

LISTA 7: INFERÊNCIA ESTATÍSTICA - SME0320

Exercício 1. Seja X uma variável aleatória com distribuição Bernoulli(p) e X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória de X . Encontre o estimador de máxima verossimilhança para p .

Exercício 2. Seja X uma variável aleatória. Encontre o estimador de máxima verossimilhança para p nos seguintes casos.

- (a) $X \sim Exp(\mu)$. (b) $X \sim Pois(\mu)$.

Exercício 3. Considere uma população com N elementos e variância populacional $\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^2$, em que $\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$ é a média populacional. Um possível estimador para σ^2 , baseado em uma amostra aleatória simples de tamanho n extraída dessa população é

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Mostre que $\hat{\sigma}^2$ é um estimador viciado para σ^2 .

Dica: Use $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu + \mu - \bar{X})^2$.

Exercício 4. A tabela abaixo apresenta o resultado de uma amostra aleatória de velocidades de motoristas multados em uma parte da rodovia interestadual, em Connecticut:

Variável	n	Média	D. padrão	IC (95%)
Velocidade	81	67,3849	3,3498	[66,6554; 68,1144]

- (a) Identifique o valor da estimativa pontual da média populacional μ .
 (b) Expresse o intervalo de confiança no formato $\bar{x} \pm \varepsilon$.

Exercício 5. Suponha que uma associação de defesa de consumidores deseja estimar o consumo médio um novo modelo de automóvel que será lançado no mercado. Para fazer esta verificação, a associação observa uma amostra de 10 veículos, conduzidos por motoristas treinados, num percurso de 100 milhas. O consumo, em galões, foi registrado com os seguintes resultados:

$$\sum_{i=1}^n x_i = 43,28 \qquad \sum_{i=1}^n x_i^2 = 188,4886.$$

Assumindo que estes valores representam uma amostra aleatória de uma variável normalmente distribuída com média μ e variância σ^2 .

- (a) Calcule estimativas pontuais para μ e σ^2 .
 (b) Calcule um intervalo de 75% de confiança para σ^2 .

Exercício 6. Dado que a população de homens de certa cidade tem pesos distribuídos normalmente com média 78,47Kg e desvio-padrão 13,61Kg, determinar a probabilidade de:

- (a) Um homem escolhido aleatoriamente pesar mais de 81,65Kg.
 (b) Em 36 homens escolhidos aleatoriamente, o peso médio ser superior a 81,65Kg.

Exercício 7. Uma instituição de caridade deseja realizar uma obra que custa R\$3500,00 em sua sede. Entre os contribuintes habituais dessa instituição, cada um pode contribuir com algo em torno de R\$130,00 \pm um desvio padrão de R\$90,00. Se 45 dessas pessoas se quotizarem para levantar fundos com essa finalidade, qual a probabilidade de que eles consigam pelo menos o montante necessário?

Exercício 8. O Comitê organizador de um congresso científico contratou 5 hotéis da cidade onde vai se realizar esse evento para hospedar os 1000 congressistas inscritos. Cada um desses hotéis só têm quartos individuais e só poderá hospedar os participantes do congresso durante esse período. Admita que cada congressista escolherá de forma aleatória para qual dos 5 hotéis ele vai se dirigir. O Hotel X é um desses 5 hotéis e tem capacidade para acomodar 210 pessoas.

- (a) Qual a probabilidade de que o Hotel X consiga acomodar todos os congressistas que o procurarem?
 (b) Qual a probabilidade de que pelo menos $p = 90\%$ do total de quartos do Hotel X sejam ocupados?

Exercício 9. Ache o valor crítico $z_{\alpha/2}$ que corresponde ao nível de confiança dado por:

- (a) 99%. (b) 90%. (c) 98%. (d) 99,5%.

Exercício 10. Ache o valor crítico $t_{\alpha/2}^{(n-1)}$ que corresponde ao nível de confiança e tamanho da amostra dados por:

- (a) 99% e $n = 31$. (c) 98% e $n = 121$.
 (b) 90% e $n = 41$. (d) 99,8% e $n = 36$.

Exercício 11. Calcule o intervalo de confiança para a média de uma $N(\mu, \sigma^2)$ em cada um dos casos abaixo:

- (a) $\bar{x} = 170\text{cm}$; $n = 100$; $\sigma = 15\text{cm}$; $\alpha = 5\%$.
 (b) $\bar{x} = 165\text{cm}$; $n = 184$; $\sigma = 30\text{cm}$; $\alpha = 15\%$.

Exercício 12. Expresse os intervalos abaixo na forma de $\hat{p} \pm \varepsilon$:

- (a) $0,222 \leq p \leq 0,444$ (c) $[0,206; 0,286]$
 (b) $0,600 \leq p \leq 0,800$ (d) $[0,287; 0,387]$

Exercício 13. Uma amostra de 100 cidades brasileiras, de até 20 mil habitantes, indicou que o valor médio da hora aula para professores do ensino fundamental em escolas municipais é de 2,50 reais. Obtenha um intervalo de confiança para o valor médio nacional da hora aula em cidades do tipo mencionado, Baseado em estudos anteriores, o desvio padrão populacional é assumido igual 1,10 reais. Fixe $\gamma = 0,95$ ($\gamma = 1 - \alpha$ é o coeficiente de confiança).

Exercício 14. Por analogia a produtos similares, o tempo de reação de um novo medicamento pode ser considerado como tendo distribuição Normal com desvio padrão igual a 2 min. Vinte pacientes foram sorteados, receberam a medicação e tiveram seu tempo de reação anotado. Os dados foram os seguinte (em min):

2,9	3,4	3,5	4,1	4,6	4,7	4,5	3,8	5,3	4,9
4,8	5,7	5,8	5,0	3,4	5,9	6,3	4,6	5,5	6,2

Obtenha um intervalo de confiança para o tempo médio de reação. Fixe o coeficiente de confiança do intervalo em 96%.

Exercício 15. Uma amostra aleatória de 625 donas de casa revela que 70% delas preferem a marca A de detergente. Construir um intervalo de confiança para $p =$ proporção das donas de casa que preferem A com nível de confiança de 90%, considerando as abordagens otimista e conservativa.

Exercício 16. Considere a amostra:

9 8 12 7 9 6 11 6 10 9,

extraída de uma população normal.

- (a) Construir o intervalo de confiança de 95% para μ .
 (b) Construir o intervalo de confiança de 90% para σ^2 .

Exercício 17. Será coletada uma amostra de uma população Normal com variância igual a 81. Para uma confiança de 90%, determine a amplitude do intervalo de confiança para a média populacional nos casos em que o tamanho da amostra é 30, 50 e 100. Comente as diferenças.

Exercício 18. Numa pesquisa com 50 eleitores, o candidato X obteve 0,34 da preferência dos eleitores. Construa, para a confiança 94%, o intervalo de confiança para a proporção de votos a serem recebidos pelo candidato mencionado, supondo que a eleição fosse nesse momento.

Exercício 19. Admitindo que a pressão sanguínea arterial em homens siga o modelo Normal, 7 pacientes foram sorteados e tiveram sua pressão medida com os seguintes resultados: 84, 81, 77, 85, 69, 80 e 79. Determine o intervalo de confiança para a pressão arterial média masculina com coeficiente de confiança de 98%.

Exercício 20. Um administrador de empresa está interessado em estimar a proporção (p) de funcionários de uma grande indústria que são favoráveis à nova política de participação dos funcionários nos lucros da empresa.

- (a) Determine o tamanho da amostra necessário para que o erro cometido na estimação seja de, no máximo, 0,05 com probabilidade de 85%.
 (b) Suponha que ele acredita que essa proporção está entre 70% e 80%. Com essa informação, qual deve ser o tamanho da amostra?
 (c) Em uma pesquisa realizada com 180 funcionários sorteados dessa indústria, 130 foram favoráveis à nova política. Construa um intervalo de confiança de 90% para p .

Exercício 21. Suponha que estejamos interessados em estimar a porcentagem de consumidores de um certo produto. Se a amostra de tamanho 300 forneceu 100 indivíduos que consomem o dado produto, determine o intervalo de confiança de p , com coeficiente de confiança de 95%. Interprete o resultado.

Exercício 1. $\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$.

Exercício 2.

(a) $\hat{\mu} = \frac{1}{\bar{X}}$.

(b) $\hat{\mu} = \bar{X}$.

Exercício 3. Demonstração.

Exercício 4.

(a) $\hat{\mu} = \bar{x} = 67,3849$.

(b) $67,3849 \pm 0,7295$.

Exercício 5.

(a) 4,328 e 0,1303.

(b) [0,0842; 0,2602].

Exercício 6.

(a) 0,4090.

(b) 0,0808.

Exercício 7. 0,9999.

Exercício 8.

(a) 0,797.

(b) 0,818.

Exercício 9.

(a) 2,576.

(b) 1,645.

(c) 2,325.

(d) 2,81.

Exercício 10.

(a) 2,750.

(b) 1,684.

(c) 2,358.

(d) 3,340.

Exercício 11.

(a) [167,06; 172,94].

(b) [161,82; 168,18].

Exercício 12.

(a) $0,333 \pm 0,111$.

(b) $0,700 \pm 0,100$.

(c) $0,246 \pm 0,040$.

(d) $0,337 \pm 0,050$.

Exercício 13. $IC_{\mu}(0.95) = [2.284; 2.716]$.

Exercício 14. $\bar{X} = 4.745$ e $IC_{\mu}(0.96) = [3.826; 5.664]$

Exercício 15. Ot.: [0,670; 0,730]; Con.: [0,667; 0,733].

Exercício 16.

(a) [7,27; 10,13].

(b) [2,13; 10,81].

Exercício 17.

$n = 30$, amplitude do $IC_{\mu}(0.90) = 5.406$

$n = 50$, amplitude do $IC_{\mu}(0.90) = 4.187$

$n = 100$, amplitude do $IC_{\mu}(0.90) = 2.961$

Exercício 18. $IC_p(0.94) = [0.214; 0.466]$

Exercício 19. $IC_{\mu}(0,98) = [72,973; 85,598]$.

Exercício 20.

(a) $n = 207,36 \approx 208$.

(b) $n = 174,18 \approx 175$.

(c) $IC_p(0,90) = [0,667; 0,777]$.

Exercício 21.