Distribuições amostrais da média, variância e da proporção.
Teorema Central do Limite

5.3

Distribuição amostral

- Seja $X_1,X_2,\ldots,X_n$ uma amostra aleatória i.i.d. de tamanho n de uma população e seja $T(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ uma função real ou vetorial cujo domínio inclui o espaço amostral de $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$. Neste caso, dizemos que a variável ou vetor aleatório $Y = T(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ é chamado de **estatística**.

- A distribuição de probabilidade da estatística Y é chamada de **distribuição amostral** de Y.

- Uma estatística associada a algum parâmetro populacional é também chamada de **estimador**.

- Por exemplo, a distribuição de probabilidades de $\overline{X}$ é chamada de distribuição amostral da média.

Distribuição amostral da média

Distribuição amostral da média (com variância populacional conhecida)

A distribuição amostral da média é baseada nos resultados obtidos para $\overline{X}$ em todas as amostras possíveis de uma população conhecida, em que

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}.$$

Assim, a distribuição amostral da média nos dá uma ideia de como $\overline{X}$ varia quando mudamos de uma amostra para a outra.

Dessa forma, estudando a distribuição amostral de $\overline{X}$ poderemos avaliar o quanto estamos errando ao utilizarmos $\overline{X}$ para estimar μ.

Teorema central do limite (TCL)

Seja $\overline{X}$ a média amostral de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (amostra aleatória de tamanho n) de uma distribuição com média μ e desvio padrão σ ($0 < \sigma < \infty$). Então a distribuição da variável aleatória Z_n definida por

$$Z_n = \frac{\overline{X} - E(\overline{X})}{\sqrt{Var(\overline{X})}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}.$$

se **aproxima da distribuição normal padrão** quando **n tende ao infinito**. Ou seja, Z_n tem distribuição aproximadamente N(0,1) quando n tende ao infinito.

Assim, o TCL nos diz que $\overline{X}$ é assintoticamente distribuída como uma distribuição normal com média μ e variância σ^2/n. O mais impressionante do teorema central do limite é o fato de que nada é dito a respeito da função densidade f. Ou seja, qualquer que seja a função de distribuição, desde que ela tenha variância finita, a média amostral terá uma distribuição aproximadamente normal para amostras suficientemente grandes.

Observações

1. A distribuição das variáveis X pode ser discreta ou contínua.

2. A partir do TCL, chegamos às seguintes distribuições aproximadas:

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1),$$

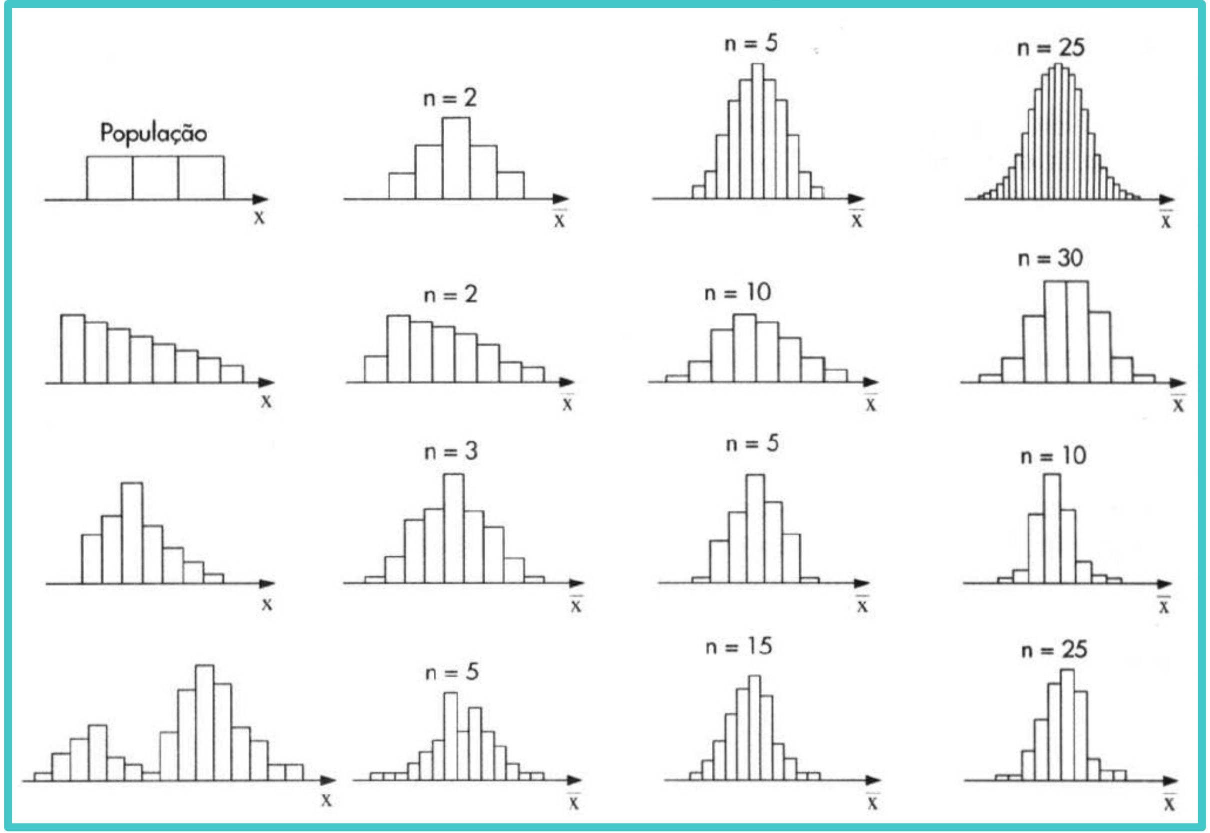
$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right),$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(n\mu, n\sigma^2\right).$$

3. Quanto **maior n**, **melhor** a aproximação. Como regra prática, para amostras de tamanho **n ≥ 30**, a distribuição de $\bar{X}$ pode ser **razoavelmente aproximada** por uma distribuição normal.

4. Devido às propriedades da distribuição normal, se a **população original é distribuída normalmente**, então a distribuição de $\bar{X}$ **é exatamente normal** para qualquer tamanho de amostra.
5. O erro-padrão de $\bar{X}$ é o seu desvio-padrão, ou seja, $\sigma/\sqrt{n}$.

Histogramas das distribuições amostrais da média para amostras de algumas populações



Fonte: Bussab, W. D. O., & Morettin, P. A. (2010). Estatística básica. In Estatística básica (pp. xvi-540).

Exemplo

Após arredondamento para o inteiro mais próximo, 48 números são somados. Os erros de arredondamento individuais são uniformemente distribuídos no intervalo (-0,5; 0,5). Qual a probabilidade de que a soma dos números arredondados seja diferente da verdadeira soma por mais de 3 unidades (em ambos os sentidos)?

Solução. Utilizando o teorema central do limite obtemos uma solução aproximada.
X_i, $i = 1,\dots,48$ são os erros de arredondamento tais que $X_i \sim U(-0,5; 0,5)$,
$E(X_i) = (-0,5 + 0,5) / 2 = 0$ e $Var(X_i) = [0,5 -(-0,5)]^2 / 12 = 1 / 12$.

O erro de arredondamento E é dado por $E = X_1 + X_2 + \dots + X_{48}$, sendo que a distribuição aproximada é $E \sim N(48 . 0 ; 48 . 1/12) = N(0,4)$.

Usando a distribuição aproximada,

$$P(E < -3) + P(E > 3) = 2\, P(E < -3) = 2\, P(Z < (-3-0) / 2) = 2\, P(Z < -1,5) = 0,1336.$$

Distribuição amostral da média (com variância populacional desconhecida)

Se o valor da variância não for conhecida, utilizaremos o estimador

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1},$$

para σ^2. Deste modo temos que

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$$

Distribuição t de Student com n – 1 graus de liberdade (g.l.).

Esse resultado **é válido se X tiver distribuição normal** mas, caso não seja, essa distribuição **é aproximada para tamanhos de amostra suficientemente grande** (utilizando o Teorema Central do Limite).

Distribuição t de Student

Seja Z uma variável aleatória com distribuição normal padrão e seja Y uma variável aleatória com distribuição qui-quadrado com ν graus de liberdade, com Z e Y independentes. Então

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Y/\nu}}$$

tem distribuição t de Student com ν graus de liberdade.

Notação: $T \sim t_\nu$.

Se T tem distribuição t de Student com ν graus de liberdade, então sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(t;\nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{(\nu+1)}{2}\right)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi\nu}}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{(\nu+1)}{2}}, \quad se \quad -\infty < t < \infty$$

e sua esperança e variância são dadas, respectivamente, por

$$\mathrm{E}(T) = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Var}(T) = \frac{\nu}{\nu-2}.$$

Distribuições normal e t de Student

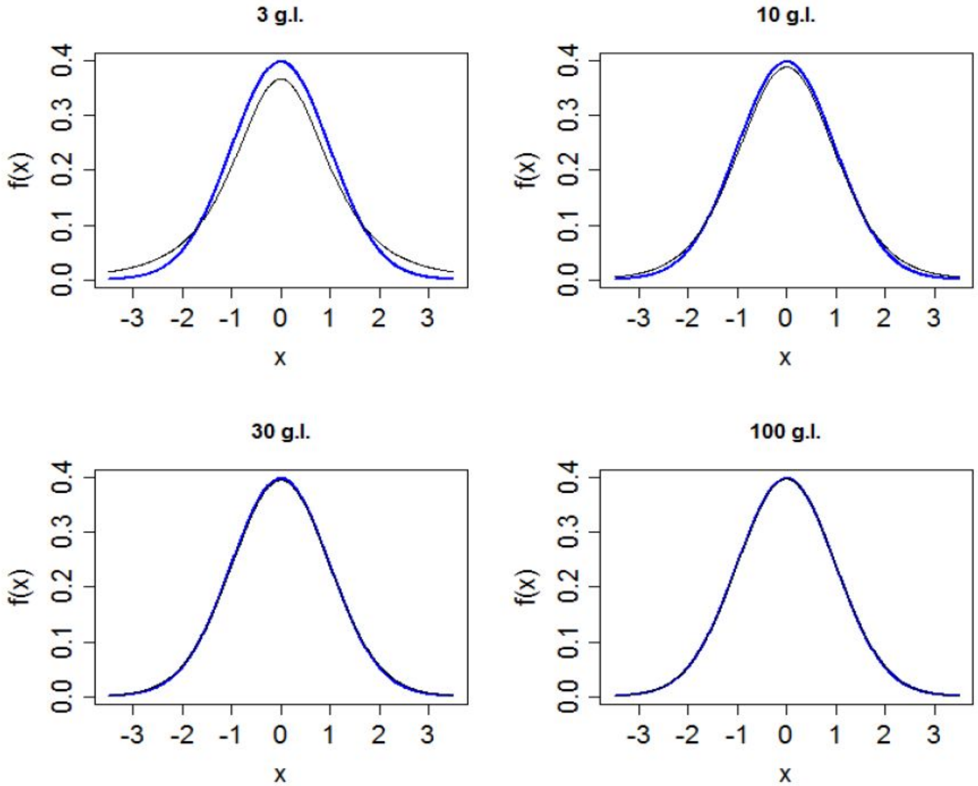
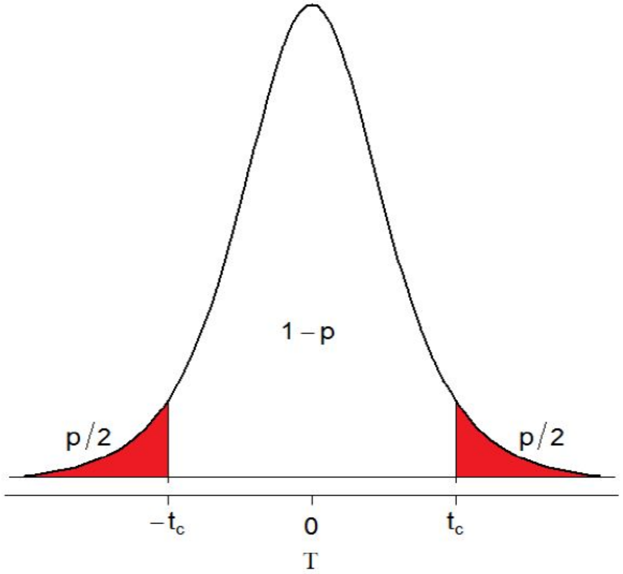
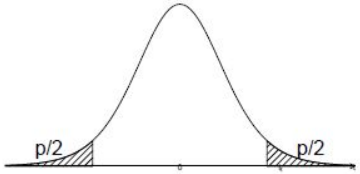


Tabela da distribuição t de Student



A tabela da distribuição t de Student contém os valores de t_c ($t_c > 0$) tais que
$P(-t_c \leq T \leq t_c) = 1 - p$ correspondentes a **alguns valores de *p*** e para **alguns graus de liberdade**.

Distribuição t de Student



	90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	9%	8%	7%	6%	5%	4%	3%	2%	1%	0.5%	0.2%	0.1%
2	0.142	0.289	0.445	0.617	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	3.104	3.320	3.578	3.896	4.303	4.849	5.643	6.965	9.925	14.089	22.327	31.599
3	0.137	0.277	0.424	0.584	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	2.471	2.605	2.763	2.951	3.182	3.482	3.896	4.541	5.841	7.453	10.215	12.924
4	0.134	0.271	0.414	0.569	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.226	2.333	2.456	2.601	2.776	2.999	3.298	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.132	0.267	0.408	0.559	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.098	2.191	2.297	2.422	2.571	2.757	3.003	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.131	0.265	0.404	0.553	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.019	2.104	2.201	2.313	2.447	2.612	2.829	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.130	0.263	0.402	0.549	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	1.966	2.046	2.136	2.241	2.365	2.517	2.715	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.130	0.262	0.399	0.546	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	1.928	2.004	2.090	2.189	2.306	2.449	2.634	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.129	0.261	0.398	0.543	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	1.899	1.973	2.055	2.150	2.262	2.398	2.574	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.129	0.260	0.397	0.542	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	1.877	1.948	2.028	2.120	2.228	2.359	2.527	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.129	0.260	0.396	0.540	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	1.859	1.928	2.007	2.096	2.201	2.328	2.491	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.128	0.259	0.395	0.539	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	1.844	1.912	1.989	2.076	2.179	2.303	2.461	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.128	0.259	0.394	0.538	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	1.832	1.899	1.974	2.060	2.160	2.282	2.436	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.128	0.258	0.393	0.537	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	1.821	1.887	1.962	2.046	2.145	2.264	2.415	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.128	0.258	0.393	0.536	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	1.812	1.878	1.951	2.034	2.131	2.249	2.397	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.128	0.258	0.392	0.535	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	1.805	1.869	1.942	2.024	2.120	2.235	2.382	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.128	0.257	0.392	0.534	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	1.798	1.862	1.934	2.015	2.110	2.224	2.368	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.127	0.257	0.392	0.534	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	1.792	1.855	1.926	2.007	2.101	2.214	2.356	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.127	0.257	0.391	0.533	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	1.786	1.850	1.920	2.000	2.093	2.205	2.346	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.127	0.257	0.391	0.533	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	1.782	1.844	1.914	1.994	2.086	2.197	2.336	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.127	0.257	0.391	0.532	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	1.777	1.840	1.909	1.988	2.080	2.189	2.328	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.127	0.256	0.390	0.532	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	1.773	1.835	1.905	1.983	2.074	2.183	2.320	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.127	0.256	0.390	0.532	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	1.770	1.832	1.900	1.978	2.069	2.177	2.313	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24	0.127	0.256	0.390	0.531	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	1.767	1.828	1.896	1.974	2.064	2.172	2.307	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	1.764	1.825	1.893	1.970	2.060	2.167	2.301	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	1.761	1.822	1.890	1.967	2.056	2.162	2.296	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.127	0.256	0.389	0.531	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	1.758	1.819	1.887	1.963	2.052	2.158	2.291	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	1.756	1.817	1.884	1.960	2.048	2.154	2.286	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	1.754	1.814	1.881	1.957	2.045	2.150	2.282	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	1.752	1.812	1.879	1.955	2.042	2.147	2.278	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
35	0.127	0.255	0.388	0.529	0.682	0.852	1.052	1.306	1.690	1.744	1.803	1.869	1.944	2.030	2.133	2.262	2.438	2.724	2.996	3.340	3.591
40	0.126	0.255	0.388	0.529	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	1.737	1.796	1.862	1.936	2.021	2.123	2.250	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	0.126	0.255	0.388	0.528	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	1.729	1.787	1.852	1.924	2.009	2.109	2.234	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	0.126	0.254	0.387	0.527	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	1.723	1.781	1.845	1.917	2.000	2.099	2.223	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
120	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.709	1.766	1.828	1.899	1.980	2.076	2.196	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373

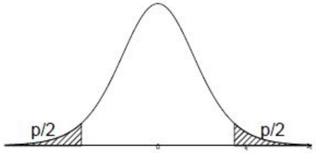
Tabela 2: Quantis da Distribuição t. Graus de liberdade na margem esquerda da tabela e probabilidades p dadas no topo da tabela tal que $\frac{p}{2} = P[t \geq t_t]$.

Exemplo

Calcule a probabilidade P(T > 2,201) em uma amostra de tamanho n=12.

Solução: Se n=12, então T ~ t_{12-1}.

Distribuição t de Student



	90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	9%	8%	7%	6%	5%	4%	3%	2%	1%	0.5%	0.2%	0.1%
2	0.142	0.289	0.445	0.617	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	3.104	3.320	3.578	3.896	4.303	4.849	5.643	6.965	9.925	14.089	22.327	31.599
3	0.137	0.277	0.424	0.584	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	2.471	2.605	2.763	2.951	3.182	3.482	3.896	4.541	5.841	7.453	10.215	12.924
4	0.134	0.271	0.414	0.569	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.226	2.333	2.456	2.601	2.776	2.999	3.298	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.132	0.267	0.408	0.559	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.098	2.191	2.297	2.422	2.571	2.757	3.003	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.131	0.265	0.404	0.553	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.019	2.104	2.201	2.313	2.447	2.612	2.829	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.130	0.263	0.402	0.549	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	1.966	2.046	2.136	2.241	2.365	2.517	2.715	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.130	0.262	0.399	0.546	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	1.928	2.004	2.090	2.189	2.306	2.449	2.634	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.129	0.261	0.398	0.543	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	1.899	1.973	2.055	2.150	2.262	2.398	2.574	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.129	0.260	0.397	0.542	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	1.877	1.948	2.028	2.120	2.228	2.359	2.527	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.129	0.260	0.396	0.540	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	1.859	1.928	2.007	2.096	2.201	2.328	2.491	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.128	0.259	0.395	0.539	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	1.844	1.912	1.989	2.076	2.179	2.303	2.461	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318

Assim, P(T > 2,201) = 0,05 / 2 = 0,025

Distribuição amostral da proporção

Distribuição amostral da proporção

Suponha que queremos determinar a proporção de sucessos *p* de uma certa população. Logo, podemos definir uma variável aleatória X da seguinte maneira

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se ocorre sucesso,} \\ 0, & \text{se ocorre fracasso.} \end{cases}$$

Assim, temos que X é uma variável discreta, com distribuição de Bernoulli tal que
μ = E(X) = p e σ^2 = Var(X) = *p*(1 - *p*).

Retirada uma amostra aleatória $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de tamanho n dessa população, e indicando por Y_n o total de sucessos nesta amostra ($Y_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$), sabemos que

$$Y_n \sim \text{Binomial}(n, p).$$

Sabemos que $\hat{p}$ é o estimador para *p*, em que

$$\hat{p} = \frac{Y_n}{n}.$$

Podemos escrever que

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = n \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} = n\overline{X}$$

mas, pelo Teorema Central do Limite, $\bar{X}$ terá distribuição aproximadamente normal, com média *p* e variância *p*(1-*p*)/n, ou seja

$$\overline{X} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right).$$

Note que $\bar{X}$, na expressão acima, é a própria variável $\hat{p}$ e, desse modo, para n grande podemos considerar a distribuição amostral de *p* como aproximadamente normal

$$\boxed{\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)}$$

e a transformação $Y_n = n\overline{X}$ terá a distribuição

$$Y_n \sim N(np, np(1-p)).$$

Exemplo

O presidente de uma distribuidora acredita que 30% das encomendas feitas na firma são provenientes de clientes que compram pela primeira vez. Suponha que o presidente esteja correto e que a proporção populacional seja 30%. Uma amostra aleatória simples de 100 pedidos será usado para estimar a proporção de clientes que compram pela primeira vez.

a. Qual a distribuição amostral das proporções amostrais?
b. Qual a probabilidade da proporção amostral ser estar no intervalo (0,20 ; 0,40)?

a) $\hat{p} \sim N\left(0{,}3 ; \frac{0{,}3.(1-0{,}3)}{n=100}\right)$

b) $P(0{,}2 < \hat{p} < 0{,}4) = P\left(\frac{0{,}2-0{,}3}{\sqrt{\frac{0{,}3.0{,}7}{100}}} < Z < \frac{0{,}4-0{,}3}{\sqrt{\frac{0{,}3.0{,}7}{100}}}\right) = P(-2{,}18 < Z < 2{,}18)$

$= \underline{\underline{0{,}97}}.$

Distribuição amostral da variância

Distribuição amostral da variância

Temos que a estatística s² é um estimador não viciado da variância σ^2. Vamos estudar agora a distribuição de s².

A estatística amostral da variância é

$$Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2},$$

em que σ^2 é a variância da população. É possível mostrar que

$$Q \sim \chi^2_{\text{n-1}}.$$

Esse resultado **é válido se X tiver distribuição normal** mas, caso não seja, essa distribuição **é aproximada para tamanhos de amostra suficientemente grande** (utilizando o Teorema Central do Limite).

Distribuição qui-quadrado

Sejam Z_1, Z_2, ..., Z_n, variáveis aleatórias independentes com distribuição normal padrão.

Então

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 ,$$

tem distribuição qui-quadrado com n graus de liberdade.

Notação: $Y \sim \chi_n^2 .$

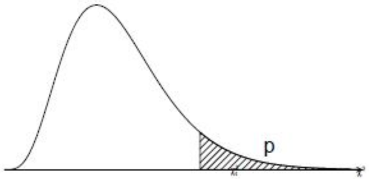
Se Y tem distribuição qui-quadrado com n graus de liberdade, então sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(y;n) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n/2)\ 2^{n/2}} \cdot y^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-y/2}, & se\, y > 0 \\ 0, & se\, y < 0 \end{cases}$$

e sua esperança e variância são dadas, respectivamente, por

E(Y) = n e Var(Y) = 2n.

Distribuição χ^2



	99%	98%	97.5%	95%	90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	5%	4%	2.5%	2%	1%	0.2%	0.1%
1	0.000	0.001	0.001	0.004	0.016	0.064	0.148	0.275	0.455	0.708	1.074	1.642	2.706	3.841	4.218	5.024	5.412	6.635	9.550	10.828
2	0.020	0.040	0.051	0.103	0.211	0.446	0.713	1.022	1.386	1.833	2.408	3.219	4.605	5.991	6.438	7.378	7.824	9.210	12.429	13.816
3	0.115	0.185	0.216	0.352	0.584	1.005	1.424	1.869	2.366	2.946	3.665	4.642	6.251	7.815	8.311	9.348	9.837	11.345	14.796	16.266
4	0.297	0.429	0.484	0.711	1.064	1.649	2.195	2.753	3.357	4.045	4.878	5.989	7.779	9.488	10.026	11.143	11.668	13.277	16.924	18.467
5	0.554	0.752	0.831	1.145	1.610	2.343	3.000	3.655	4.351	5.132	6.064	7.289	9.236	11.070	11.644	12.833	13.388	15.086	18.907	20.515
6	0.872	1.134	1.237	1.635	2.204	3.070	3.828	4.570	5.348	6.211	7.231	8.558	10.645	12.592	13.198	14.449	15.033	16.812	20.791	22.458
7	1.239	1.564	1.690	2.167	2.833	3.822	4.671	5.493	6.346	7.283	8.383	9.803	12.017	14.067	14.703	16.013	16.622	18.475	22.601	24.322
8	1.646	2.032	2.180	2.733	3.490	4.594	5.527	6.423	7.344	8.351	9.524	11.030	13.362	15.507	16.171	17.535	18.168	20.090	24.352	26.124
9	2.088	2.532	2.700	3.325	4.168	5.380	6.393	7.357	8.343	9.414	10.656	12.242	14.684	16.919	17.608	19.023	19.679	21.666	26.056	27.877
10	2.558	3.059	3.247	3.940	4.865	6.179	7.267	8.295	9.342	10.473	11.781	13.442	15.987	18.307	19.021	20.483	21.161	23.209	27.722	29.588
11	3.053	3.609	3.816	4.575	5.578	6.989	8.148	9.237	10.341	11.530	12.899	14.631	17.275	19.675	20.412	21.920	22.618	24.725	29.354	31.264
12	3.571	4.178	4.404	5.226	6.304	7.807	9.034	10.182	11.340	12.584	14.011	15.812	18.549	21.026	21.785	23.337	24.054	26.217	30.957	32.909
13	4.107	4.765	5.009	5.892	7.042	8.634	9.926	11.129	12.340	13.636	15.119	16.985	19.812	22.362	23.142	24.736	25.472	27.688	32.535	34.528
14	4.660	5.368	5.629	6.571	7.790	9.467	10.821	12.078	13.339	14.685	16.222	18.151	21.064	23.685	24.485	26.119	26.873	29.141	34.091	36.123
15	5.229	5.985	6.262	7.261	8.547	10.307	11.721	13.030	14.339	15.733	17.322	19.311	22.307	24.996	25.816	27.488	28.259	30.578	35.628	37.697
16	5.812	6.614	6.908	7.962	9.312	11.152	12.624	13.983	15.338	16.780	18.418	20.465	23.542	26.296	27.136	28.845	29.633	32.000	37.146	39.252
17	6.408	7.255	7.564	8.672	10.085	12.002	13.531	14.937	16.338	17.824	19.511	21.615	24.769	27.587	28.445	30.191	30.995	33.409	38.648	40.790
18	7.015	7.906	8.231	9.390	10.865	12.857	14.440	15.893	17.338	18.868	20.601	22.760	25.989	28.869	29.745	31.526	32.346	34.805	40.136	42.312
19	7.633	8.567	8.907	10.117	11.651	13.716	15.352	16.850	18.338	19.910	21.689	23.900	27.204	30.144	31.037	32.852	33.687	36.191	41.610	43.820
20	8.260	9.237	9.591	10.851	12.443	14.578	16.266	17.809	19.337	20.951	22.775	25.038	28.412	31.410	32.321	34.170	35.020	37.566	43.072	45.315
21	8.897	9.915	10.283	11.591	13.240	15.445	17.182	18.768	20.337	21.991	23.858	26.171	29.615	32.671	33.597	35.479	36.343	38.932	44.522	46.797
22	9.542	10.600	10.982	12.338	14.041	16.314	18.101	19.729	21.337	23.031	24.939	27.301	30.813	33.924	34.867	36.781	37.659	40.289	45.962	48.268
23	10.196	11.293	11.689	13.091	14.848	17.187	19.021	20.690	22.337	24.069	26.018	28.429	32.007	35.172	36.131	38.076	38.968	41.638	47.391	49.728
24	10.856	11.992	12.401	13.848	15.659	18.062	19.943	21.652	23.337	25.106	27.096	29.553	33.196	36.415	37.389	39.364	40.270	42.980	48.812	51.179
25	11.524	12.697	13.120	14.611	16.473	18.940	20.867	22.616	24.337	26.143	28.172	30.675	34.382	37.652	38.642	40.646	41.566	44.314	50.223	52.620
26	12.198	13.409	13.844	15.379	17.292	19.820	21.792	23.579	25.336	27.179	29.246	31.795	35.563	38.885	39.889	41.923	42.856	45.642	51.627	54.052
27	12.879	14.125	14.573	16.151	18.114	20.703	22.719	24.544	26.336	28.214	30.319	32.912	36.741	40.113	41.132	43.195	44.140	46.963	53.023	55.476
28	13.565	14.847	15.308	16.928	18.939	21.588	23.647	25.509	27.336	29.249	31.391	34.027	37.916	41.337	42.370	44.461	45.419	48.278	54.411	56.892
29	14.256	15.574	16.047	17.708	19.768	22.475	24.577	26.475	28.336	30.283	32.461	35.139	39.087	42.557	43.604	45.722	46.693	49.588	55.792	58.301
30	14.953	16.306	16.791	18.493	20.599	23.364	25.508	27.442	29.336	31.316	33.530	36.250	40.256	43.773	44.834	46.979	47.962	50.892	57.167	59.703
35	18.509	20.027	20.569	22.465	24.797	27.836	30.178	32.282	34.336	36.475	38.859	41.778	46.059	49.802	50.928	53.203	54.244	57.342	63.955	66.619
40	22.164	23.838	24.433	26.509	29.051	32.345	34.872	37.134	39.335	41.622	44.165	47.269	51.805	55.758	56.946	59.342	60.436	63.691	70.618	73.402
45	25.901	27.720	28.366	30.612	33.350	36.884	39.585	41.995	44.335	46.761	49.452	52.729	57.505	61.656	62.901	65.410	66.555	69.957	77.179	80.077
50	29.707	31.664	32.357	34.764	37.689	41.449	44.313	46.864	49.335	51.892	54.723	58.164	63.167	67.505	68.804	71.420	72.613	76.154	83.657	86.661

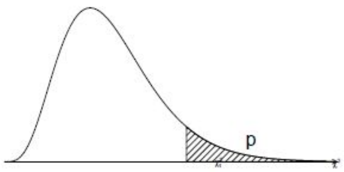
Tabela 3: Quantis da Distribuição χ^2. Graus de liberdade na margem esquerda da tabela e probabilidades p dadas no topo da tabela tal que $p = P[\chi^2 \geq \chi_t^2]$.

Exemplo

Calcule a probabilidade da estatística Q assumir um valor maior do que 20,48, quando n = 11.

Solução: Se n=11, então $Q \sim \chi^2_{11-1}$.

Distribuição χ^2



	99%	98%	97.5%	95%	90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	5%	4%	2.5%	2%	1%	0.2%	0.1%
1	0.000	0.001	0.001	0.004	0.016	0.064	0.148	0.275	0.455	0.708	1.074	1.642	2.706	3.841	4.218	5.024	5.412	6.635	9.550	10.828
2	0.020	0.040	0.051	0.103	0.211	0.446	0.713	1.022	1.386	1.833	2.408	3.219	4.605	5.991	6.438	7.378	7.824	9.210	12.429	13.816
3	0.115	0.185	0.216	0.352	0.584	1.005	1.424	1.869	2.366	2.946	3.665	4.642	6.251	7.815	8.311	9.348	9.837	11.345	14.796	16.266
4	0.297	0.429	0.484	0.711	1.064	1.649	2.195	2.753	3.357	4.045	4.878	5.989	7.779	9.488	10.026	11.143	11.668	13.277	16.924	18.467
5	0.554	0.752	0.831	1.145	1.610	2.343	3.000	3.655	4.351	5.132	6.064	7.289	9.236	11.070	11.644	12.833	13.388	15.086	18.907	20.515
6	0.872	1.134	1.237	1.635	2.204	3.070	3.828	4.570	5.348	6.211	7.231	8.558	10.645	12.592	13.198	14.449	15.033	16.812	20.791	22.458
7	1.239	1.564	1.690	2.167	2.833	3.822	4.671	5.493	6.346	7.283	8.383	9.803	12.017	14.067	14.703	16.013	16.622	18.475	22.601	24.322
8	1.646	2.032	2.180	2.733	3.490	4.594	5.527	6.423	7.344	8.351	9.524	11.030	13.362	15.507	16.171	17.535	18.168	20.090	24.352	26.124
9	2.088	2.532	2.700	3.325	4.168	5.380	6.393	7.357	8.343	9.414	10.656	12.242	14.684	16.919	17.608	19.023	19.679	21.666	26.056	27.877
10	2.558	3.059	3.247	3.940	4.865	6.179	7.267	8.295	9.342	10.473	11.781	13.442	15.987	18.307	19.021	20.483	21.161	23.209	27.722	29.588
11	3.053	3.609	3.816	4.575	5.578	6.989	8.148	9.237	10.341	11.530	12.899	14.631	17.275	19.675	20.412	21.920	22.618	24.725	29.354	31.264

Assim, P(Q > 20,48) = 0,025