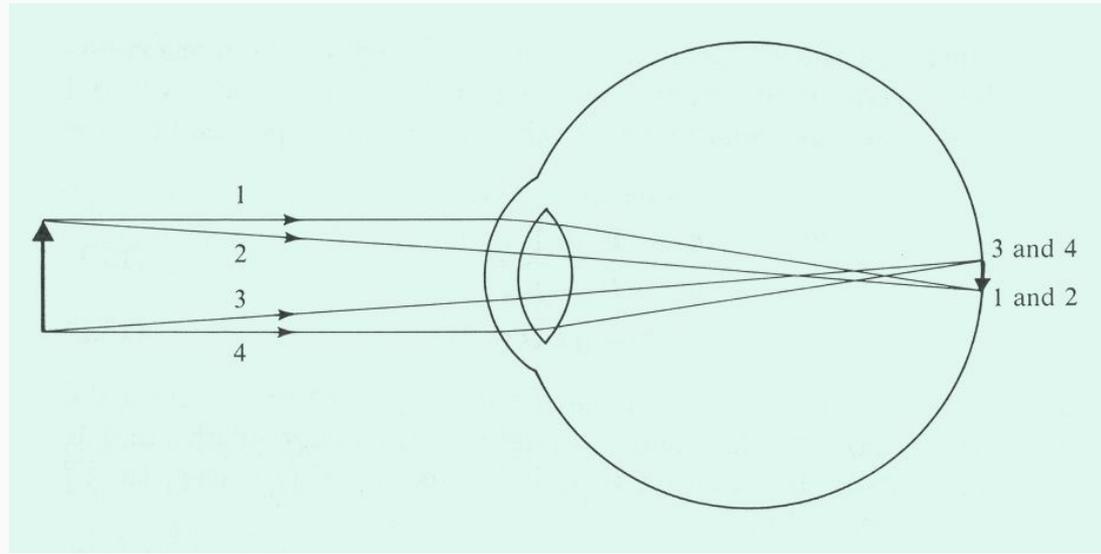
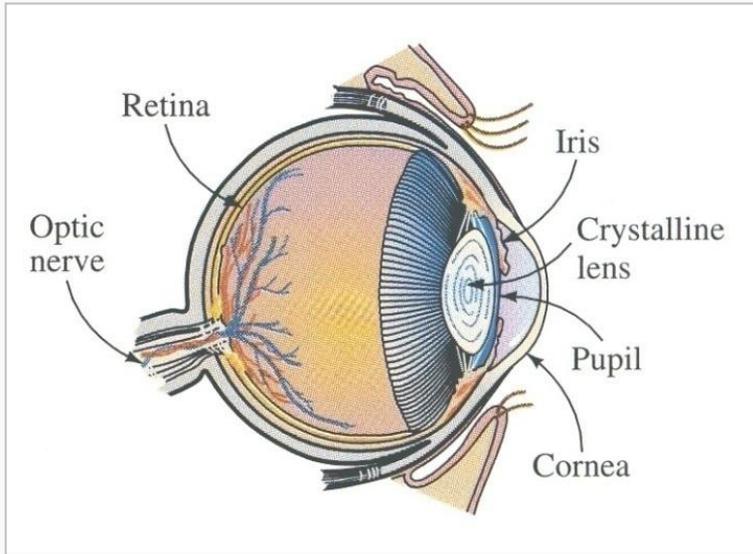
- **Lente Divergente:** Distância objeto (o) $<$ distância focal (f)



I , O e F têm sinal $+$ ou $-$, dependendo da situação:
 $F > 0$ - lentes convergentes;
 $F < 0$ - lentes divergentes;
 $O > 0$ - objeto real;
 $O < 0$ - objeto virtual ("atrás da lente");
 $I > 0$ imagem real ("projetável");
 $I < 0$ imagem virtual ("atrás da lente, para objeto real");

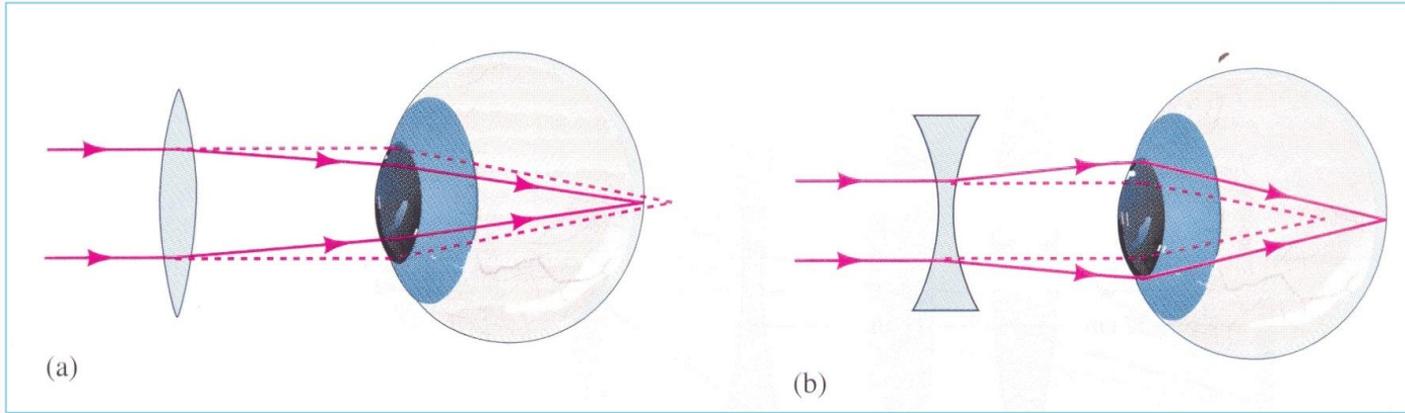
- Ponto focal (F) **virtual** (raios de luz não convergem)
- Imagem é **virtual** (cruzamento de prolongamentos dos raios)
 - **Convenção de sinais:** $i < 0$
- Imagem é **direita e maior** que o objeto
- A imagem **sempre vai estar entre o objeto e a lente**
- $f < 0$

Curiosidade: olho humano e visão



- A imagem formada sobre a retina é **real e invertida**.
- Problemas de visão ocorrem quando a imagem não se forma sobre a retina.

Curiosidade: correção dos problemas de visão



(a) Hipermetropia:
a imagem se forma **após** a retina; a correção é feita utilizando *lentes convergentes*.

(b) Miopia:
a imagem se forma **antes** da retina; a correção é feita utilizando *lentes divergentes*.

Atividade prática

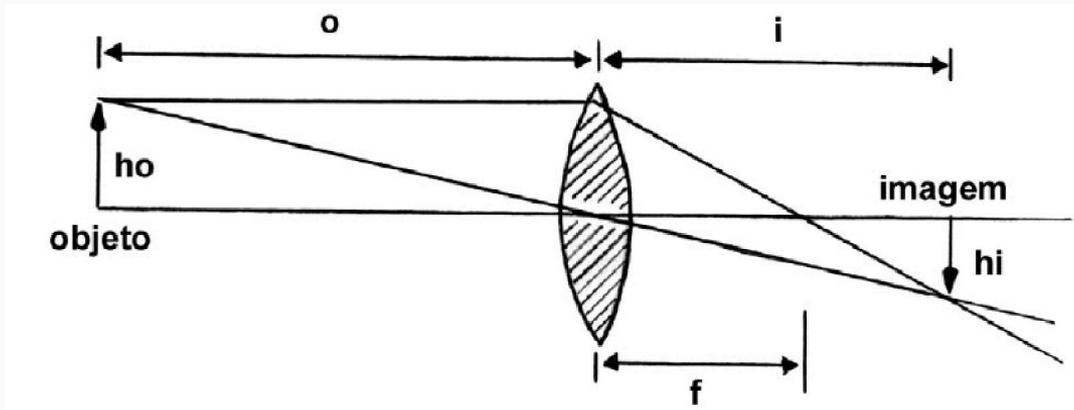
Medida da Distância Focal de uma Lente

- Objetivo

- Identificar os tipos de lente (divergente e convergente) e determinar a distância focal de cada uma delas

- Distância focal (*equação de Gauss para lentes simples*):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{i} + \frac{1}{o} \Rightarrow f = \frac{i \cdot o}{i + o}$$



válida somente se a espessura da lente puder ser desconsiderada em relação às outras dimensões envolvidas

Exercícios em aula

Calcule qual deve ser a distância focal para uma lente para a qual teríamos as seguintes distâncias (em valores absolutos, ou seja em módulo):

Distância para o objeto real: 7 cm

Distância para a imagem virtual: 25 cm

Não se esqueça de usar as convenções de sinal tanto para as distâncias objeto e imagem como para a distância focal. Escreva a resposta com 3 significativos.

Exercícios em aula

Calcule qual deve ser a distância focal para uma lente para a qual teríamos as seguintes distâncias (em valores absolutos, ou seja em módulo):

Distância para o objeto real: 7 cm

Distância para a imagem virtual: 25 cm

Não se esqueça de usar as convenções de sinal tanto para as distâncias objeto e imagem como para a distância focal. Escreva a resposta com 3 significativos.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{i} + \frac{1}{o} \Rightarrow f = \frac{i \cdot o}{i + o}$$
$$f = \frac{-25 * 7}{-25 + 7} = \mathbf{9,72 \text{ cm}}$$

Procedimento Experimental 1

- Identificar as 3 lentes: quais são convergentes e quais são divergentes?
- Estimar a distância focal dessas lentes (+ incerteza)
 - Convergente
 - Pode ser usado imagem real ou virtual
 - Divergente
 - Imagem virtual
- Colocar os valores das medidas no guia e na planilha online:
 - link da planilha:
https://drive.google.com/drive/folders/1KJwxSm-eWm0AoQBpjGQO2BpfPpwsc0Ng?usp=share_link

Como estimar a distância focal

Lente convergente

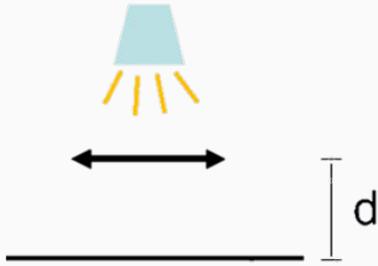
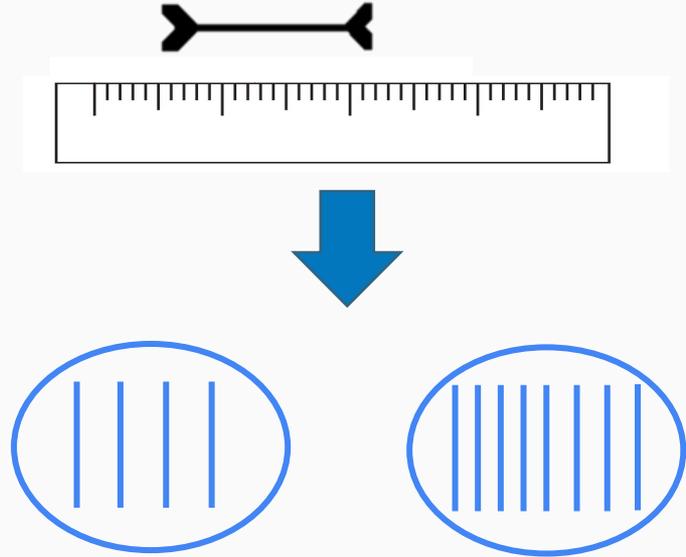


Imagem nítida: $d = f$

Incerteza de f :

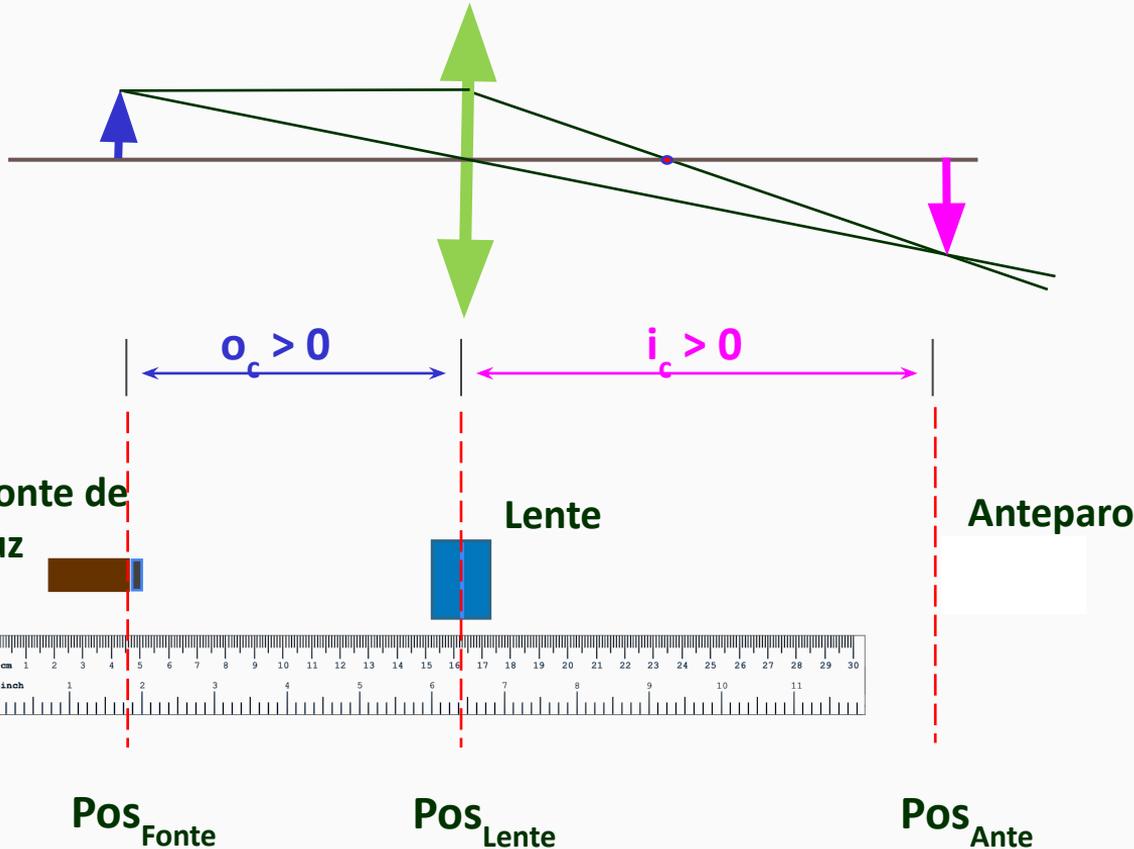
$$\Delta f = \pm \frac{d_+ - d_-}{2}$$

Lente divergente



Dobro de traços: $d = f$

Procedimento 2: Arranjo experimental



- Bancada óptica:
 - Trilho metálico
 - Fonte luminosa
 - 1 lente
 - Anteparo para projeção da imagem

$$o = |POS_{Lente} - POS_{Fonte}|$$

$$i = |POS_{Ante} - POS_{Lente}|$$

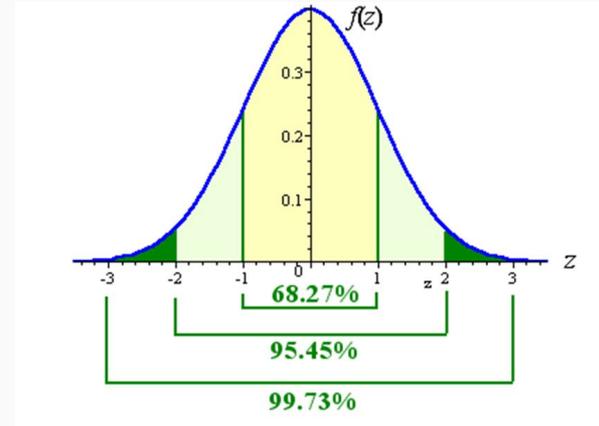
Dificuldade de leitura pode influenciar incerteza na posição

Procedimento 2: Arranjo experimental

- Utilizar a **lente convergente de MENOR distância focal**
- Fixar a fonte de luz (medir posição + incerteza)
- Fixar a lente (medir posição + incerteza)
- **CADA** membro do grupo determina:
 - a posição da imagem (onde a imagem é mais nítida)
 - A posição do Anteparo(+) (maior distância onde a imagem ainda é nítida)
 - A posição do Anteparo(-) (menor distância onde a imagem ainda é nítida)
- **Repetir** o procedimento acima para **10** posições diferentes da lente.
- Colocar os valores das medidas no guia e na planilha online:
 - link da planilha:
https://drive.google.com/drive/folders/1KJwxSm-eWm0AoQBpjG002BpfPpwsc0Ng?usp=share_link

Incerteza na distância imagem

Medida	Posição da Lente (\pm inc)	Aluno 1 Anteparo		
		imagem	+	-
1				
2				
3				



- Intervalo (Anteparo+ a Anteparo-) equivale a 4σ da incerteza da média

$$\sigma I_{final} = \sqrt{\left(\frac{(Ant_+ - Ant_-)}{4}\right)^2 + \sigma I_{instr}^2}$$

Incertezas do objeto e distância focal

- Posição do objeto (o):

$$o = Pos_{lente} - Pos_{fonte}$$

$$\sigma_o = \sqrt{\left(\frac{\partial o}{\partial P_L} \sigma_{P_L}\right)^2 + \left(\frac{\partial o}{\partial P_f} \sigma_{P_f}\right)^2}$$

Função com duas variáveis: $y = a + b$

$$\sigma_y = \sqrt{(\sigma a)^2 + (\sigma b)^2}$$

- Distância focal:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{i} + \frac{1}{o}$$

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial i} \sigma_i\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial o} \sigma_o\right)^2}$$

Dica: façam troca de variáveis e confirmam no WolframAlpha se deu certo

Análise dos dados

- A partir das posições de lente, fonte de luz e anteparo (centro do intervalo) no trilho, calcule:
 - os valores de l e de O para cada uma das medições, com incertezas → Tabela 3.
- Completar Tabela 4: inversões de l e de O , com incertezas
 - Usem planilhas para fazer as contas.
- Calcular cada valor de F para cada par $[1/O, 1/l]$ com incerteza → Tabela 5
- Calcular a média ponderada para cada aluno e para o conjunto total de valores de F com incerteza
- Verificar compatibilidade entre valores de F e média ponderada

Para a próxima aula (05/05):

- Entrega do Guia 3 (**um por grupo**)
- No moodle (aba Experimento # 3- Distância focal de uma lente):
 - **Exercício casa 3 -Sexta de manhã (até dia 05/05).**
- Texto: Apostila do curso (página principal do moodle):
 - **Experiência IV (Aulas 06 e 07) - Queda Livre**

Gisell Ruiz Boiset

gisell@if.usp.br

Bloco F – Conjunto
Alessandro Volta – sl. 209

