# Condições de contorno (B.C.)

As Eq. de Maxwell foram apresentadas no início deste curso na forma diferencial.
Elas devem ser suplementadas com condições de contorno e condições iniciais onde as derivadas não existem.
As B.C's podem ser derivadas a partir da forma integral das Eq. de Maxwell. (via teorema de Gauss)

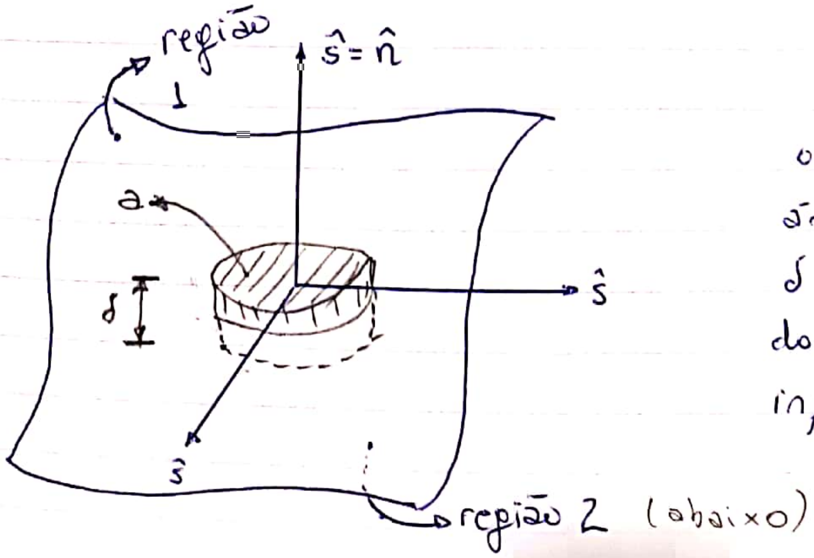
Assim, supondo interfaces estacionárias:

$$\oiint dS\, \hat{s}\times\bar{E} = -\frac{d}{dt}\iiint dV\bar{B} \qquad (1)$$

$$\oiint dS\, \hat{s}\times\bar{H} = \frac{d}{dt}\iiint dV\bar{D} + \iiint dV\bar{J} \qquad (2)$$

$$\oiint dS\, \hat{s}\cdot\bar{B} = 0 \qquad (3)$$

$$\oiint dS\, \hat{s}\cdot\bar{D} = \iiint dV\rho \qquad (4)$$




onde "a" é a área.
$\delta$ é a espessura do volume infinitesimal

Teorema de Gauss

$$\iiint dV\, \nabla\cdot\bar{A} = \oiint dS\, \hat{s}\cdot\bar{A} \qquad (a)$$

$$\iiint dV\, \nabla\times\bar{A} = \oiint dS\, \hat{s}\times\bar{A} \qquad (b)$$

(b) sai de (a) notando que

$$\nabla\cdot(\bar{C}\times\bar{A}) = -\bar{C}\cdot\nabla\times\bar{A}$$

$\bar{C}$ é um vetor constante independente da posição.

Assim, aplica-se o teorema de Gauss (a) em a $\nabla\cdot(\bar{C}\times\bar{A})$, obtendo

$$-\bar{C}\cdot\iiint dV\,\nabla\times\bar{A} = \oiint dS\,\hat{s}\cdot\bar{C}\times\bar{A} = -\bar{C}\cdot\oiint dS\,\hat{s}\times\bar{A}$$

q/ é (b) $\bar{C}\cdot$ em ambos os lados.
se $\bar{C}$ é arbitrário, tem-se (b).

Os vetores $\bar{E}, \bar{B}, \bar{D}$ e $\bar{H}$ são supostos finitos mas podem ser descontínuos através da interface.



$\bar{J}$ e $\rho$ podem ser infinitos, tal como em um condutor perfeito onde podemos definir a densidade de corrente superficial $\bar{J}_s = \delta \bar{J}$ no limite $\delta \to 0$ e $\bar{J} \to \infty$, assim como a densidade de carga superficial $\rho_s = \delta \rho$ no limite $\delta \to 0$ e $\rho \to \infty$.

Logo $\bar{J}_s$ em A/m
$\rho_s$ em Coulomb/$m^2$

1º passo: considere os termos em derivada no tempo de (1) e (2).
Como $dV$ é proporcional a "$\delta$", esses termos são cancelados já q/ $\delta \to 0$ e $\bar{B}$ e $\bar{D}$ são finitos.

2º passo: $\bar{J}$ e $\rho$ podem ser infinitos. Logo, o lado direito de (2) e (4) torna-se:

$\delta a \bar{J}$ e $\delta a \rho$ respectivamente.

No caso de $\bar{J}$ e $\rho$ serem finitos, esses dois termos são cancelados, já q/ são proporcionais a "$\delta$"

Quando existem cargas de superfície e corrente de superfície, esses termos são reescritos como:

$a \bar{J}_s$ e $a \rho_s$ respect.

Como $\delta \to 0$, não há contribuições da lateral do volume infinitesimal para as integrais no lado esquerdo de ① - ④.

Somente quando $\hat{s} = \hat{n}$ já que "a" ainda existe
Assim, os lados esquerdos de ① - ④ tornam-se

$$\oiint ds\, \hat{s} \times \bar{E} = a\, \hat{s} \times \bar{E}\Big|_{\rightleftarrows} = a\, \hat{n} \times \bar{E}\Big|_{\rightleftarrows} = a\hat{n} \times (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) \quad (5)$$

$$\oiint ds\, \hat{s} \times \bar{H} = a\, \hat{n} \times (\bar{H}_1 - H_2) \quad (6)$$

$$\oiint ds\, \hat{s} \cdot \bar{B} = a\, \hat{n} \cdot (\bar{B}_1 - \bar{B}_2) \quad (7)$$

$$\oiint ds\, \hat{s} \cdot \bar{D} = a\, \hat{n} \cdot (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) \quad (8)$$

Assim,

de ⑤. $\cancel{a}\, \hat{n} \times (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) = 0$

$$\boxed{\hat{n} \times (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) = 0} \quad (9)$$

de ⑥ $\cancel{a}\, \hat{n} \times (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) = \cancel{a}\, \bar{J}_s$

$$\boxed{\hat{n} \times (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) = \bar{J}_s} \quad (10)$$

de ⑦ $\cancel{a}\, \hat{n} \cdot (\bar{B}_1 - \bar{B}_2) = 0$

$$\boxed{\hat{n} \cdot (\bar{B}_1 - \bar{B}_2) = 0} \quad (11)$$

de ⑧ $\cancel{2}\,\hat{n} \cdot (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) = \cancel{2}\rho_s$

$$\boxed{\hat{n} \cdot (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) = \rho_s} \qquad (12)$$