

Introdução às Medidas em Física

(Turma 43)

Aula 02 24/03/2023

Gisell Ruiz Boiset

gisell@if.usp.br

Bloco F – Conjunto Alessandro Volta – sl. 209

Material preparado com base no material gentilmente cedido pela Profa Dra. Paula R. P. Allegro

Na aula de hoje

- Resumo dos principais pontos da aula anterior
- Conceitos:
 - Noções de estatística:
 - Introdução a erros aleatórios ou estatísticos
 - Média e desvio padrão
 - Introdução a histogramas:
 - Ocorrências
 - Frequências
 - Densidade de probabilidade
- Experiência 1.2: Medidas de Tempo e o Pêndulo Simples
 - Realizar medidas de tempo e adquirir noções sobre ordem de grandeza em medidas de tempo
 - Estudo do período de oscilação de um pêndulo

Referências para a aula de hoje:

- Apostila do curso (página principal do moodle):
 - Capítulo 4: Interpretação Gráfica de Dados
 - Experiência I (Aulas 01 e 02) Calibração de Medidas e Pêndulo Simples.
- Texto: Conceitos Básicos da Teoria de Erros (aba Material Didático / arquivos 2022)
 - Capítulo 1: Expressão de Medições Experimentais

Da aula anterior:

- Medidas:
 - Definição: quantificar uma grandeza com relação a algum padrão tomado como unidade.
 - Medidas repetidas por:
 - Diferentes experimentadores
 - Diferentes instrumentos resultados diferentes
- Supondo que existe um valor verdadeiro associado à grandeza que está sendo medida, nunca iremos obter o valor verdadeiro em nossas medições devido:
 - características da própria grandeza sendo medida
 - limitações intrínsecas e inevitáveis dos nossos instrumentos e técnicas de medida
- A possibilidade de haver erros é que dá origem à **incerteza** de uma medida.

Da aula anterior:

- Representação dos resultados de cada medida:
valor medido \pm incerteza (*estimativa do erro*)

Representação dos resultados de uma medida

Incerteza indicada no aparelho ou em tabelas?

sim

não

Aparelho analógico

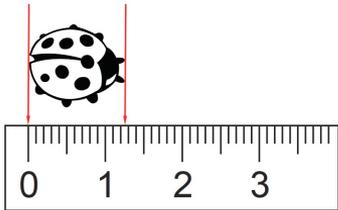
Aparelho digital

Metade da natureza

Metade da menor divisão da escala do aparelho

Menor valor lido

Salto entre 2 valores digitais sequenciais



$$L = (1,27 \pm 0,05) \text{ cm}$$



$$m = (7,4384 \pm 0,0001) \text{ g}$$

Representação dos resultados: algarismos significativos

Regra geral:

- Só faz sentido colocar **um** (em alguns casos **dois**) **algarismo significativo** na incerteza
- E a **incerteza** é que **determina o número de algarismos significativos** da medida

Forma correta: $(2,74 \pm 0,05)$ cm

Representação dos resultados: algarismos significativos

Algarismos significativos: **Operações**

○ **Adição e Subtração**

O resultado deve possuir o **mesmo número de casas decimais** que o **número com menor quantidade de casas decimais** envolvido.

○ **Multiplicação e Divisão**

Resultados devem ser escritos **com o mesmo número** de significativos do componente com **menor número de significativos** (não apenas casas decimais!)

$$L1 = 120,75 \text{ cm} ; L2 = 80 \text{ cm e } V = 5,4 \times 10^5 \text{ cm}^3$$

$$\text{Adição: } L1 + L2 = 120,75 + 80 = 201 \text{ cm}$$

$$\text{Subtração: } L1 - L2 = 120,75 - 80 = 41 \text{ cm}$$

$$\text{Multiplicação: } \text{Área} = L1 * L2 = 120,75 * 80 = 9,7 \times 10^3 \text{ cm}^2$$

$$\text{Divisão: } L3 = V/\text{Área} = 5,4 \times 10^5 / 9,7 \times 10^3 = 56 \text{ cm}$$

Aula de hoje: conceitos sobre medidas

- Resultados experimentais estão sempre sujeitos a **erros**:
 - Erros podem ou não ser conhecidos e podem ter diversas origens:
 - Erros conhecidos : incerteza instrumental
- São classificados de acordo com o **efeito** das fontes de erro em uma medida:
 - **Erros sistemáticos**: **afetam igualmente** todos os dados medidos, **independe** de quantos dados tenham sido tomados.
 - Exemplo: incerteza instrumental
 - **Erros aleatórios**: **afetam de maneira diferente** cada um dos dados medidos, causando variações dos valores obtidos em medições repetidas
 - podem ser reduzido aumentando-se o número de dados
 - são obtidos por métodos estatísticos, por isso são também conhecidos como **erros estatísticos**

Representação de conjuntos de medidas: Tabelas

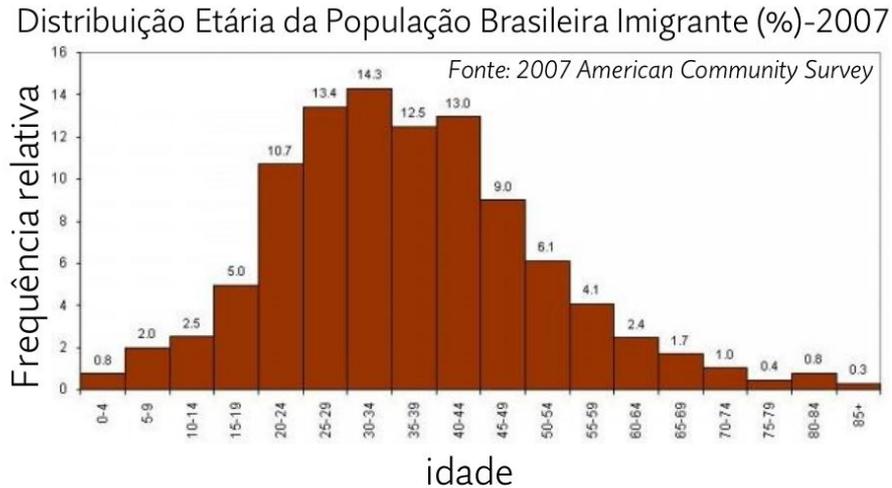
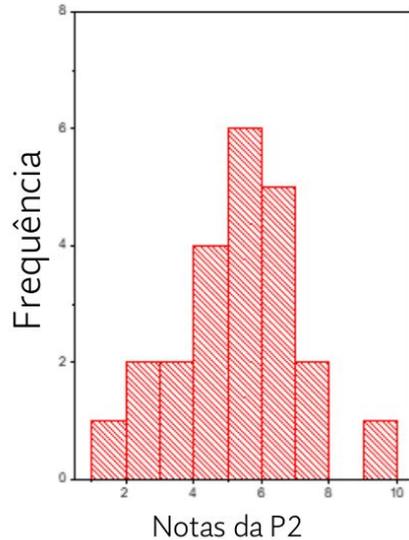
- Identificação
- Legenda
- Cabeçalho
- Unidades
- Medidas
- Incertezas

Tabela 1.1: *Alguns valores experimentais para a constante de gravitação ao longo dos anos.*

ano	$G \pm \sigma$ ($10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$)
1798	$6,75 \pm 0,05$
1930	$6,670 \pm 0,005$
1988	$6,67259 \pm 0,00085$

Representação de conjuntos de medidas: Histogramas

- Tipo de gráfico onde é possível visualizar como as medidas se distribuem:

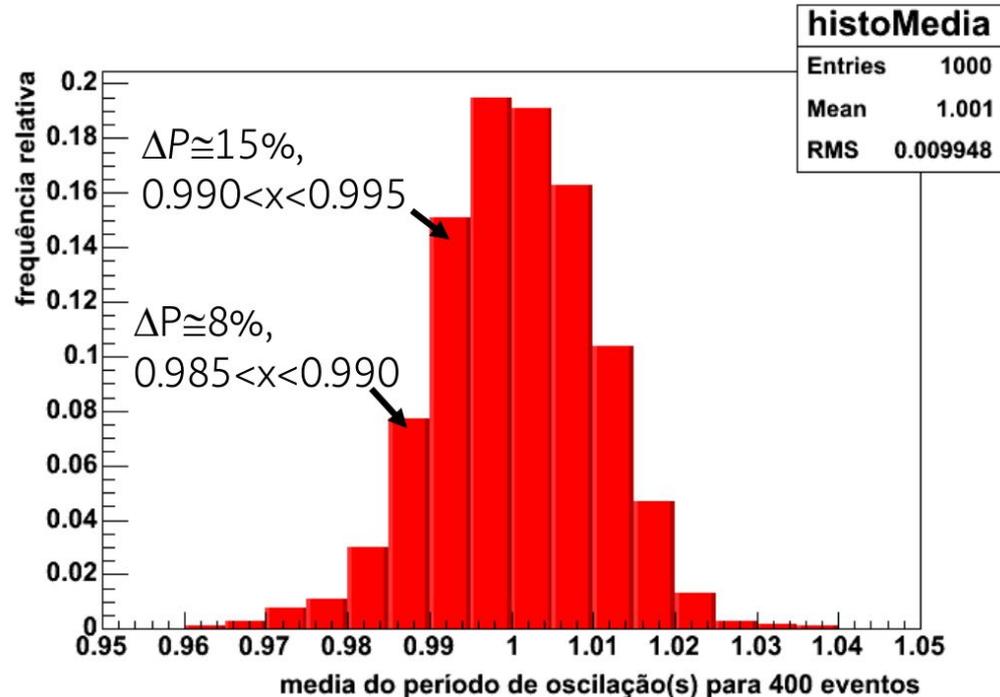


Eixo x (abscissa): mostra intervalos de medidas, também chamados de “canais” ou “bins”

Eixo y (ordenadas): mostra o número de ocorrências (frequência) ou a frequência relativa (número de ocorrências pelo número total de dados N).

Representação de conjuntos de medidas: Histogramas

- Podemos dizer que cada canal representa a probabilidade de se fazer uma medida entre o limite inferior e o limite superior do valor de uma medida representada no intervalo do canal



Como fazer um Histograma

- 1ª etapa : decidir a escala e a largura do canal do histograma

- mínimo : 2 s
- máximo: 7 s
- largura do canal: 1 s

- 2ª etapa : calcular a frequência com que os dados aparecem em cada intervalo

[2,3[→ 1

[3,4[→ 0

[4,5[→ 2

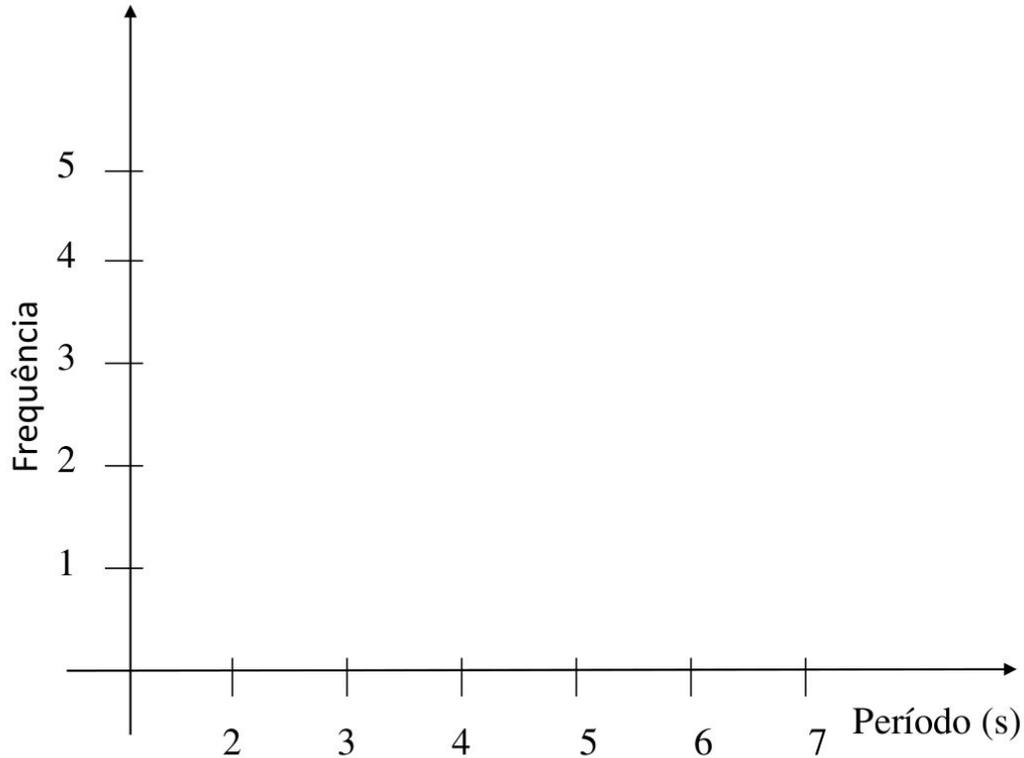
[5,6[→ 4

[6,7[→ 1

medida	período (s)
1	2,4
2	5,3
3	5,8
4	6,1
5	5,5
6	4,7
7	4,1
8	5,2

Como fazer um Histograma

- 3ª etapa : preencher o histograma



medida	período (s)
1	2,4
2	5,3
3	5,8
4	6,1
5	5,5
6	4,7
7	4,1
8	5,2

frequência

[2,3[→ 1

[3,4[→ 0

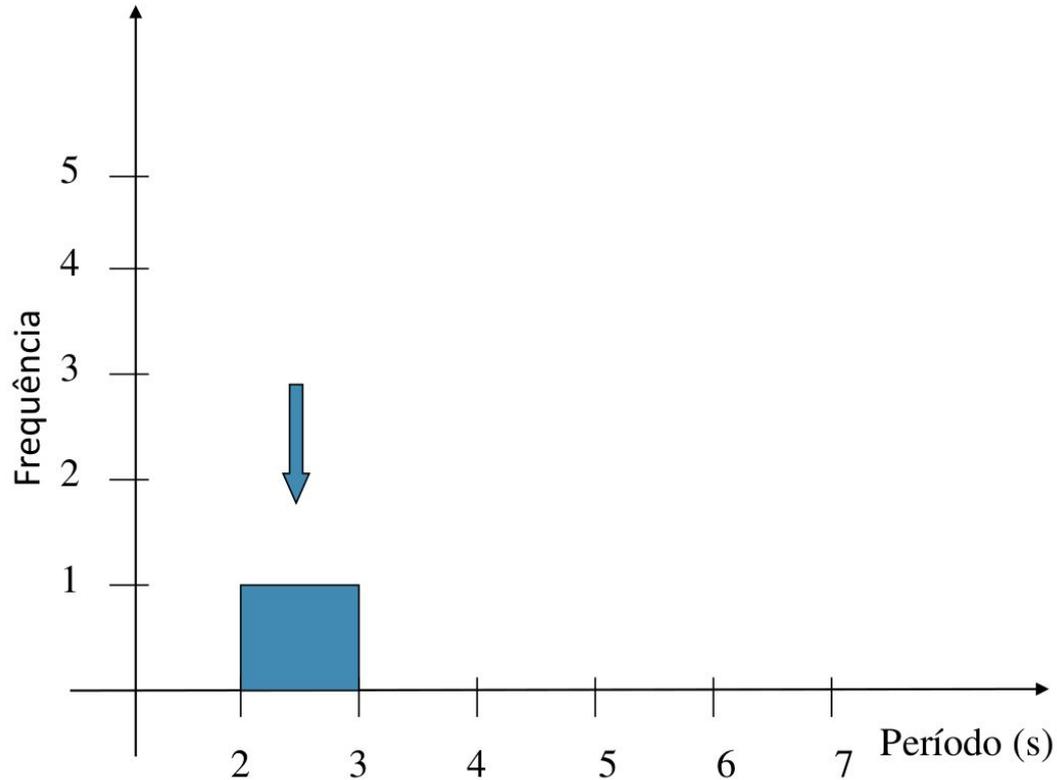
[4,5[→ 2

[5,6[→ 4

[6,7[→ 1

Como fazer um Histograma

- 3ª etapa : preencher o histograma



medida	período (s)
1	2,4
2	5,3
3	5,8
4	6,1
5	5,5
6	4,7
7	4,1
8	5,2

frequência

[2,3[→ 1

[3,4[→ 0

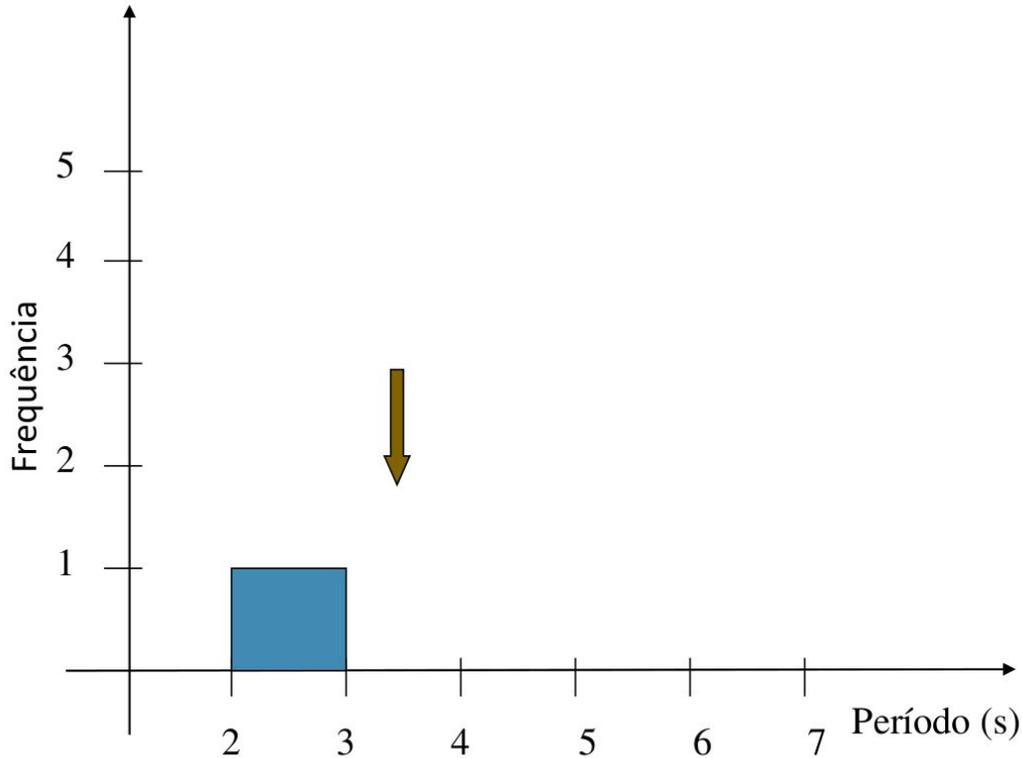
[4,5[→ 2

[5,6[→ 4

[6,7[→ 1

Como fazer um Histograma

- 3ª etapa : preencher o histograma



medida	período (s)
1	2,4
2	5,3
3	5,8
4	6,1
5	5,5
6	4,7
7	4,1
8	5,2

frequência

[2,3[→ 1

[3,4[→ 0

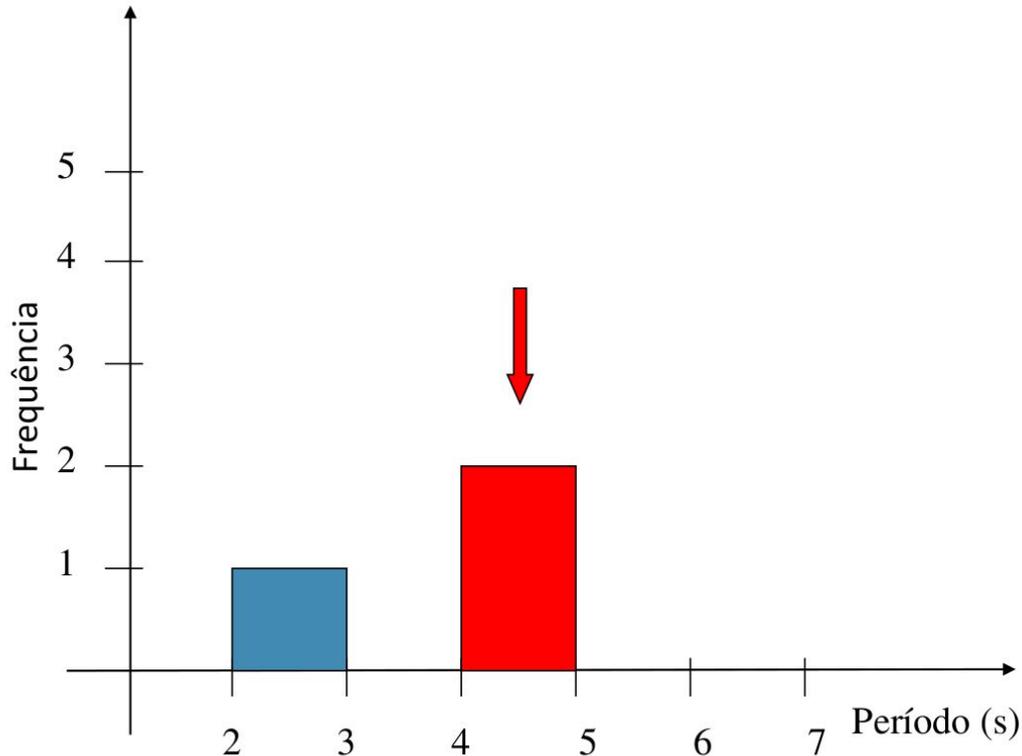
[4,5[→ 2

[5,6[→ 4

[6,7[→ 1

Como fazer um Histograma

- 3ª etapa : preencher o histograma



medida	período (s)
1	2,4
2	5,3
3	5,8
4	6,1
5	5,5
6	4,7
7	4,1
8	5,2

frequência

[2,3[→ 1

[3,4[→ 0

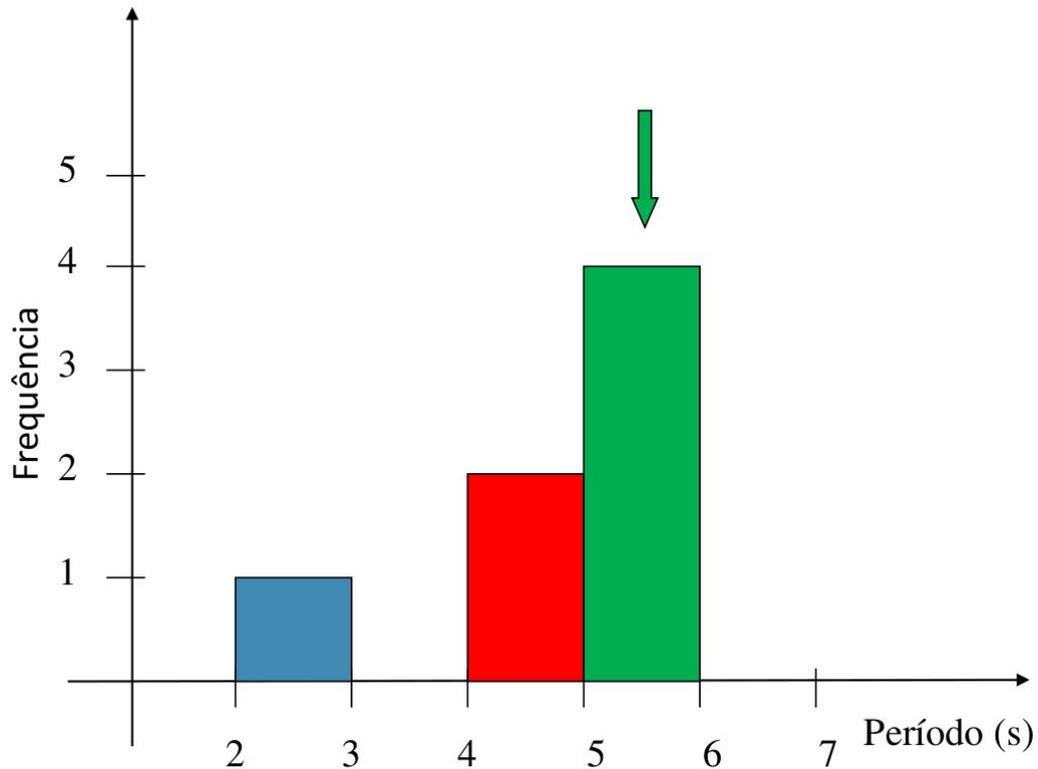
[4,5[→ 2

[5,6[→ 4

[6,7[→ 1

Como fazer um Histograma

- 3ª etapa : preencher o histograma



medida	período (s)
1	2,4
2	5,3
3	5,8
4	6,1
5	5,5
6	4,7
7	4,1
8	5,2

frequência

[2,3[→ 1

[3,4[→ 0

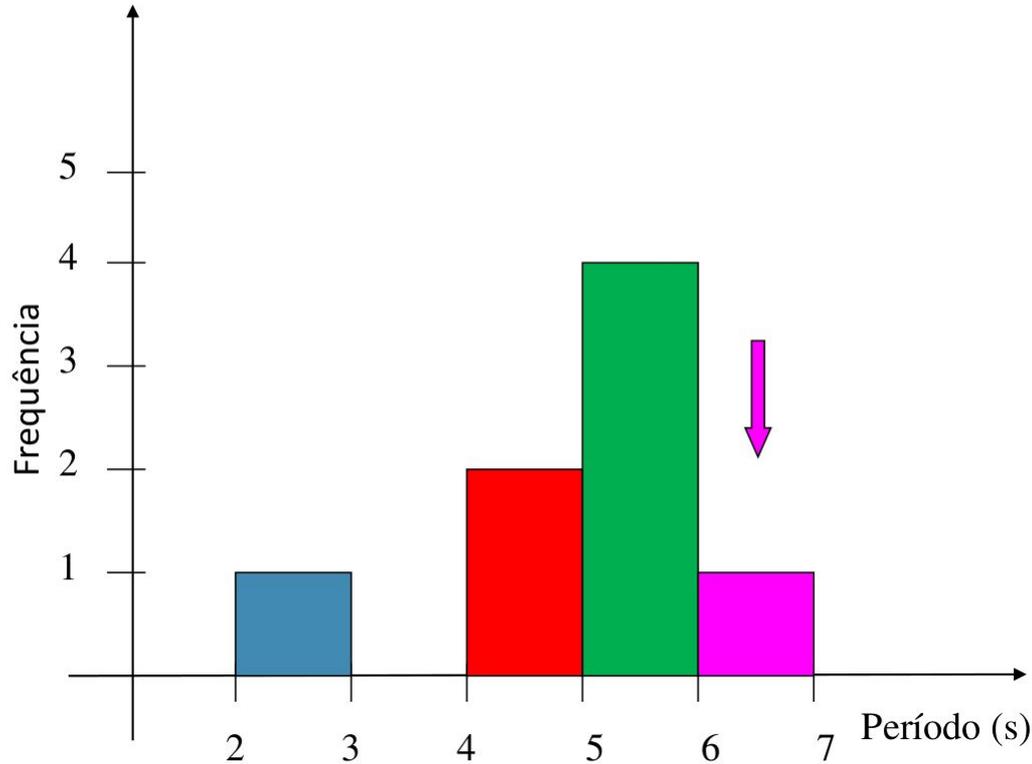
[4,5[→ 2

[5,6[→ 4

[6,7[→ 1

Como fazer um Histograma

- 3ª etapa : preencher o histograma



medida	período (s)
1	2,4
2	5,3
3	5,8
4	6,1
5	5,5
6	4,7
7	4,1
8	5,2

frequência

[2,3[→ 1

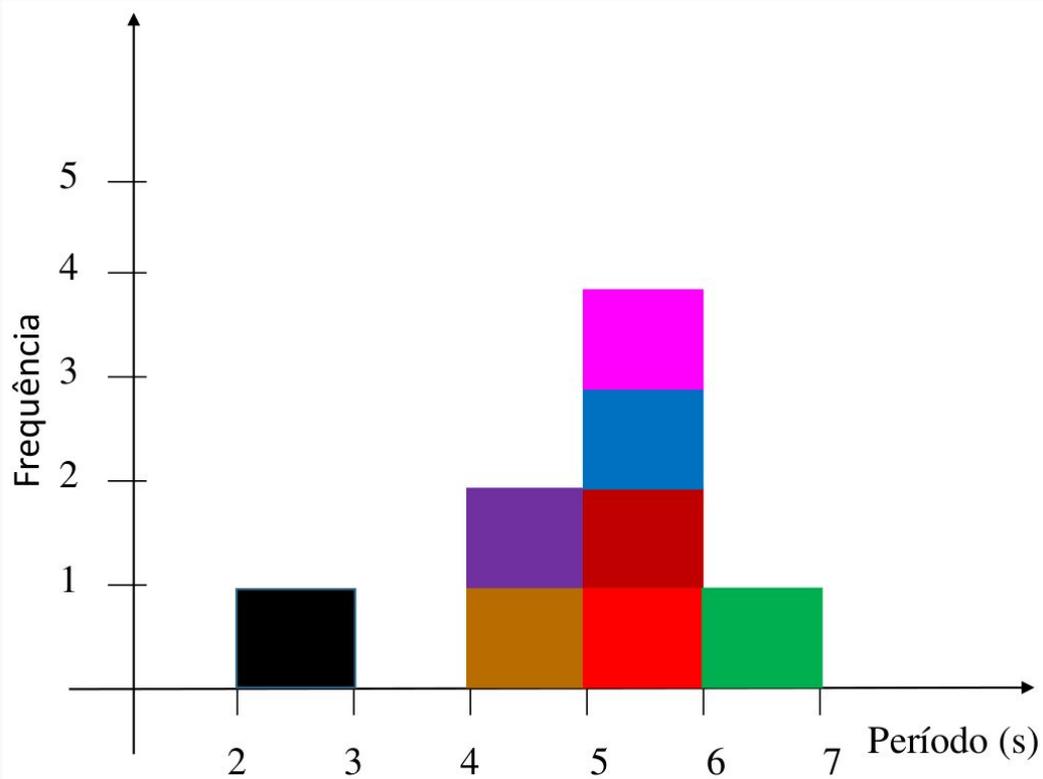
[3,4[→ 0

[4,5[→ 2

[5,6[→ 4

[6,7[→ 1

Como fazer um Histograma



medida	período (s)
1	2,4
2	5,3
3	5,8
4	6,1
5	5,5
6	4,7
7	4,1
8	5,2

frequência

[2,3[→ 1
[3,4[→ 0
[4,5[→ 2
[5,6[→ 4
[6,7[→ 1

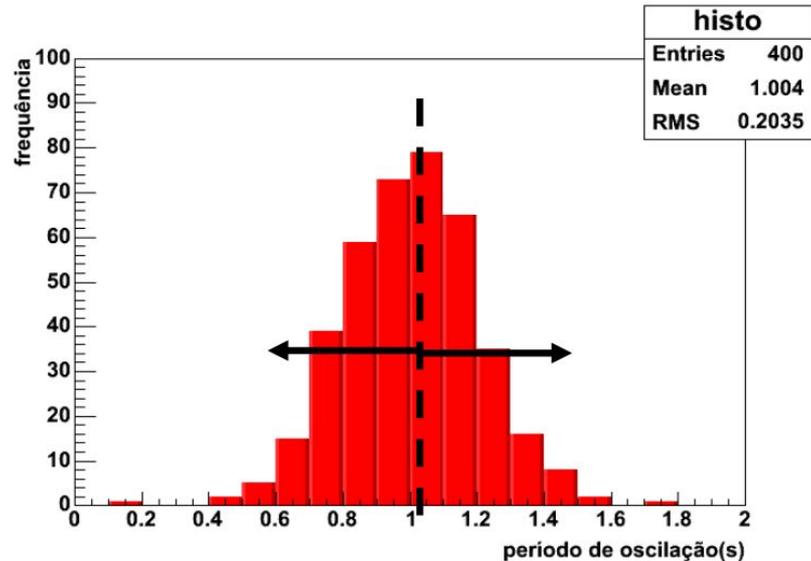
Erros Estatísticos ou Aleatórios

- Inicialmente, que características devemos esperar para a distribuição dos dados obtidos devido a erros estatísticos?

- **Simétrica** em torno de um certo valor:

Valor médio = valor mais provável

- **Decresce** ao se afastar desse valor.



Como representar o resultado de um conjunto de medidas

- Quantitativamente:
 - Resultado da medida → Média:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

onde N medidas x_i foram realizadas nas **mesmas condições** e possuem as **mesmas incertezas** (instrumental + aleatórias)

Como estimar o valor do erro estatístico

- Quantitativamente:

Flutuação dos dados → Desvio Padrão (σ)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

onde N medidas x_i foram realizadas nas **mesmas condições** e possuem as **mesmas incertezas** (instrumental + aleatórias)

Como representar a incerteza do resultado de um conjunto de medidas

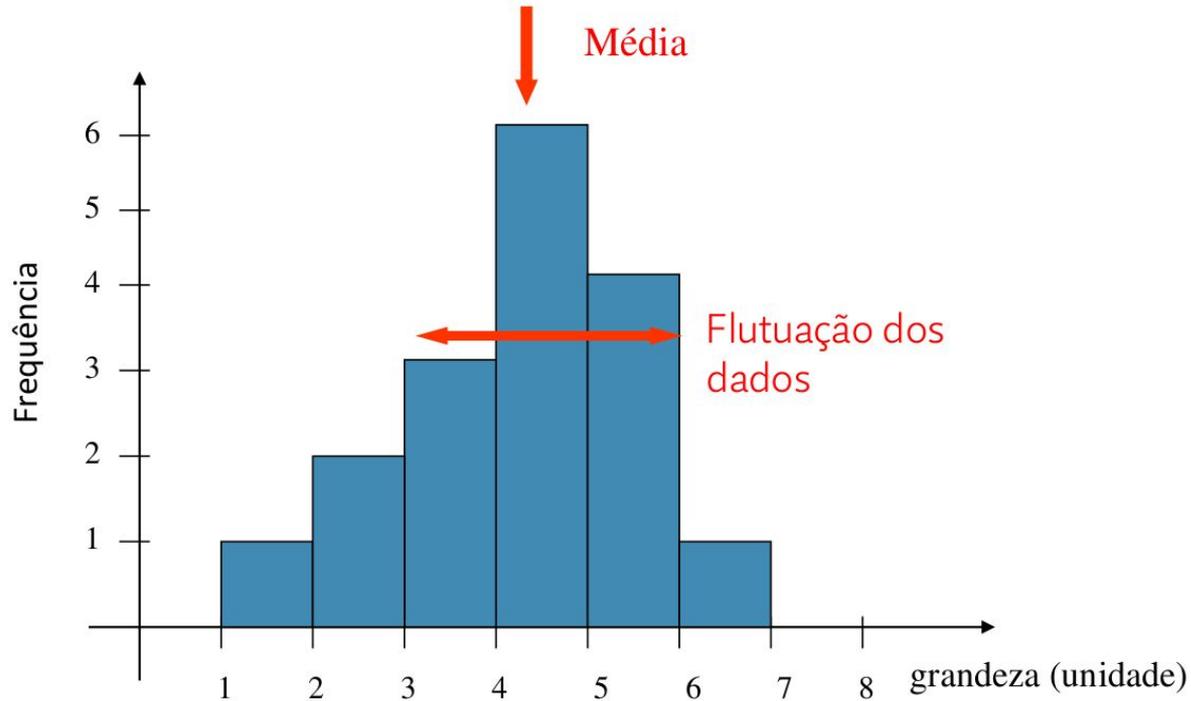
- Mas, ao aumentar o número de medidas, nosso resultado não deveria ser melhor já que diminuimos os erros aleatórios?
- O **desvio padrão da média** é uma estimativa do erro estatístico da média da amostra, representação do nosso resultado:

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

onde N medidas x_i foram realizadas nas **mesmas condições** e possuem as **mesmas incertezas** (instrumental + aleatórias)

Representação de dados

$$x_{final} = \bar{x} \pm \sigma_m \text{ unid}$$



Exemplo: Medidas de período (T)

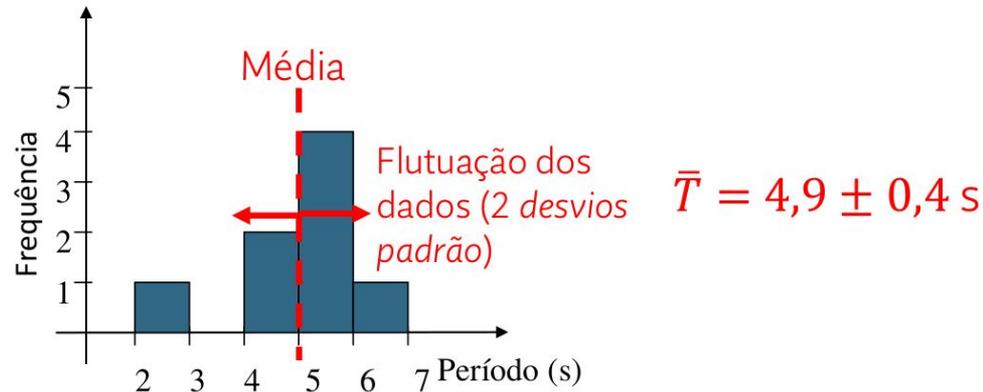
medida	T (s)
1	2,4
2	5,3
3	5,8
4	6,1
5	5,5
6	4,7
7	4,1
8	5,2

Média: $\bar{T} = \frac{\sum_{i=1}^N T_i}{N} = \frac{39,1}{8} = 4,8875 \text{ s}$

Desvio padrão: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (T_i - \bar{T})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{9,79}{8-1}} = 1,2 \text{ s}$

Desvio padrão da média: $\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{1,2}{\sqrt{8}} = 0,4 \text{ s}$

Representação final do resultado:



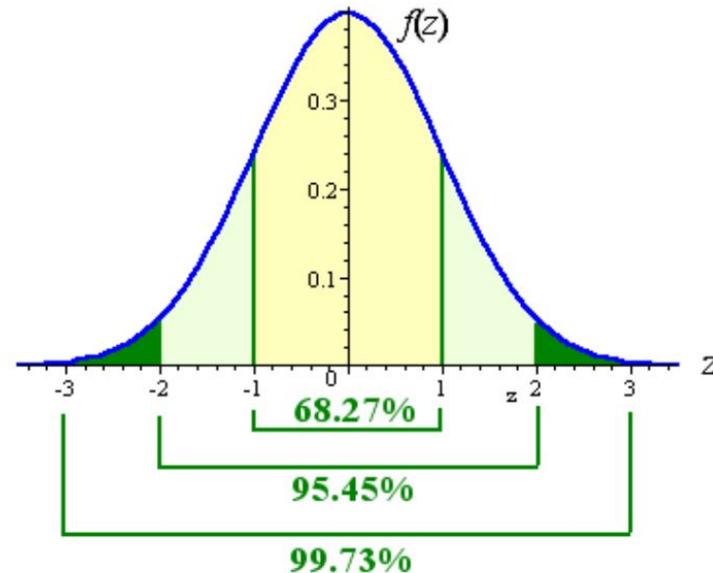
Interpretação de distribuições de valores - probabilidades

Grandezas físicas sujeitas a erros aleatórios costumam se distribuir de forma *simétrica* próxima a uma gaussiana (distribuição normal ou de Gauss)

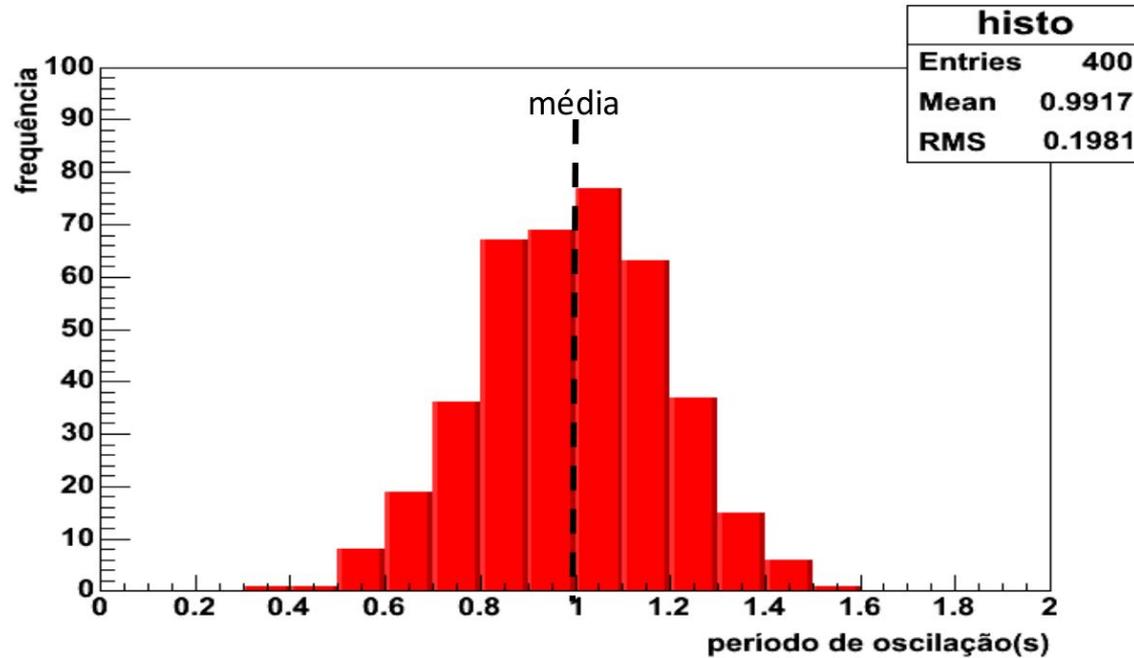
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Distribuição normal –escore z

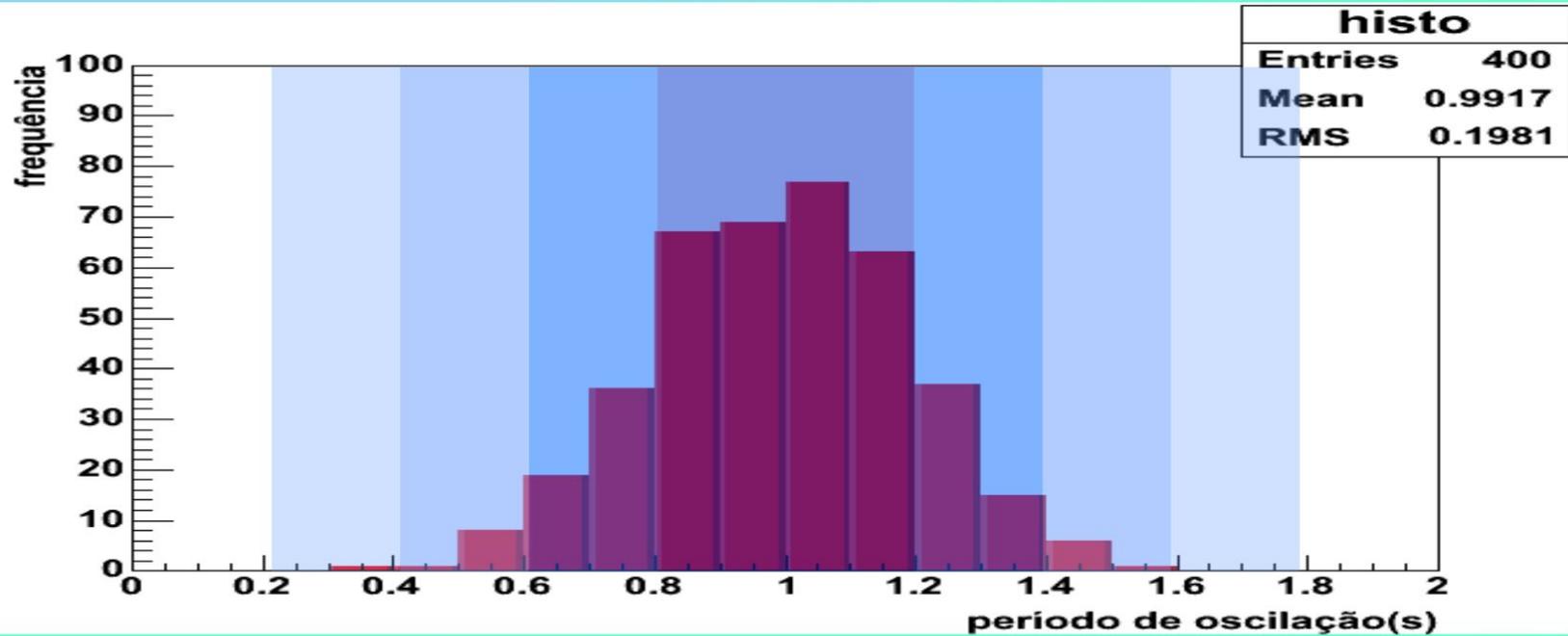
$$z = \frac{(x - \mu)}{\sigma}$$



Interpretação Estatística da Média e Desvio Padrão



Interpretação Estatística da Média e Desvio Padrão



Quase
Impossível

Muito
Pouco
Provável

Pouco
Provável

Provável

Muito Provável

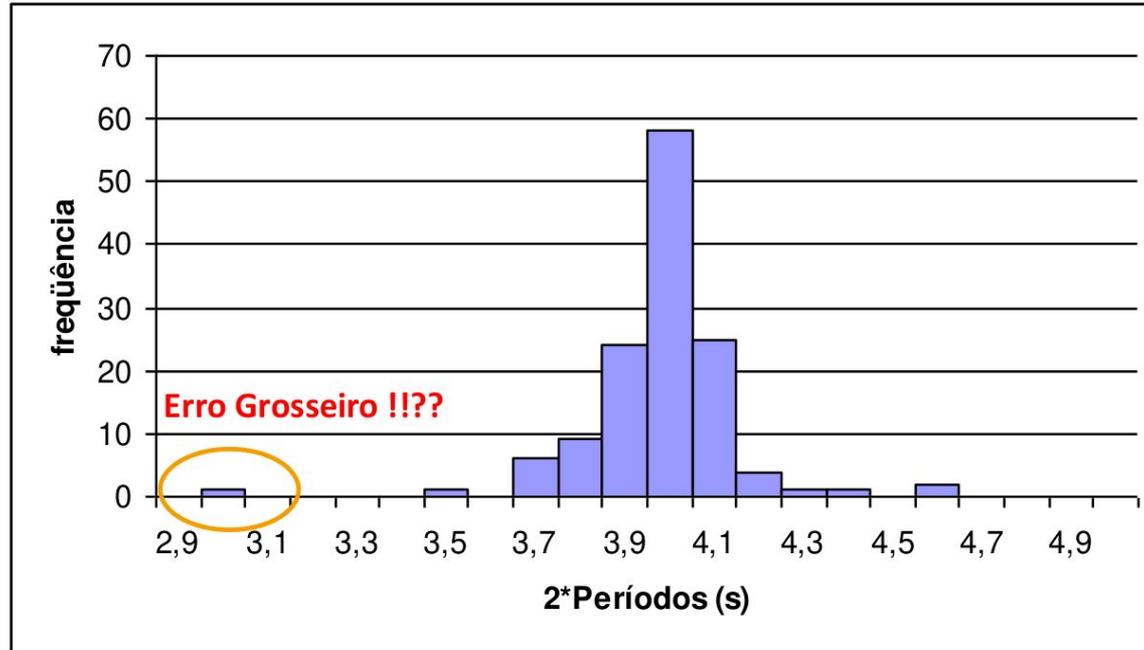
Provável

Pouco
Provável

Muito
Pouco
Provável

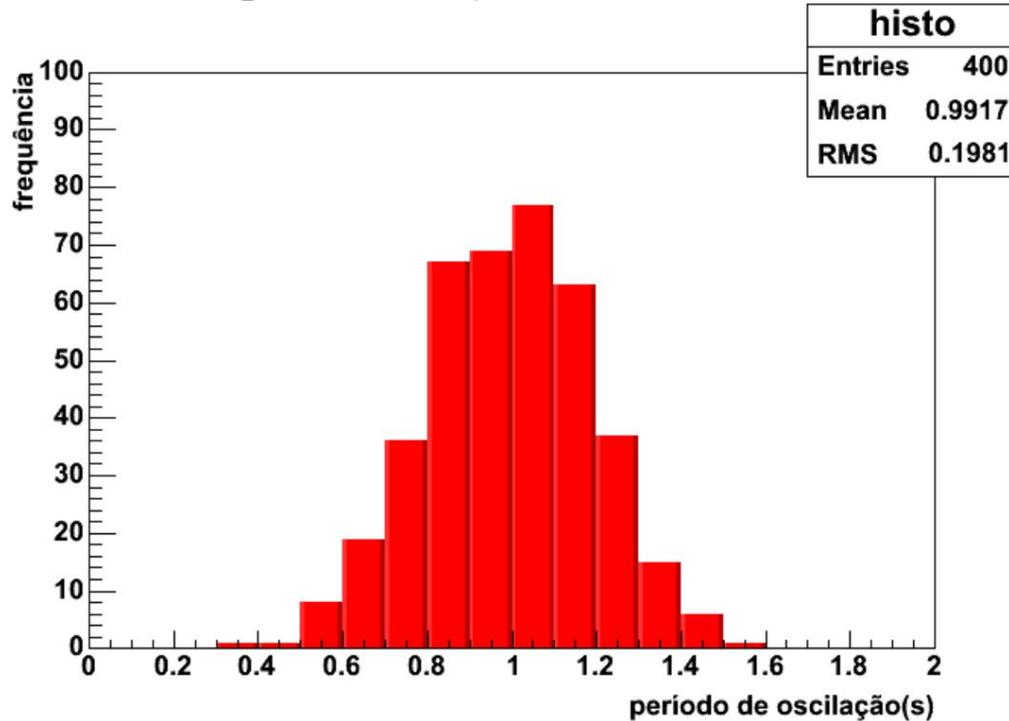
Quase
Impossível

Checando dados

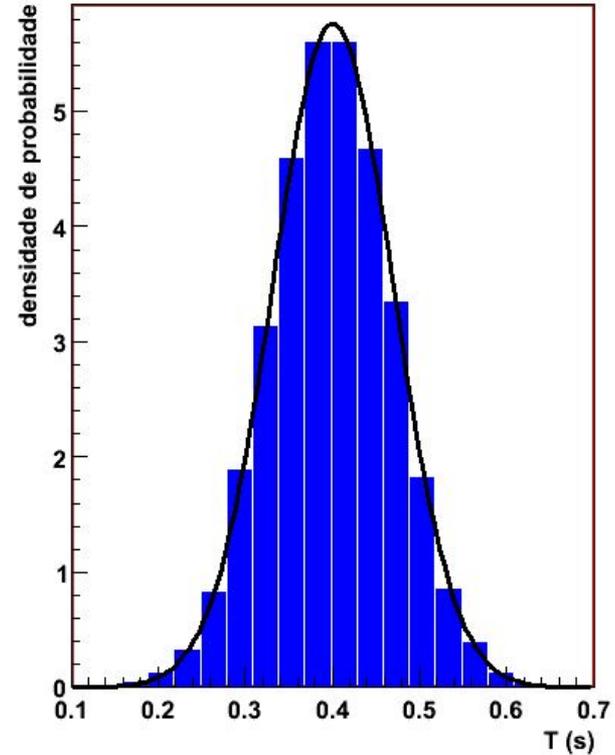


Média e Desvio Padrão da Média

- A média e o desvio padrão da média são suficientes para descrever e distinguir um conjunto de dados?



Propriedades Gráficas



Propriedades Gráficas

- **Média**

Valor mais provável

- **Desvio Padrão (σ)**

1/2 largura a 2/3 da altura máxima (H_{max})

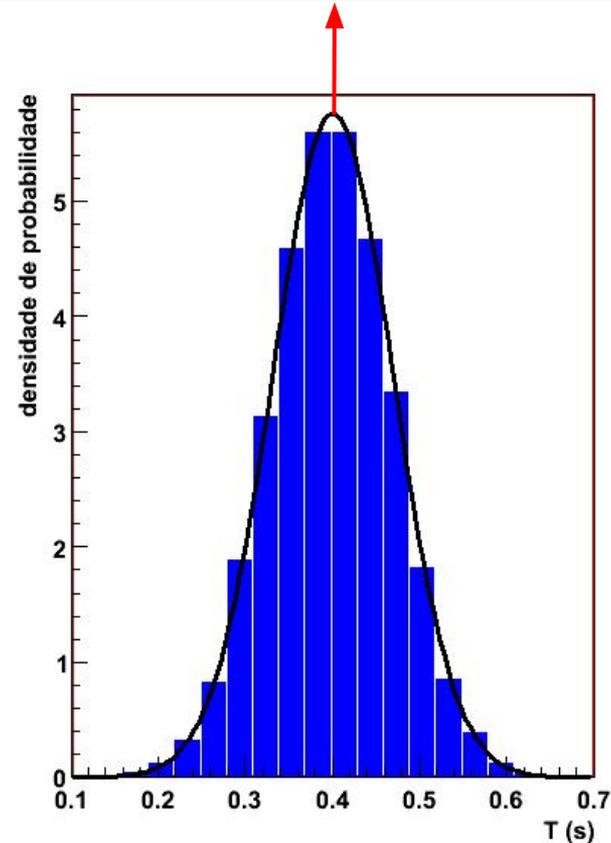
- **Total aproximado de eventos N**

Área do triângulo ajustado na distribuição

- **Incerteza da média**

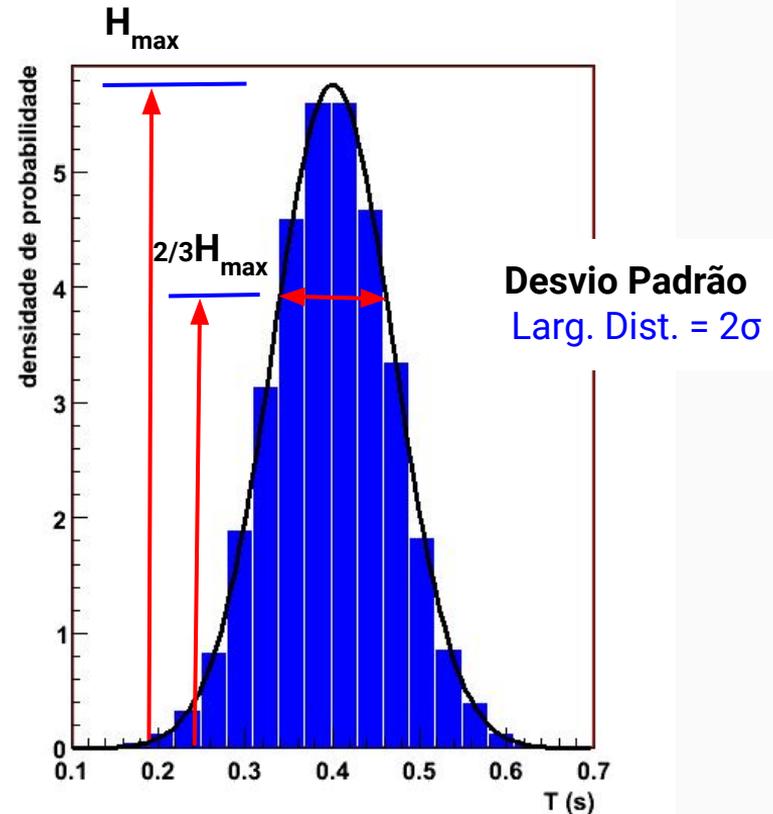
Incerteza estatística

Média
Valor + provável



Propriedades Gráficas

- **Média**
Valor mais provável
- **Desvio Padrão (σ)**
1/2 largura a 2/3 da altura máxima(H_{\max})
- Total aproximado de eventos N
Área do triângulo ajustado na distribuição
- Incerteza da média
Incerteza estatística

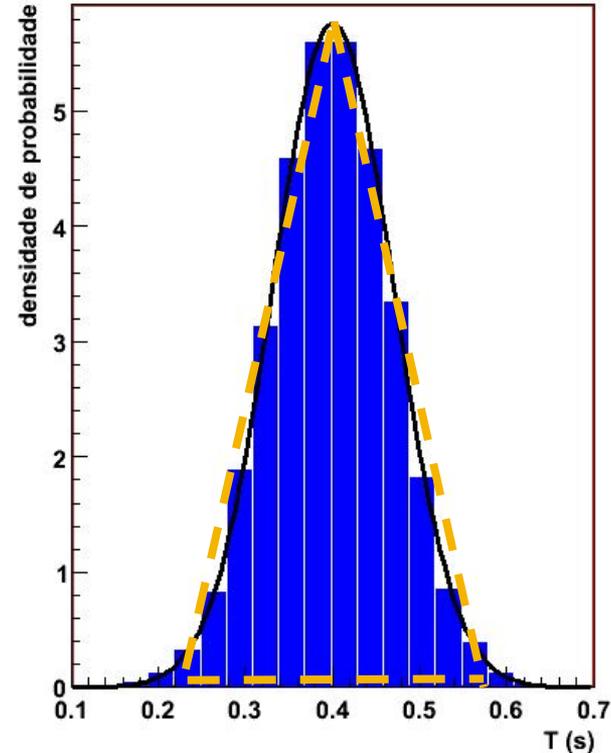


Propriedades Gráficas

- **Média**
Valor mais provável
- **Desvio Padrão (σ)**
1/2 largura a 2/3 da altura máxima(H_{max})
- **Total aproximado de eventos N**
Área do triângulo ajustado na distribuição

$$N_{dist} = \frac{(N_{max} \cdot N_{colunas})}{2}$$

- Incerteza da média
Incerteza estatística



Propriedades Gráficas

- **Média**

Valor mais provável

- **Desvio Padrão (σ)**

1/2 largura a 2/3 da altura máxima(H_{max})

- **Total aproximado de eventos N**

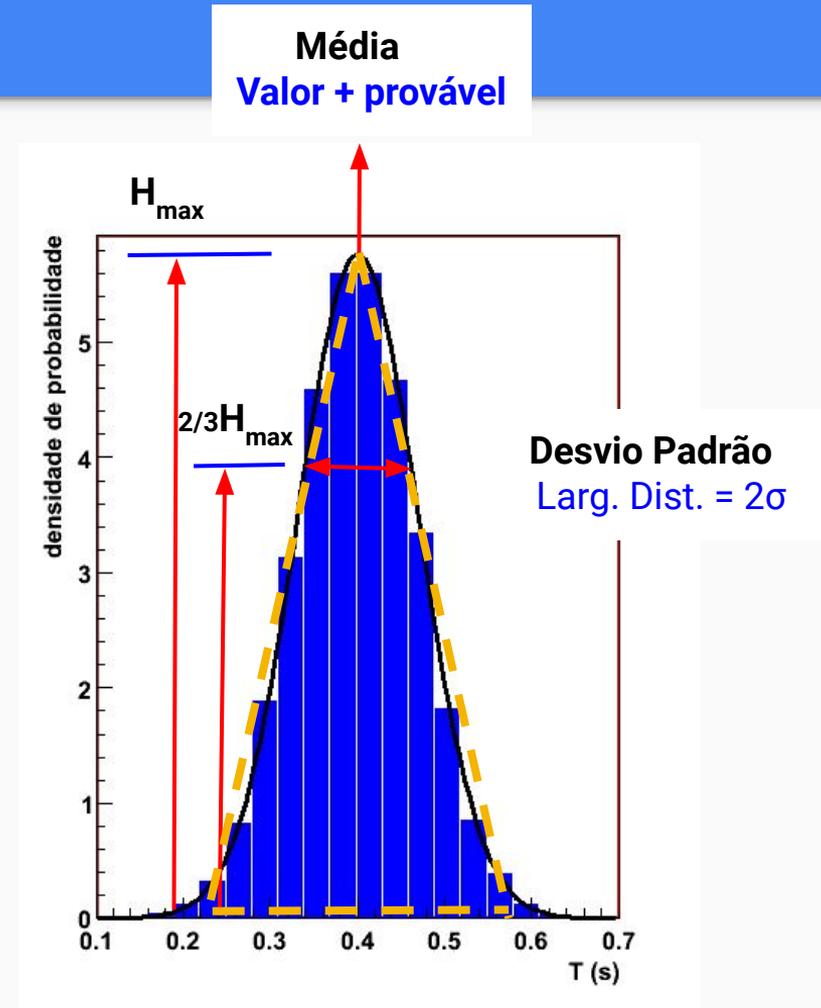
Área do triângulo ajustado na distribuição

$$N_{dist} = \frac{(N_{max} \cdot N_{colunas})}{2}$$

- **Incerteza da média**

Incerteza estatística

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

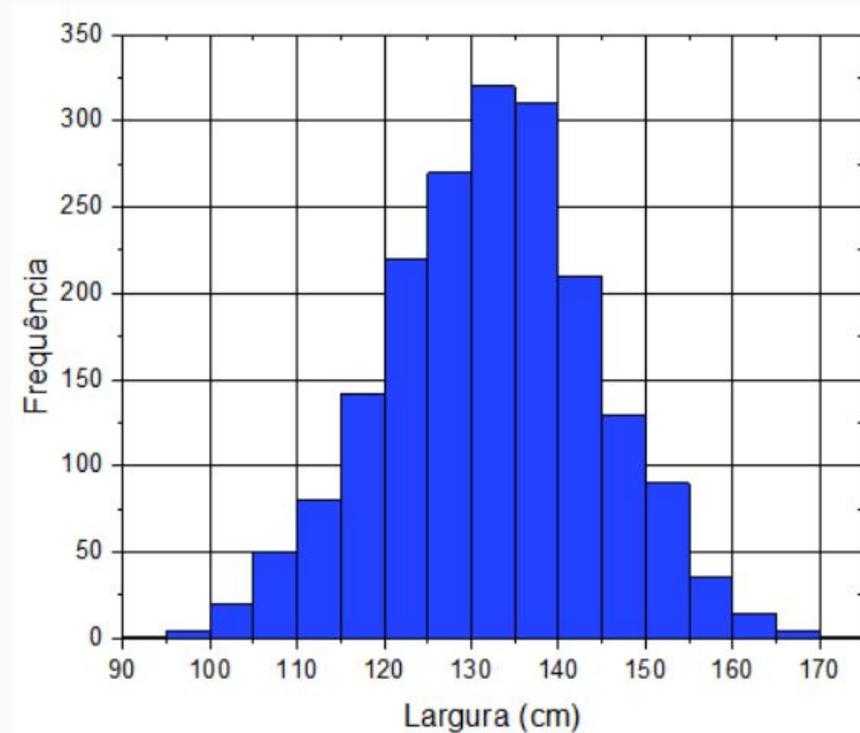


Exercício em aula

Foram registradas diversas medidas da largura da lousa (realizada em palmos, mas convertida para centímetro) por diversas turmas de física experimental, e os dados foram organizados no histograma abaixo:

Estime de forma aproximada, usando informações lidas no histograma, os valores solicitados abaixo.

- Largura do canal desse histograma:
- Média da distribuição:
- Desvio Padrão da distribuição:
- Total aproximado de eventos:
- Incerteza da média: cm

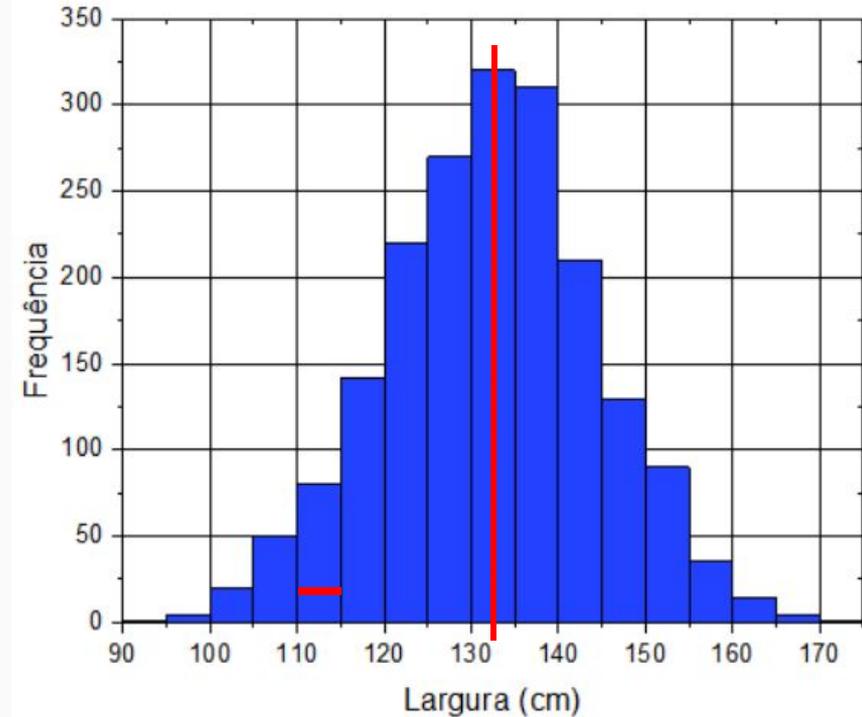


Exercício em aula

Foram registradas diversas medidas da largura da lousa (realizada em palmos, mas convertida para centímetro) por diversas turmas de física experimental, e os dados foram organizados no histograma abaixo:

Estime de forma aproximada, usando informações lidas no histograma, os valores solicitados abaixo.

- Largura do canal desse histograma: **5 cm**
- Média da distribuição: **132,5 cm**
- Desvio Padrão da distribuição:
- Total aproximado de eventos:
- Incerteza da média:

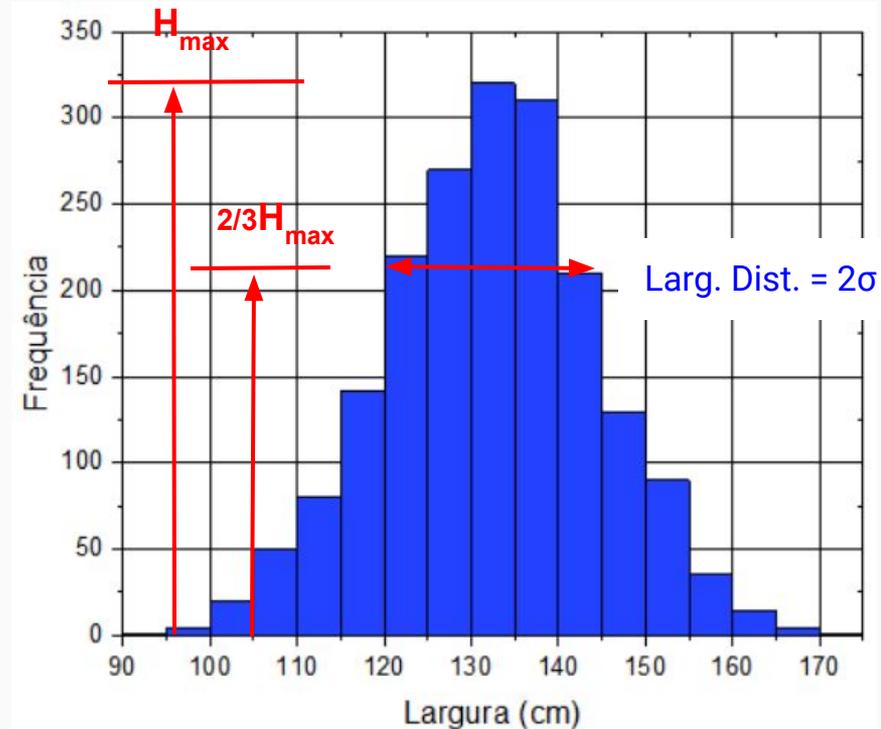


Exercício em aula

Foram registradas diversas medidas da largura da lousa (realizada em palmos, mas convertida para centímetro) por diversas turmas de física experimental, e os dados foram organizados no histograma abaixo:

Estime de forma aproximada, usando informações lidas no histograma, os valores solicitados abaixo.

- Largura do canal desse histograma: **5 cm**
- Média da distribuição: **132,5 cm**
- Desvio Padrão da distribuição: **12,5 cm**
- Total aproximado de eventos:
- Incerteza da média:

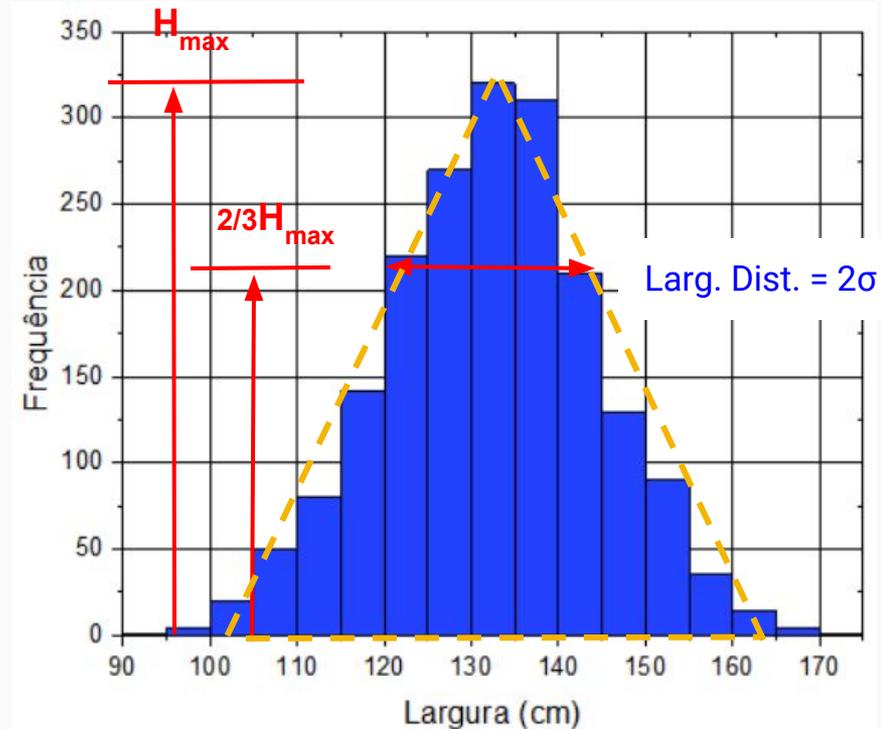


Exercício em aula

Foram registradas diversas medidas da largura da lousa (realizada em palmos, mas convertida para centímetro) por diversas turmas de física experimental, e os dados foram organizados no histograma abaixo:

Estime de forma aproximada, usando informações lidas no histograma, os valores solicitados abaixo.

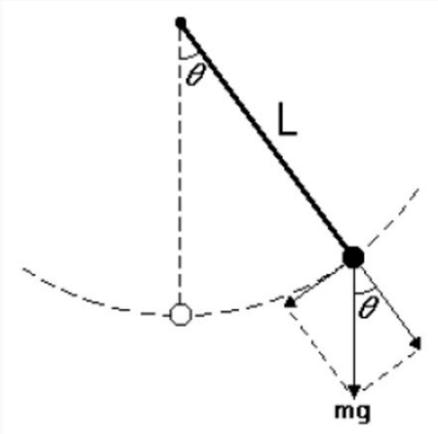
- Largura do canal desse histograma: **5 cm**
- Média da distribuição: **132,5 cm**
- Desvio Padrão da distribuição: **12,5 cm**
- Total aproximado de eventos: **1920**
- Incerteza da média: **0,3 cm**



Atividade prática

O Pêndulo Simples

Modelo para deduzir a relação entre o período de oscilação (T) e o comprimento do fio (L):



Com base nessas hipóteses, pode-se deduzir a seguinte relação entre T e L :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

onde g é a aceleração da gravidade

Hipóteses utilizadas:

- O pêndulo é constituído por um ponto material suspenso por um fio inextensível e sem massa
- Apenas as forças peso e tração agem sobre o ponto material
- Utilizam-se ângulos de abertura pequenos ($\theta < 15^\circ$), tal que seja válida a aproximação $\sin(\theta) \approx \theta$ (em radianos), onde θ é o ângulo entre o fio e a vertical, durante a oscilação.

Medidas experimentais:

1. Medir comprimento do pêndulo
 - **Uma** medida por grupo
2. Medir o tempo para dez oscilações de um pêndulo simples usando um cronômetro:
 - Situação 1: precisão de **0,01 s**
 - Situação 2: precisão de **1 s**. **ARREDONDE** o valor do cronômetro na casa dos **segundos**

- Medida feita **por cada um** dos integrantes do grupo
- Quantidade: **5 vezes** por integrante do grupo **PARA CADA SITUAÇÃO**
- Anotar as medidas no guia e na planilha de dados

<https://docs.google.com/spreadsheets/d/1slxOTBbshSwTCXLqyfKeeqEpaysXiqAI/edit?usp=sharing&oid=104007882679961196705&rtpof=true&sd=true>

Análise dos Dados

- **Calcular média** e **desvio padrão** e **desvio padrão** da média dos dados usados para fazer o histograma (**por grupo** - Uso de Planilhas)
- Fazer 2 histogramas **em papel milimetrado** (para cronômetro de 0,01 s)
(dica de como fazer no excel: <https://youtu.be/ufQbAEixyuE>)
 - 1 para medidas **do grupo**
 - 1 para medidas **da sala**
- Calcule o valor esperado para o período T do pêndulo através da expressão:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$g = (9,7865 \pm 0,0001) \text{ m/s}^2$$

onde L é o comprimento do fio g é a aceleração da gravidade.

Não esqueça de expressar a medida com o número correto de algarismos significativos

- **Construa** um **histograma em papel milimetrado**, usando os dados da tabela disponível no “site” da disciplina

Experimento # 1 - Pêndulo simples

Tabela com o tempo para 10 oscilações de alguns pêndulos.pdf

- **Avalie** graficamente a **média**, **desvio padrão** e **incerteza da média**
- Supondo que os dados apresentados foram tomados para dez oscilações de um pêndulo simples similar ao usado no laboratório, **calcule o comprimento do fio** do pêndulo utilizado

Tempo para 10 oscilações

A	B	C	D	E	F	G	H
(seg)							
8,90	10,92	12,62	14,08	15,44	16,68	17,80	18,89
8,95	10,96	12,67	14,15	15,50	16,75	17,89	18,98
8,74	10,76	12,46	13,83	15,19	16,44	17,47	18,56
8,73	10,75	12,46	13,83	15,19	16,43	17,47	18,56
9,15	11,17	12,87	14,46	15,81	17,06	18,31	19,40
9,90	11,92	13,62	15,58	16,93	18,18	19,80	20,89
9,15	11,17	12,87	14,45	15,81	17,06	18,30	19,39
9,38	11,39	13,10	14,79	16,15	17,39	18,75	19,84
9,69	11,71	13,41	15,26	16,61	17,86	19,37	20,46
8,80	10,82	12,52	13,93	15,29	16,53	17,61	18,70
9,30	11,32	13,02	14,68	16,03	17,28	18,60	19,69
8,69	10,71	12,41	13,77	15,12	16,37	17,39	18,48
9,61	11,63	13,33	15,15	16,50	17,75	19,23	20,32
8,92	10,94	12,65	14,12	15,47	16,72	17,85	18,94
8,90	10,92	12,62	14,08	15,43	16,68	17,80	18,89
8,42	10,44	12,14	13,36	14,72	15,96	16,85	17,93
8,35	10,36	12,07	13,25	14,60	15,85	16,69	17,78
8,33	10,35	12,05	13,22	14,57	15,82	16,65	17,74
8,60	10,62	12,32	13,63	14,99	16,24	17,21	18,30
8,53	10,55	12,25	13,52	14,88	16,13	17,06	18,15
9,12	11,13	12,84	14,40	15,76	17,00	18,23	19,32
9,02	11,04	12,74	14,26	15,62	16,86	18,04	19,13
9,29	11,30	13,01	14,66	16,01	17,26	18,57	19,66
8,10	10,12	11,82	12,88	14,24	15,49	16,21	17,30
8,93	10,95	12,65	14,12	15,48	16,72	17,86	18,95

Análise dos Dados

- **Construa** um **histograma em papel milimetrado**, usando os dados da tabela disponível no “site” da disciplina

Experimento # 1 - Pêndulo simples

Tabela com o tempo para 10 oscilações de alguns pêndulos.pdf

- **Avalie** graficamente a **média**, **desvio padrão** e **incerteza da média**
- Supondo que os dados apresentados foram tomados para dez oscilações de um pêndulo simples similar ao usado no laboratório, **calcule o comprimento do fio** do pêndulo utilizado

Tempo para 10 oscilações

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6	
A	B	C	D	E	F	G	H
(seg)	(seg)	(seg)	(seg)	(seg)	(seg)	(seg)	(seg)
8,90	10,92	12,62	14,08	15,44	16,68	17,80	18,89
8,95	10,96	12,67	14,15	15,50	16,75	17,89	18,98
8,74	10,76	12,46	13,83	15,19	16,44	17,47	18,56
8,73	10,75	12,46	13,83	15,19	16,43	17,47	18,56
9,15	11,17	12,87	14,46	15,81	17,06	18,31	19,40
9,90	11,92	13,62	15,58	16,93	18,18	19,80	20,89
9,15	11,17	12,87	14,45	15,81	17,06	18,30	19,39
9,38	11,39	13,10	14,79	16,15	17,39	18,75	19,84
9,69	11,71	13,41	15,26	16,61	17,86	19,37	20,46
8,80	10,82	12,52	13,93	15,29	16,53	17,61	18,70
9,30	11,32	13,02	14,68	16,03	17,28	18,60	19,69
8,69	10,71	12,41	13,77	15,12	16,37	17,39	18,48
9,61	11,63	13,33	15,15	16,50	17,75	19,23	20,32
8,92	10,94	12,65	14,12	15,47	16,72	17,85	18,94
8,90	10,92	12,62	14,08	15,43	16,68	17,80	18,89
8,42	10,44	12,14	13,36	14,72	15,96	16,85	17,93
8,35	10,36	12,07	13,25	14,60	15,85	16,69	17,78
8,33	10,35	12,05	13,22	14,57	15,82	16,65	17,74
8,60	10,62	12,32	13,63	14,99	16,24	17,21	18,30
8,53	10,55	12,25	13,52	14,88	16,13	17,06	18,15
9,12	11,13	12,84	14,40	15,76	17,00	18,23	19,32
9,02	11,04	12,74	14,26	15,62	16,86	18,04	19,13
9,29	11,30	13,01	14,66	16,01	17,26	18,57	19,66
8,10	10,12	11,82	12,88	14,24	15,49	16,21	17,30
8,93	10,95	12,65	14,12	15,48	16,72	17,86	18,95

Discussão dos dados: Comparação com o modelo

- O **valor medido** experimentalmente e o valor obtido através da **expressão matemática são iguais?**
- Como é possível compará-los?
- A medida do comprimento tem incerteza?
- Como você acha que isso vai afetar o valor do período obtido pela expressão matemática?

Resumo da aula de hoje:

- Pode-se afirmar que toda medida experimental apresenta um **erro**, que precisa ser estimado e compreendido:
 - **Erros sistemáticos:** afetam igualmente todos os dados medidos, independente de quantos dados tenham sido tomados.
 - **Erros aleatórios:** afetam de maneira diferente cada um dos dados medidos, causando variações dos valores obtidos em medições repetidas
- Representação e interpretação dos dados para verificação dos erros aleatórios:
 - Histogramas
 - Média, desvio padrão e desvio padrão da média

Para a próxima aula (31/03):

- Entrega do **Guia 1.2** completo (**um por grupo**)
- No Moodle:
 - Exercício **individual** (até as 6:30 hrs do dia 31/03)

Gisell Ruiz Boiset

gisell@if.usp.br

Bloco F – Conjunto
Alessandro Volta – sl. 209

