

LISTA 2: VARIÁVEIS ALEATÓRIAS - SME0320

Exercício 1. Considere W a variável aleatória definida como o número de caras menos o número de coroas com três jogadas de uma moeda.

- (a) Considerando a moeda honesta, liste os elementos do espaço amostral para três lançamentos da moeda e, para cada ponto amostral, atribua um valor de w de W .
- (b) Assumindo que a moeda seja viciada, de modo que cara seja duas vezes mais provável de ocorrer do que uma coroa, determine a distribuição de probabilidade da variável aleatória W e também a função de distribuição acumulada.

Exercício 2. Certo tipo de equipamento eletrônico pode funcionar por uma quantidade de tempo aleatório X . Se a densidade de X é dada em unidade de meses, por

$$f(x) = \begin{cases} Cxe^{-\frac{x}{2}}, & \text{para } x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Obtenha o valor de C e calcule a probabilidade de que o equipamento funcione por pelo menos 4 meses?

Exercício 3. Seja X uma variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2), & \text{se } -1 < x < 1, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- (a) Qual o valor de c ?
- (b) Obtenha a função distribuição acumulada de X .
- (c) Determine $E(X)$ e $Var(X)$.

Exercício 4. Seja X uma variável aleatória contínua, com fdp dada por

$$f(x) = \begin{cases} ax, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ a, & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ -ax + 3a, & \text{se } 2 < x \leq 3 \\ 0, & \text{para quaisquer outros valores} \end{cases}$$

- (a) Determine a constante a .
- (b) Determine a função distribuição acumulada X .

Exercício 5. Suponha que a duração da vida (em horas) de certa válvula seja uma variável aleatória contínua X com fdp dada por $f(x) = 100/x^2$, para $x > 100$, e zero caso contrário.

- (a) Qual será a probabilidade de que uma válvula dure menos de 200 horas, se soubermos que ela ainda está funcionando após 150 horas de serviço?
- (b) Se três dessas válvulas forem instaladas em um conjunto, qual será a probabilidade de que exatamente uma delas tenha de ser substituída após 150 horas de serviço?
- (c) Qual será o número máximo de válvulas que poderá ser colocado em um conjunto, de modo que exista uma probabilidade de 0,5 de que após 150 horas de serviço todas elas estejam funcionando?

Exercício 6. Três cartas são retiradas, sucessivamente, de um baralho sem reposição. Determine a distribuição de probabilidade para a variável aleatória “número de espadas”.

Exercício 7. Seja X a variável aleatória com a seguinte distribuição de probabilidade

x	-3	6	9
$f(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Calcule $E[(2X + 1)^2]$, utilizando os cálculos de $E(X)$ e $E(X^2)$.

Exercício 8. Determine o valor de $c \in \mathbb{R}$, de modo que a função a seguir represente uma distribuição de probabilidade da variável aleatória X .

$$f(x) = c \binom{5}{x} \binom{7}{4-x} \quad \text{para } x = 0, 1, 2.$$

Exercício 9. Suponha que um conjunto de 116 celulares contenham 6 com defeitos e 110 que funcionem normalmente. Se X é o número de celulares defeituosos em uma amostra de 18 celulares escolhidos aleatoriamente do conjunto, determine a $P(X > 3)$.

Exercício 10. A demanda diária de arroz em um supermercado, em centenas de quilos, é uma variável aleatória X com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{3} + 1, & \text{se } 1 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- (a) Qual a probabilidade, em um dia escolhido ao acaso, de se vender mais do que 150 Kg?
- (b) Em 30 dias, quanto o gerente do supermercado espera vender?
- (c) Qual a quantidade de arroz que deve ser deixada à disposição do público diariamente para que não falte o produto em 95% dos dias?

Exercício 11. A percentagem de álcool ($100X$) em certo composto pode ser considerada uma variável aleatória, em que X , $0 < X < 1$, tem a seguinte fdp: $f(x) = 20x^3(1-x)$, $0 < x < 1$.

- (a) Obtenha a função distribuição acumulada de X .
- (b) Calcule $P(X \leq 2/3)$.
- (c) Suponha que o preço de venda desse composto dependa do conteúdo de álcool. Especificamente, se $1/3 < X < 2/3$, o composto se vende por C_1 dólares/galão; caso contrário, ele se vende por C_2 dólares/galão. Se o custo for C_3 dólares/galão, calcule a distribuição de probabilidade do lucro líquido por galão.

Exercício 12. Demonstre as seguintes propriedades do valor esperado de uma variável aleatória X :

- (a) Se $X = C$, onde C é uma constante, então $E(X) = C$.
- (b) Se C é uma constante, então $E(CX) = CE(X)$.

Exercício 13. Demonstre as seguintes propriedades da variância de uma variável aleatória X :

- (a) Se C for uma constante, então $Var(X + C) = Var(X)$.
- (b) Se C for uma constante, então $Var(CX) = C^2 Var(X)$.

Exercício 14. Um vendedor de cachorro quente trabalha na porta do estádio do Morumbi em dias de jogo. Ele pode deixar preparado 5, 6 ou 7 dúzias de sanduíches, que custam a ele R\$5 a dúzia. Sabe-se que a procura por cachorro quente (X), no seu ponto, é uma variável aleatória com a seguinte função de probabilidade:

X	4	5	6	7
p_i	0,2	0,3	0,3	0,2

Sabe-se que cada dúzia de sanduíche é vendida a R\$12 e os sanduíches não vendidos vão para um canil que paga R\$2 pela dúzia. Qual é o número de dúzias de sanduíches que devem ser preparados de modo a maximizar o lucro médio do vendedor?

Exercício 15. A variável aleatória contínua X tem fdp $f(x) = 3x^2$, $-1 \leq x \leq 0$, se b for um número que satisfaça a $-1 < b < 0$, calcule $P(X > b | X < b/2)$.

Exercício 16. Suponha que f e g sejam fdp no mesmo intervalo $a \leq x \leq b$.

- (a) Verifique que $f + g$ não é uma fdp nesse intervalo.
- (b) Verifique que, para todo β , $0 < \beta < 1$, $\beta f(x) + (1 - \beta)g(x)$ é uma fdp nesse intervalo.

Exercício 17. Considere uma variável aleatória X com densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & \text{para } 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule a $P(0,8 \leq X \leq 1,9)$.

Exercício 18. Determine o valor da constante $c \in \mathbb{R}$, de modo que a função a seguir represente uma densidade de probabilidade.

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x)^2, & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{c+1}, & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

GABARITO LISTA 2: VARIÁVEIS ALEATÓRIAS - SME0320

Exercício 1.

(a)
$$\frac{W}{w} \begin{array}{c|cccccccc} \text{CCC} & \text{CCK} & \text{CKC} & \text{KCC} & \text{KKK} & \text{KKC} & \text{KCK} & \text{CKK} \\ \hline 3 & 1 & 1 & 1 & -3 & -1 & -1 & -1 \end{array}$$

(b) – Função distribuição de probabilidade

$$\begin{array}{c|cccc} w & -3 & -1 & 1 & 3 \\ \hline f(w) & \frac{1}{27} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{8}{27} \end{array}$$

– Função de distribuição acumulada

$$F(w) = \begin{cases} 0 & \text{se } w < -3 \\ \frac{1}{27} & \text{se } -3 \leq w < -1 \\ \frac{3}{27} & \text{se } -1 \leq w < 1 \\ \frac{19}{27} & \text{se } 1 \leq w < 3 \\ 1 & \text{se } w \geq 3 \end{cases}$$

Exercício 2. 0, 1991, com $C = 0, 25$.

Exercício 3.

(a) $c = 0, 75$.

(b)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq -1 \\ \frac{3x}{4} - \frac{x^3}{4} + \frac{1}{2} & \text{se } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

(c) $E(X) = 0$ e $Var(X) = 0, 2$.

Exercício 4.

(a) $a = 0, 5$.

(b)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \frac{x}{2} - \frac{1}{4} & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ -\frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2} - \frac{5}{4} & \text{se } 2 < x \leq 3 \\ 1 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

Exercício 5.

(a) 0, 25.

(b) 0, 22.

(c) $n = 2$.

Exercício 6.

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{703}{1700}$	$\frac{741}{1700}$	$\frac{117}{850}$	$\frac{11}{850}$

Exercício 7. 209

Exercício 8. $c = 0, 0024$.

Exercício 9. 0, 0052.

Exercício 10.

(a) 37, 5%.

(b) 4000Kg.

(c) 245Kg.

Exercício 11.

(a)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 5x^4 - 4x^5 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

(b) 0, 4609.

(c)

$$P(L = y) = \begin{cases} \frac{101}{243} & y = C_1 - C_3 \\ \frac{142}{243} & y = C_2 - C_3 \end{cases}$$

Exercício 12. Demonstração.

Exercício 13. Demonstração.

Exercício 14. 6 dúzias.

Exercício 15. $-\frac{7b^3}{b^3 + 8}$

Exercício 16. Demonstração.

Exercício 17. 0, 675.

Exercício 18. $c = 3$.