



Universidade do Porto

Faculdade de Engenharia

FEUP

Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial

Secção de Mecânica Aplicada

MECÂNICA
DO
CONTACTO HERTZIANO

Jorge H. O. Seabra

2ª Edição

2003

Prefácio

Em 1882, Heinrich Hertz publicou um trabalho intitulado “*On the contact of elastic bodies*”, o qual é considerado o início da Mecânica do Contacto enquanto assunto de interesse científico.

Desde esse momento inúmeros trabalhos têm sido publicados neste domínio, o que atesta da sua relevância científica e tecnológica, já que são muitos os órgãos de máquinas cujo bom desempenho está directamente relacionado com os conceitos da Mecânica do Contacto Hertziano, nomeadamente, os dentes de engrenagens, os rolamentos, os sistemas came-impulsor, o sistema roda-carril, assim como muitos outros.

A importância do tema levou o Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial a inclui-lo no Plano de Estudos da Opção de Projecto de Máquinas do Curso de Licenciatura em Engenharia Mecânica, no âmbito da disciplina de Tribologia, e no Plano de Estudos do Perfil de Construções Mecânicas do Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica, à semelhança do que acontece em muitas outras Escolas de Engenharia.

Este texto tem um carácter eminentemente didáctico. Ao longo dos seis capítulos que o integram são desenvolvidos, de um modo progressivo, os conceitos teóricos básicos da Mecânica do Contacto Hertziano, de modo a permitir a análise de qualquer problema típico de contacto entre sólidos de revolução elásticos, mesmo tendo em conta a rugosidade das superfícies em contacto.

No capítulo 1 faz-se uma introdução sucinta da Mecânica do Contacto e dos principais tipos de contacto. São ainda apresentados algumas aplicações típicas.

Os capítulos 2 e 3 são dedicados à análise dos semi-espacos elásticos, quando submetidos a solicitações concentradas, lineares ou pontuais. A abstracção do semi-espaco elástico é um conceito fundamental da Teoria da Elasticidade, necessário à formulação da Teoria de Hertz (capítulo 4) e à determinação das tensões no interior dos sólidos em contacto (capítulo 5). Tratam-se portanto de conceitos teóricos de base.

No capítulo 4 é formulada a teoria de HERTZ para o contacto entre sólidos de revolução elásticos. O capítulo começa por analisar a geometria dos sólidos em contacto, propor um modelo de contacto e formular o problema de contacto entre sólidos elásticos de revolução. Em seguida, recorrendo à aproximação do semi-espaco elástico (Capítulos 2 e 3) é desenvolvida a solução de Hertz para o problema genérico de contacto, a qual permite

determinar as pressões normais, as dimensões da área de contacto e a penetração entre os sólidos em contacto.

Depois de conhecidas as pressões de contacto e as dimensões da área de contacto, determinadas pela teoria de Hertz (Capítulo 4), e recorrendo às soluções da teoria elasticidade desenvolvidas para o semi-espaço elástico (Capítulos 2 e 3) é possível caracterizar com detalhe o estado de tensão no interior dos sólidos em contacto sendo este o principal objectivo do capítulo 5. O campo de tensões é analisado, quer em termos dos valores máximos das tensões e da sua localização, quer da sua variação durante cada ciclo de carga.

O Capítulo 6 é dedicado a estudar a influência da rugosidade das superfícies em contacto sobre as pressões de contacto, as dimensões da área de contacto e as tensões instaladas no interior dos sólidos. As superfícies lisas são uma abstracção física e matemática, pelo que a influência da rugosidade é muito importante na avaliação real das solicitações e tensões instaladas, tendo repercussões muito significativas na resistência das superfícies à fadiga de contacto e à plastificação.

A primeira edição deste texto foi realizada durante o ano lectivo de 1997/98, período durante o qual beneficiei de Licença Sabática. Os meus agradecimentos à Universidade do Porto, à Faculdade de Engenharia, ao Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial, e à Secção de Mecânica Aplicada, pela concessão dessa Licença Sabática.

O meu muito obrigado ao Doutor Armando José Vilaça de Campos pelo apoio técnico na produção informática deste texto.

Finalmente, o meu agradecimento à minha mulher e filhos, pela muita paciência e apoio, sem os quais a realização deste texto seria impossível.

Jorge H. O. Seabra

Porto

2003

*En mémoire du
Professeur Daniel Berthe*

*Em memória do
Professor Daniel Berthe*

ÍNDICE

Capítulo 1 -	INTRODUÇÃO	1
1.1	Aplicações da Mecânica do Contacto	1
1.2	Tipos de contacto	3
1.3	Exemplos típicos de contactos	4
Capítulo 2 -	SEMI-ESPAÇO ELÁSTICO SUBMETIDO A UMA SOLICITAÇÃO LINEAR	9
2.1	O semi-espaço elástico	9
2.2	Equações da Elasticidade para o estado plano de deformação	12
2.3	Força normal concentrada	15
2.4	Força tangencial concentrada	19
2.5	Pressão normal distribuída	22
2.6	Pressões normal e tangencial distribuídas – Caso geral	25
Capítulo 3 -	SEMI-ESPAÇO ELÁSTICO SUBMETIDO A UMA SOLICITAÇÃO PONTUAL	29
3.1	Solicitação pontual	29
3.2	Funções potenciais de Boussinesq e Cerruti	31
3.3	Solicitação puramente normal	34
3.4	Solicitação normal concentrada	36
3.5	Pressão normal distribuída	41
3.6	Pressão de Hertz aplicada sobre uma área circular	42
3.7	Pressão Hertz aplicada sobre uma área elíptica	46
Capítulo 4 -	CONTACTO NORMAL ENTRE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO ELÁSTICOS – TEORIA DE HERTZ	51
4.1	Apresentação do problema	51
4.2	Modelo de contacto (formulação do problema)	55
4.2.1	<i>Geometria das superfícies no estado não deformado</i>	55
4.2.2	<i>Geometria das superfícies no estado deformado</i>	59
4.2.3	<i>Pressões de contacto</i>	61
4.2.4	<i>Equilíbrio do sistema</i>	61
4.2.5	<i>Forma da superfície de contacto</i>	62
4.3	Teoria de HERTZ	62
4.3.1	<i>Solução do problema de HERTZ</i>	63
4.3.2	<i>Solução do problema de HERTZ através de tabelas ou ábacos</i>	67
4.4	Contacto pontual circular	73
4.5	Contacto linear	75

Capítulo 5 -	TENSÕES NO INTERIOR DE SÓLIDOS EM CONTACTO	79
5.1	Tensões no interior de sólidos em contacto pontual	79
5.1.1	<i>Tensões principais segundo OZ</i>	80
5.1.2	<i>Tensões de corte principais</i>	83
5.1.3	<i>Tensão de corte ortogonal</i>	87
5.2	Tensões no interior de sólidos em contacto linear	94
5.2.1	<i>Tensões principais segundo OZ</i>	95
5.2.2	<i>Valores máximos das tensões segundo OZ</i>	96
5.2.3	<i>Tensão de corte ortogonal</i>	98
5.2.4	<i>Variação das tensões durante um ciclo de carga</i>	100
5.3	Tensões no interior de sólidos em contacto linear – solicitações normal e tangencial	101
5.3.1	<i>Tensões principais segundo OZ</i>	102
5.3.2	<i>Tensão de corte máxima</i>	105
5.3.3	<i>Tensão de corte octaédrica máxima</i>	106
5.3.4	<i>Influência do coeficiente de atrito</i>	108
5.3.5	<i>Variação da tensão de corte durante um ciclo de carga</i>	110
Capítulo 6 -	INFLUÊNCIA DA RUGOSIDADE DAS SUPERFÍCIES EM CONTACTO	113
6.1	Rugosidade das superfícies	113
6.2	Influência da rugosidade sobre a distribuição de pressão e a área de contacto	114
6.2.1	<i>Contacto entre um cilindro de geratriz sinusoidal e um plano</i>	114
6.2.2	<i>Contacto entre um cilindro e uma superfície plana rugosa</i>	121
6.2.3	<i>Contacto entre um elipsóide e uma superfície plana de geratriz sinusoidal</i>	125
6.3	Influência da rugosidade sobre a distribuição de tensões no interior de um sólido em contacto	131

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 Aplicações da Mecânica do Contacto

As teorias de contacto entre corpos elásticos analisam o comportamento dos sólidos em contacto, submetidos a uma dada solitação, de modo a determinar os correspondentes deslocamentos, deformações e tensões instaladas.

Estas teorias foram estabelecidas no âmbito da Mecânica dos Meios Contínuos Elásticos entre 1880 e 1895, recorrendo à teoria de Boussinesq e Cerutti para a análise dos semi-espacos elásticos, e à teoria de Hertz para o contacto normal entre sólidos elásticos [1, 2, 3].

Os conceitos de Mecânica do Contacto aplicam-se em várias áreas de conhecimento, nomeadamente em Resistência de Materiais e em Tribologia.

Em Resistência dos Materiais é importante conhecer as tensões e deformações que ocorrem nos pontos de aplicação das forças, de modo a dimensionar correctamente as ligações e evitar as deformações irreversíveis ou os fenómenos de fadiga. A figura 1.1 mostra dois exemplos típicos de tais ligações.

Em Tribologia (Contactos Hertzianos e Lubrificação Elastohidrodinâmica) os conhecimentos de Mecânica do Contacto são fundamentais na determinação das tensões e deformações na zona de contacto entre elementos mecânicos.

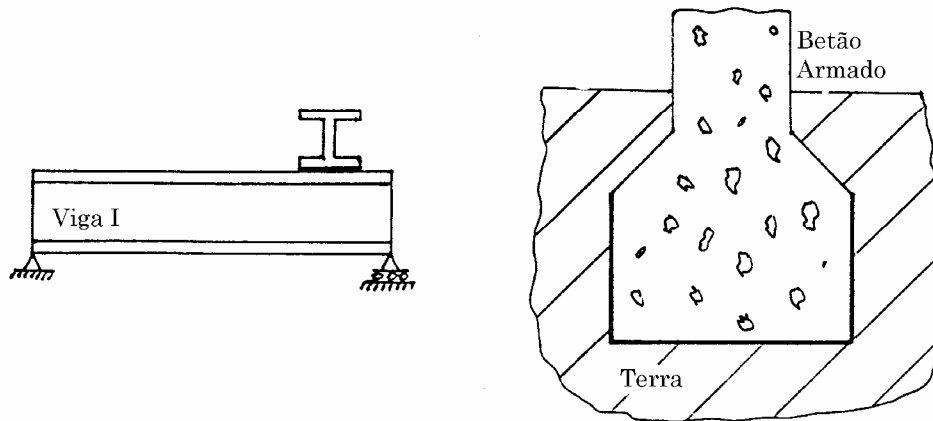


Figura 1.1 – Aplicação da Mecânica do Contacto à Resistência dos Materiais.

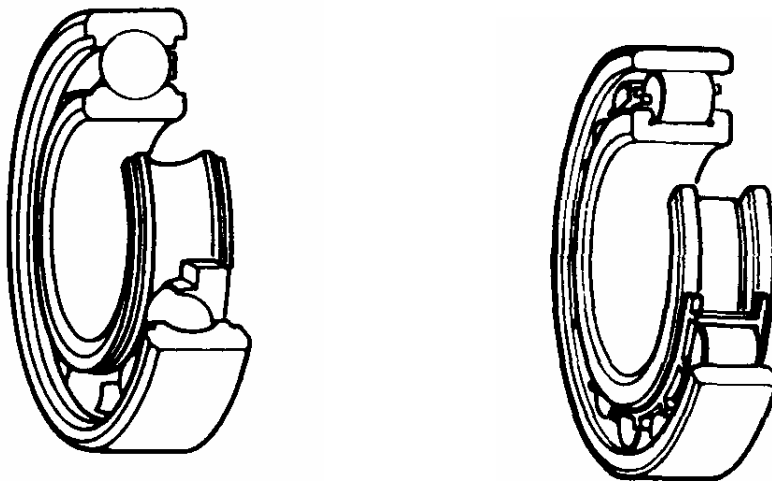


Figura 1.2 – Aplicação da Mecânica do Contacto à Tribologia [4].

Tais noções aplicam-se a vários tipos de elementos mecânicos, nomeadamente às engrenagens, rolamentos e sistemas came/impulsor, em condições cinemáticas de rolamento puro ou de rolamento e deslizamento, em contacto seco ou lubrificado. A figura 1.2 mostra um exemplo típico de contacto entre os corpos rolantes e as pistas interior e exterior de um rolamento, sendo visíveis as tensões instaladas nos vários sólidos em contacto.

1.2 Tipos de contacto

Antes da aplicação de qualquer solicitação, a forma geométrica das superfícies que limitam os sólidos em contacto, ou as peças mecânicas em geral, permitem diferenciar três tipos de contactos, como se mostra na figura 1.3:

- i) Segundo um ponto (ex. esfera/esfera), designado de **contacto pontual**;
- ii) Segundo uma linha (ex. cilindro/cilindro, de eixos paralelos), designado de **contacto linear**;
- iii) Segundo uma superfície (ex. plano/plano), designado de **contacto superficial**;

A teoria de Hertz só é aplicável aos contactos pontuais e lineares.

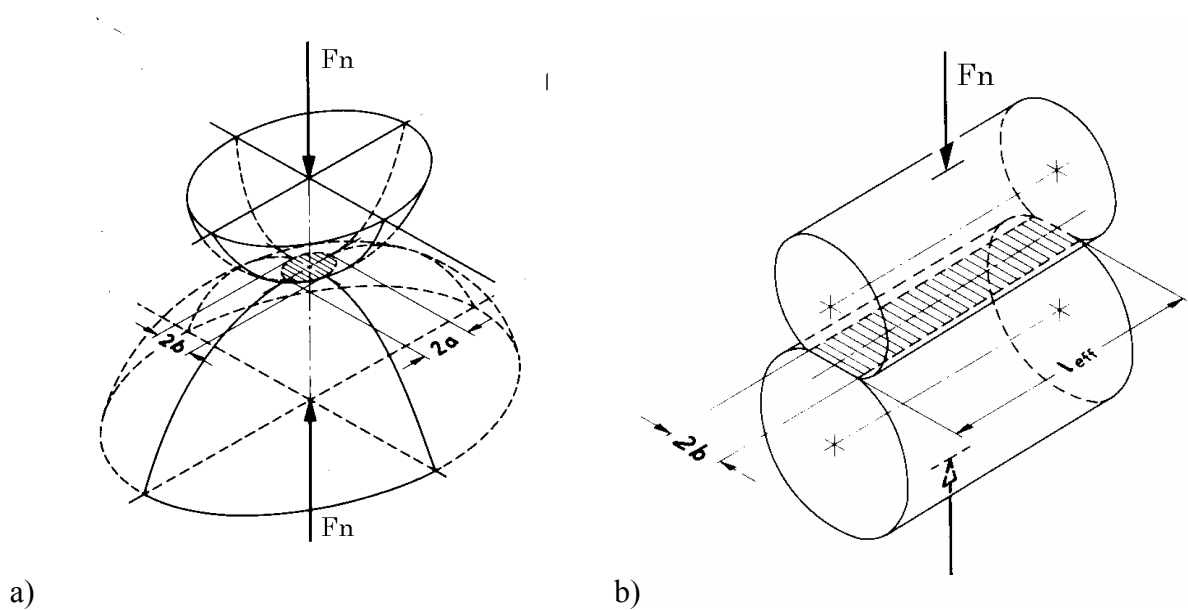


Figura 1.3 – Tipos de contacto: a) pontual; b) linear [5].

Um contacto pode ainda designar-se como **contraformal** ou **conformal**, consoante as superfícies dos dois sólidos em contacto são ambas convexas, ou uma é convexa e a outra côncava, isto é, consoante as curvatura das duas superfícies são ambas positivas, ou uma é positiva e a outra negativa, como se pode ver na figura 1.4.

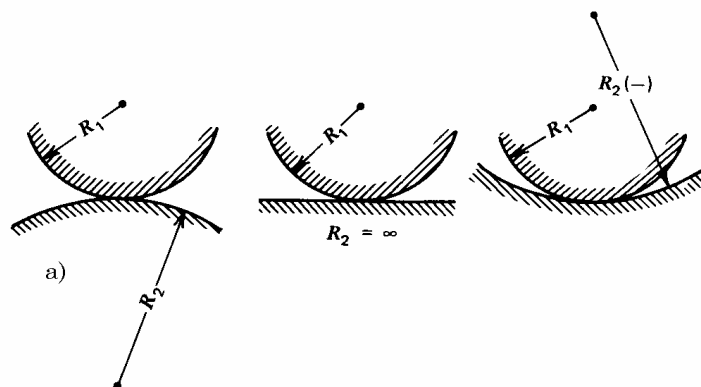


Figura 1.4 – Contactos contraformais e conformais [3].

1.3 Exemplos típicos de contactos

Nas figuras 1.5 a 1.9 exemplificam-se alguns dos exemplos mais correntes de contactos entre elementos mecânicos, nomeadamente, o contacto pontual roda/carril, o contacto pontual came/impulsor, os vários tipos de contactos pontuais e lineares no interior de um rolamento, e o contacto entre as faces dos dentes de uma engrenagem.

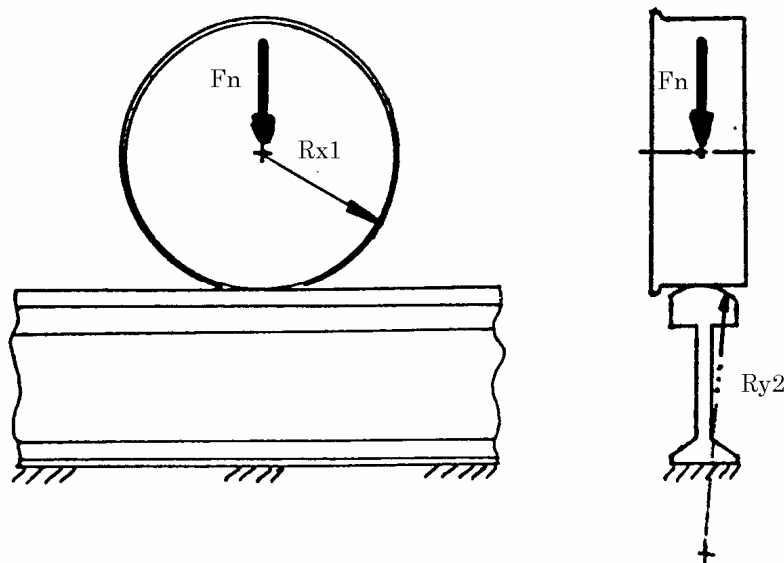


Figura 1.5 – Contacto pontual roda/carril.

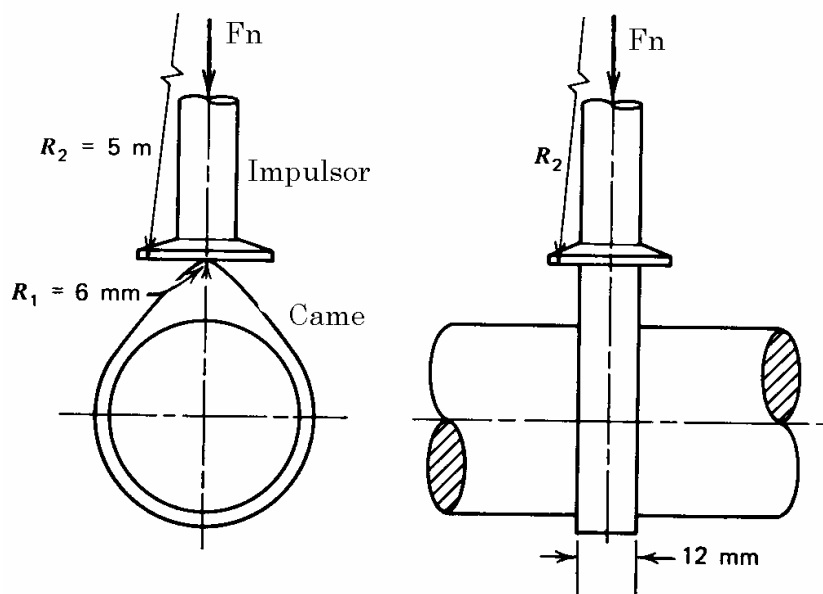


Figura 1.6 – Contacto pontual came/impulsor [3].

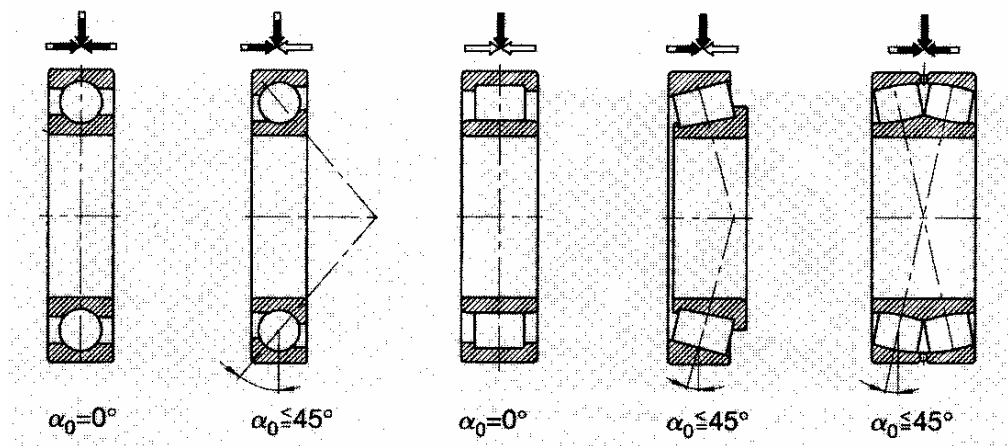


Figura 1.7 – Contactos pontuais ou lineares no interior de um rolamento [6].



Figura 1.8 – Franjas isocromáticas num contacto rolo/pista de um rolamento [7].

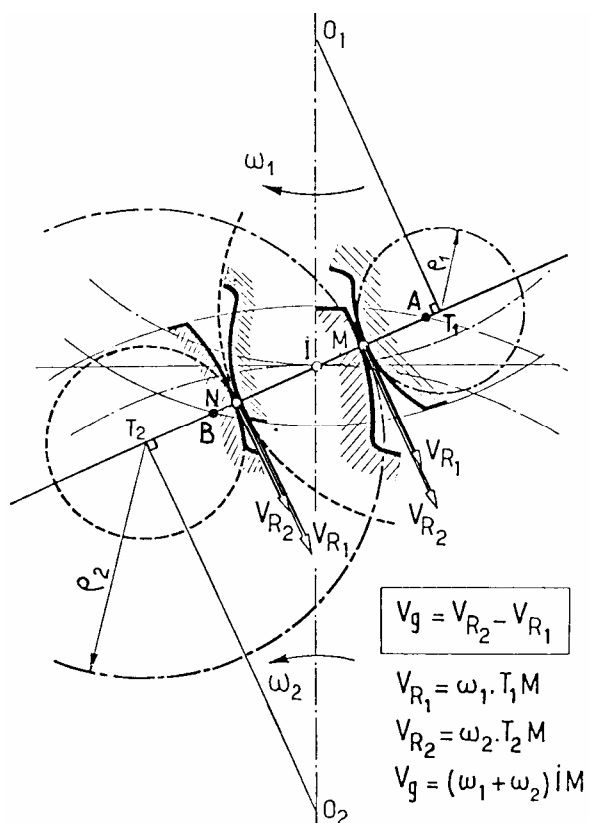


Figura 1.9 – Contacto entre as faces dos dentes de uma engrenagem [8].

Referências do Capítulo 1:

- [1] K. L. Jonhson, “Contact Mechanics”, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1985. ISBN-0-521-25576-7.
- [2] Timoshenko e Goodier, “Theory of Elasticity”, 3rd Edition, McGraw-Hill Kogakusha, Lda, Tôquio, Japão, 1970. ISBN-0-47-085805-5.
- [3] A. P. Boresi, e al. “Advanced Mechanics of Materials” 3rd Edition, John Wiley & Sons, New York, USA, 1978. ISBN-0-471-08892-7.
- [4] SNR Roulements, “Les Roulements”, Éditions Nathan-Communication, Paris, F, 1988. ISBN-2-86479-428-8.
- [5] Eschman, Hasbargen e Weigand, “Ball and Roller Bearings – Theory, Design and Application”, 2nd Edition, John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1985. ISBN-0-471-26283-8.
- [6] “FAG Rolling Bearings”, Catalogue WL 41 520/2 EA, FAG Edition, December 1996.
- [7] “Managing the Microworld: Research & Development at SKF”, Published by SKF Group Headquarters, Publication 4442E, 1995-08.
- [8] J. Ayel, “Introduction à la Lubrification des Engrenages”, em “*La Lubrification Industrielle, Tome 1, IV-Engrenages*”, Publications de l’Institut Français du Pétrole, Éditions Technip, Paris, F, 1984. ISBN-2-7108-0471-9.

CAPÍTULO 2

SEMI-ESPAÇO ELÁSTICO SUBMETIDO A UMA SOLICITAÇÃO LINEAR

2.1 O semi-espaço elástico

Dois corpos elásticos de superfícies não conformes, em contacto, cujas deformações sejam suficientemente pequenas de modo a que a teoria da elasticidade linear (pequenas deformações lineares) seja aplicável, originam, quando solicitados por uma força exterior, uma pequena área de contacto, cujas dimensões são muito pequenas quando comparadas com os raios de curvatura das superfícies não deformadas.

As pressões de contacto e as correspondentes tensões instaladas estão altamente concentradas na vizinhança da zona de contacto, diminuindo rapidamente de intensidade com a distância ao ponto inicial de contacto. Logo a zona de interesse prático situa-se junto à área de contacto.

Assim, quando as dimensões dos sólidos em contacto são significativamente maiores que as dimensões da área de contacto, verifica-se que as tensões na zona de contacto quase não dependem da geometria dos sólidos em zonas afastadas do contacto nem do modo como estão ligados ao exterior.

As tensões podem ser calculadas com excelente aproximação considerando cada corpo como um semi-sólido infinito, elástico, limitado por uma superfície plana e submetido a uma solicação concentrada, isto é, um **semi-espaco elástico** [1, 2, 3].

Neste capítulo analisam-se as tensões e deformações num semi-espaco elástico, submetido a uma solicação unidimensional ao longo de uma muito estreita banda (solicação linear), como se mostra na figura 2.1.

No sistema de eixos de referêncica a superfície limite do semi-espaco elástico é representada pelo plano XOY ($z = 0$), e o eixo z está dirigido para o interior do sólido.

A solicação está uniformemente distribuída segundo um banda estreita paralela ao eixo y , e tem uma largura $(a+b)$ segundo a direcção x . A solicação tem componentes tangenciais e normais que são apenas função da coordenada x . Considera-se ainda que a solicação aplicada produz um estado plano de deformação ($\varepsilon_y = 0$) no semi-espaco elástico.

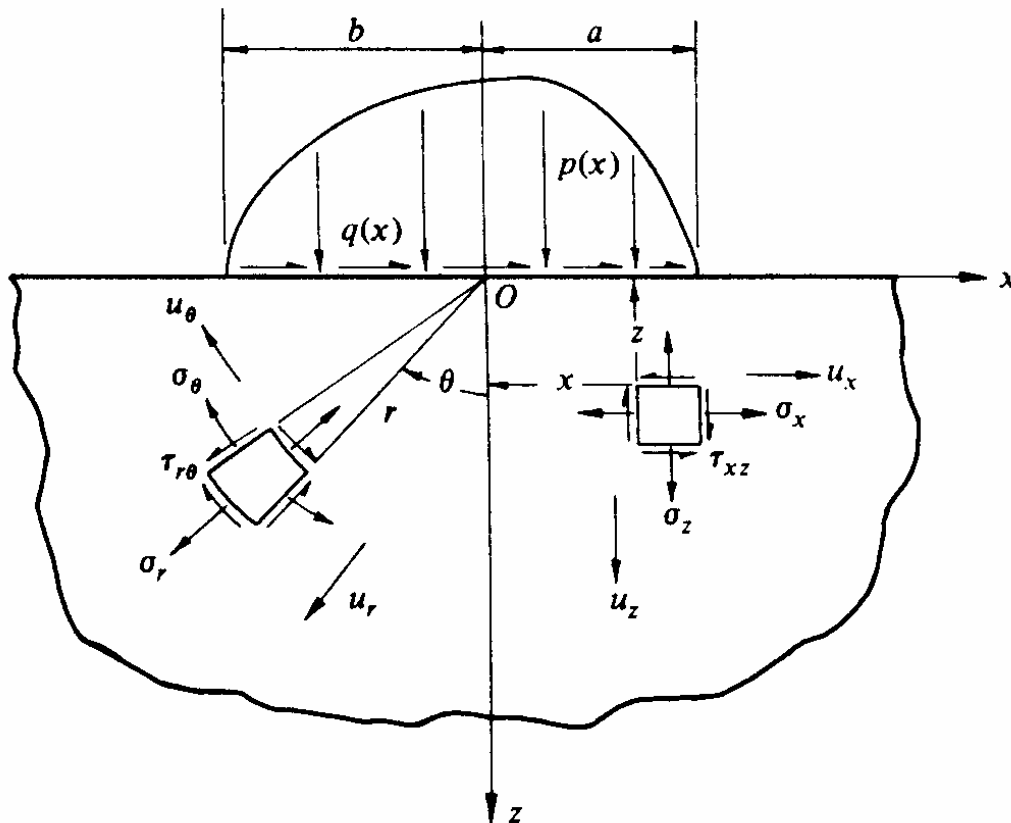


Figura 2.1 – Semi-espaco elástico submetido a uma solicação linear [1].

De modo a que a hipótese do estado plano de deformação seja plausível, a largura do sólido deve ser significativamente maior que a largura da zona sollicitada ($a+b$).

O caso extremo oposto, estado plano de tensão ($\sigma_y = 0$), ocorre quando a largura do sólido é da mesma ordem de grandeza da largura da zona sollicitada, situação rara nas aplicações correntes de engenharia.

Na figura 2.1 mostra-se uma secção recta do semi-espaco elástico, estando representadas as pressões superficiais normais $p(x)$ e tangenciais $q(x)$ actuando sobre a superfície na zona $-b < x < a$, enquanto o resto da superfície não está submetida a qualquer sollicitação.

Pretende-se determinar, em qualquer ponto do interior ou da superfície do semi-espaco elástico, as componentes u_x e u_z dos deslocamentos elásticos e as componentes σ_x , σ_z e τ_{xz} do tensor das tensões, a partir da posição não-deformada. É particularmente importante a forma deformada da superfície do semi-espaco elástico definida pelos deslocamentos u_x dos pontos da superfície ($z = 0$).

2.2 Equações da Elasticidade para o estado plano de deformação

As componentes das tensões devem satisfazer as equações de equilíbrio em qualquer ponto do semi-espaco elástico:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

As correspondentes deformações ε_x , ε_z e γ_{xz} devem satisfazer a equação de compatibilidade:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \quad (2.2)$$

estando as deformações relacionadas com os deslocamentos por

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (2.3)$$

Em condições de deformação plana,

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_y &= 0 \\ \sigma_y &= \nu (\sigma_x + \sigma_z) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

As relações entre tensões e deformações são estabelecidas pela lei Hooke:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[(1-\nu^2) \sigma_x - \nu (1+\nu) \sigma_z \right] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[(1-\nu^2) \sigma_z - \nu (1+\nu) \sigma_x \right] \\ \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xz} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Definindo uma função de tensão $\phi(x,z)$, tal que

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}, \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xz} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \quad (2.6)$$

então as equações de equilíbrio (2.1), de compatibilidade (2.2) e a lei de Hooke (2.5) são satisfeitas, desde que $\phi(x,z)$ satisfaça a equação biarmónica:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (2.7)$$

Para além destas equações também as condições fronteira devem ser satisfeitas. Para o semi-espaço elástico representado na figura 2.1 essas condições fronteira são as seguintes:

- i) Na fronteira $z = 0$, no exterior da zona solicitada, a superfície está livre de tensões, isto é,

$$\bar{\sigma}_z = \bar{\tau}_{xz} = 0, \quad \text{para } x < -b, \text{ e } x > a \quad (2.8)$$

ii) Na zona sollicitada,

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_z &= -p(x) \\ \bar{\tau}_{xz} &= -q(x) \end{aligned} \right\} \text{ para } -b < x < a \quad (2.9)$$

iii) Em qualquer ponto muito afastado da zona sollicitada ($x, z \rightarrow \infty$) as tensões devem tornar-se cada vez mais pequenas ($\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz} \rightarrow 0$).

Em determinados problemas é conveniente usar coordenadas cilíndricas (r, θ, y) em vez das coordenadas cartesianas (x, y, z). Neste caso a função de tensão é $\phi(r, \theta)$, devendo satisfazer a equação biarmónica:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (2.10)$$

As tensões são definidas pelas expressões:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

e as relações deformações/deslocamentos são dadas por:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

As condições impostas pelo estado plano de deformação são idênticas às anteriores (2.4), substituindo as tensões σ_x e σ_z , respectivamente por σ_r e σ_θ :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_y &= 0 \\ \sigma_y &= \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) \end{aligned} \right\} \quad (2.4.a)$$

do mesmo modo, as relações entre tensões e deformações, estabelecidas pela lei Hooke (2.5), são obtidas substituindo as tensões σ_x e σ_z , por σ_r e σ_θ , isto é:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} [(1-\nu^2)\sigma_r - \nu(1+\nu)\sigma_\theta] \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} [(1-\nu^2)\sigma_\theta - \nu(1+\nu)\sigma_r] \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{G} \tau_{r\theta} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{r\theta} \end{aligned} \right\} \quad (2.5.a)$$

Em seguida são apresentadas algumas soluções particulares do problema enunciado, correspondentes a casos relevantes do contacto elástico entre sólidos.

2.3 Força normal concentrada

Neste problema pretende-se determinar as tensões produzidas por uma força normal concentrada, de intensidade P por unidade de comprimento, distribuída ao longo do eixo y e actuando na direcção z normal à superfície do semi-espaco elástico, como se mostra na figura 2.2. Neste caso é conveniente usar coordenadas cilíndricas.

A solução é dada pela função de tensão

$$\phi(r, \theta) = A r \theta \sin \theta \quad (2.13)$$

sendo A uma constante arbitrária e θ representa o ângulo entre o eixo Oz e a direcção radial Or .

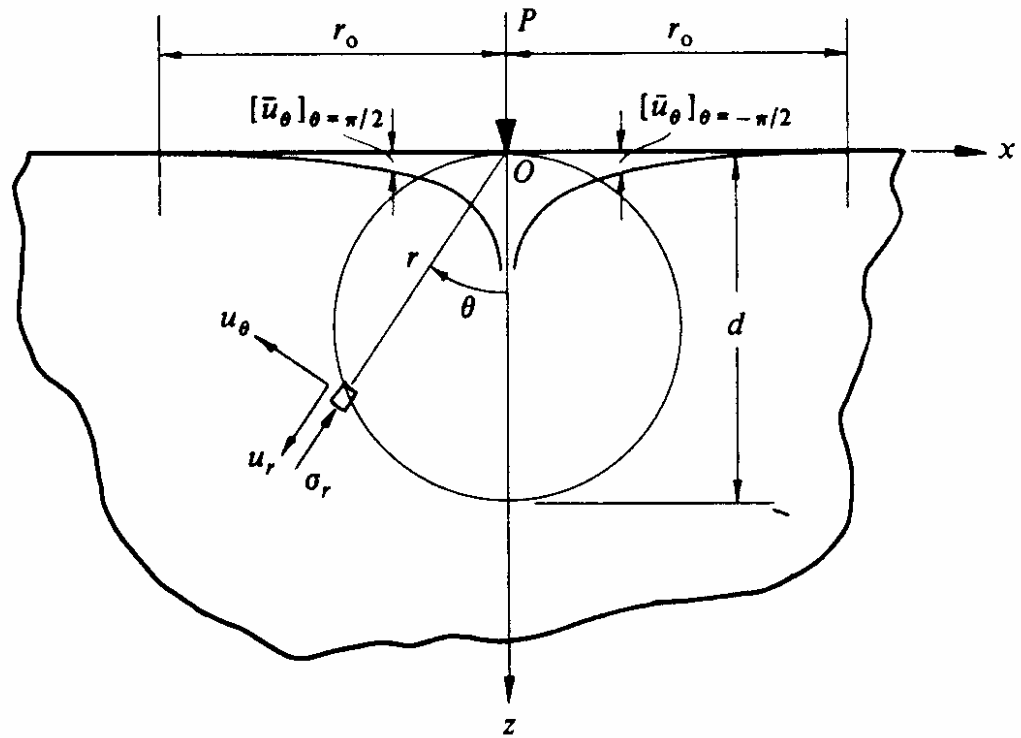


Figura 2.2 – Semi-espaco elástico submetido a uma força normal concentrada [1].

Atendendo às expressões (2.11) as componentes das tensões são:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 2A \frac{\cos \theta}{r} \\ \sigma_\theta = \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Este campo de tensões reduz-se a uma distribuição radial de tensões dirigidas para o ponto de aplicação da sollicitação, o ponto O .

Na superfície $\theta = \pm \pi/2$, a tensão σ_θ é nula (excepto no próprio ponto O) e a tensão $\tau_{r\theta}$ também é nula. Nos pontos muito afastados do ponto de aplicação da sollicitação ($r \rightarrow \infty$) as tensões tendem para zero. Deste modo todas as condições fronteira do problema são satisfeitas.

Verifica-se ainda que as tensões decrescem de intensidade com o valor de $1/r$. Logo o valor teoricamente infinito das tensões no ponto O resulta de se considerar a força concentrada segundo uma linha.

A constante A é obtida estabelecendo o equilíbrio entre a força P e as componentes verticais das tensões que actuam ao longo de um semicírculo de raio r . Assim,

$$-P = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_r \cos \theta r d\theta = \int_0^{\pi/2} 2 A \cos^2 \theta d\theta = A\pi$$

e logo

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta}{r} \quad (2.15)$$

Analisando a expressão (2.15) verifica-se que a tensão σ_r tem uma intensidade constante igual a $-2P/\pi d$ sobre um círculo de diâmetro d que passa pelo ponto O , como se mostra na figura 2.2.

Uma vez que as tensões de corte são nulas ($\tau_{r\theta} = 0$), σ_r e σ_θ são tensões principais. A tensão de corte principal máxima τ_1 , no plano (r, θ) tem o valor

$$\tau_1 = \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta) = \frac{\sigma_r}{2}$$

e actua em planos inclinados de 45° em relação à direcção radial. Logo as curvas isotensão de τ_1 são também uma família de círculos que passam pelo ponto O . Esta distribuição das tensões de corte é claramente demonstrada, pelas franjas isocromáticas de uma experiência fotoelástica, como se mostrou na figura 1.8.

A distribuição radial de tensões representada pelas expressões (2.15), pode ser transformada para coordenadas cartesianas, obtendo-se:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \sin^2 \theta = -\frac{2P}{\pi} \frac{x^2 z}{(x^2 + z^2)^2} \\ \sigma_z &= \sigma_r \cos^2 \theta = -\frac{2P}{\pi} \frac{z^3}{(x^2 + z^2)^2} \\ \tau_{xz} &= \sigma_r \sin \theta \cos \theta = -\frac{2P}{\pi} \frac{xz^2}{(x^2 + z^2)^2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Substituindo as expressões que definem as tensões (2.14 e 2.15) nas equações que definem a lei de Hooke (2.5.a) obtém-se as deformações a que o semi-espaco elástico está submetido. Estas estão relacionadas com os deslocamentos pelas expressões (2.12) resultando:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{(1-\nu^2)}{E} \frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta}{r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{\nu(1+\nu)}{E} \frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta}{r} \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} = \frac{\tau_{r\theta}}{G} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

A integração das expressões anteriores permite determinar os correspondentes deslocamentos [2]:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{2P}{\pi E} \left[-(1-\nu^2) \cos \theta \ln r - \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2} \theta \sin \theta \right] + C_1 \sin \theta + C_2 \cos \theta \\ u_\theta &= \frac{2P}{\pi E} \left[(1-\nu^2) \sin \theta \ln r + \nu(1+\nu) \sin \theta + \frac{1}{2}(1-2\nu)(1+\nu)(\sin \theta - \theta \cos \theta) \right] + \\ &+ C_1 \cos \theta - C_2 \sin \theta + C_3 r \end{aligned} \quad (2.18)$$

Por uma questão de simetria, o semi-espaco elástico não pode rodar, e logo os pontos que se encontram sobre o eixo z deslocam-se ao longo de OZ . Isto é, para $\theta = 0$, $u_\theta = 0$, e a expressão (2.18) reduz-se a

$$C_1 \cos \theta + C_3 r = 0$$

o que implica $C_1 = C_3 = 0$.

Substituindo C_1 e C_3 nas expressões (2.18) obtém-se,

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{2P}{\pi E} \left[-(1-\nu^2) \cos \theta \ln r - \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2} \theta \sin \theta \right] + C_2 \cos \theta \\ u_\theta &= \frac{2P}{\pi E} \left[(1-\nu^2) \sin \theta \ln r + \nu(1+\nu) \sin \theta + \frac{1}{2}(1-2\nu)(1+\nu)(\sin \theta - \theta \cos \theta) \right] - C_2 \sin \theta \end{aligned}$$

onde C_2 é uma constante determinada escolhendo a distância r_0 a partir da qual se consideram os deslocamentos normais à superfície desprezáveis, isto é, para $r = r_0$, e $\theta = \pm\pi/2$, $u_\theta = 0$, e portanto

$$C_2 = \frac{2P}{\pi E} \left[(1-\nu^2) \ln r_0 + \frac{1+\nu}{2} \right]$$

O deslocamentos u_r e u_θ em qualquer ponto do semi-espaço elástico são então definidos por:

$$u_r = -\frac{2P}{\pi E} \left[(1-\nu^2) \cos \theta \ln \frac{r}{r_0} + \frac{1+\nu}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} (1-2\nu)(1+\nu) \theta \sin \theta \right] \quad (2.19.a)$$

$$u_\theta = \frac{2P}{\pi E} \left[(1-\nu^2) \sin \theta \ln \frac{r}{r_0} - \frac{1}{2} (1-2\nu)(1+\nu) \theta \cos \theta \right] \quad (2.19.b)$$

Na superfície, para $\theta = \pm\pi/2$, os deslocamentos são definidos por:

$$[\bar{u}_r]_{\theta=\pi/2} = [\bar{u}_r]_{\theta=-\pi/2} = -\frac{P}{2E} (1-2\nu)(1+\nu) \quad (2.20.a)$$

$$[\bar{u}_\theta]_{\theta=\pi/2} = -[\bar{u}_\theta]_{\theta=-\pi/2} = \frac{2P}{\pi E} \left[(1-\nu^2) \ln \frac{r}{r_0} \right] \quad (2.20.b)$$

A forma deformada da superfície está representada na figura 2.2. O deslocamento infinito observado no ponto O era esperado, devido à singularidade das tensões que ocorre nesse ponto.

A escolha do valor apropriado de r_0 apresenta alguma dificuldade uma vez que u_θ varia com o logaritmo de r . Este facto é inevitável na deformação bidimensional de um semi-espaço elástico.

2.4 Força tangencial concentrada

Neste problema o semi-espaco elástico está submetido a uma força concentrada Q por unidade de comprimento, distribuída ao longo do eixo y , que actua tangencialmente à superfície no ponto O , como se mostra na figura 2.3.

Esta sollicitação produz também um campo de tensões semelhante ao caso da sollicitação normal, mas rodado de 90° relativamente a este. Definindo agora θ como o ângulo entre a direcção Ox e a direcção radial Or , as expressões que definem as tensões são semelhantes às obtidas para o caso da força normal:

$$\sigma_r = -\frac{2Q}{\pi} \frac{\cos \theta}{r}$$

$$\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$$
(2.21)

As curvas de isotensão são agora definidas por semicírculos que passam pelo ponto O , como se mostra na figura 2.3. A jusante do ponto O ($x > 0$) a tensão σ_r é de compressão, enquanto a montante do ponto O ($x < 0$) a tensão σ_r é de tracção, como seria de esperar.

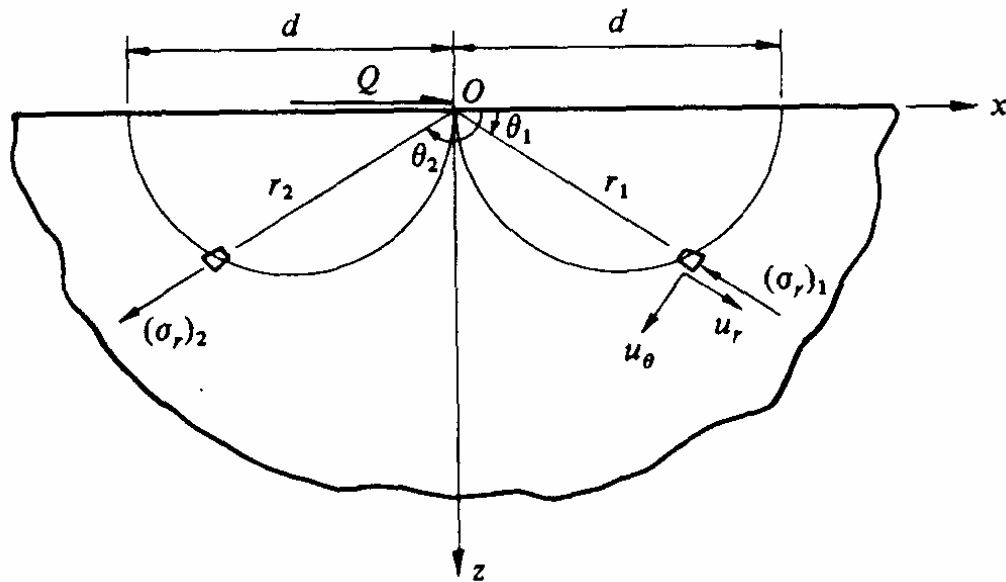


Figura 2.3 – Semi-espaco elástico submetido a uma força tangencial concentrada [1].

As expressões para as tensões podem ser convertidas para coordenadas x, z , obtendo-se:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_r \sin^2 \theta = -\frac{2Q}{\pi} \frac{x^3}{(x^2+z^2)^2} \\ \sigma_z &= \sigma_r \cos^2 \theta = -\frac{2Q}{\pi} \frac{xz^2}{(x^2+z^2)^2} \\ \tau_{xz} &= \sigma_r \sin \theta \cos \theta = -\frac{2Q}{\pi} \frac{x^2 z}{(x^2+z^2)^2}\end{aligned}\quad (2.22)$$

As expressões (2.18) e (2.19) que definem os deslocamentos, continuam válidas, sendo apenas necessário substituir P por Q ,

$$\begin{aligned}u_r &= \frac{2Q}{\pi E} \left[-(1-\nu^2) \cos \theta \ln r - \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2} \theta \sin \theta \right] + C_1 \sin \theta + C_2 \cos \theta \\ u_\theta &= \frac{2Q}{\pi E} \left[(1-\nu^2) \sin \theta \ln r + \nu(1+\nu) \sin \theta + \frac{1}{2}(1-2\nu)(1+\nu)(\sin \theta - \theta \cos \theta) \right] + \\ &+ C_1 \cos \theta - C_2 \sin \theta + C_3 r\end{aligned}\quad (2.23)$$

Admitindo que não existe rotação de corpo rígido do semi-espaco elástico, nem deslocamento vertical dos pontos situados sobre o eixo Oz , isto é, para $\theta = \pi/2$, $u_r = 0$, obtém-se que,

$$u_r|_{\theta=\pi/2} = \frac{2Q}{\pi E} \left[-\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2} \frac{\pi}{2} \right] + C_1$$

e logo,

$$C_1 = \frac{2Q}{\pi E} \left[\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2} \frac{\pi}{2} \right]$$

Em pontos muito afastados da origem O os deslocamentos são desprezáveis, isto é, quando $r \rightarrow \infty$, $u_\theta \rightarrow 0$, o que implica $C_3 = 0$. Substituindo os valores de C_1 e C_3 nas expressões 2.23, obtém-se,

$$u_r = \frac{2Q}{\pi E} \left[-(1-\nu^2) \cos \theta \ln r - \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2} \left(\theta \sin \theta - \frac{\pi}{2} \right) \right] + C_2 \cos \theta$$

$$u_\theta = \frac{2Q}{\pi E} \left[(1-\nu^2) \sin \theta \ln r + \nu(1+\nu) \sin \theta + \frac{1}{2}(1-2\nu)(1+\nu) \left(\sin \theta - \theta \cos \theta + \frac{\pi}{2} \right) \right] - C_2 \sin \theta$$

Na superfície, para $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, os deslocamentos são definidos por:

$$[\bar{u}_r]_{\theta=0} = -[\bar{u}_r]_{\theta=\pi} = \frac{2Q}{\pi E} \left[-(1-\nu^2) \ln r + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right] + C_2 \quad (2.24)$$

$$[\bar{u}_\theta]_{\theta=0} = [\bar{u}_\theta]_{\theta=\pi} = \frac{2Q}{\pi E} \left[\frac{1}{2}(1-2\nu)(1+\nu) \left(\frac{\pi}{2} \right) \right]$$

onde C_2 é uma constante determinada escolhendo a distância r_0 a partir da qual se consideram os deslocamentos tangenciais desprezáveis. Os deslocamentos superficiais vêm definidos, então, pelas seguintes expressões,

$$[\bar{u}_r]_{\theta=0} = -[\bar{u}_r]_{\theta=\pi} = -\frac{2Q}{\pi E} (1-\nu^2) \ln \frac{r}{r_0} \quad (2.25)$$

$$[\bar{u}_\theta]_{\theta=0} = [\bar{u}_\theta]_{\theta=\pi} = \frac{Q}{2E} (1-2\nu)(1+\nu)$$

os quais são formalmente idênticos aos deslocamentos superficiais obtidos para o caso da força normal concentrada, expressões (2.20).

A 2ª equação de (2.25) mostra que toda a superfície à direita do ponto O ($x > 0$) abateu de uma quantidade proporcional à força Q , enquanto toda a superfície à esquerda do ponto O ($x < 0$) se ergueu da mesma quantidade.

Tal como no caso da força normal, o deslocamento tangencial da superfície u_r varia com o logaritmo da distância r ao ponto O , dependendo do valor de r_0 .

2.5 Pressão normal distribuída

As forças concentradas são uma abstracção matemática pouco corrente nas aplicações reais, e portanto sem realidade física, sendo portanto mais correcto apresentar as solicitações aplicadas na superfície do sólido como cargas distribuídas.

Na figura 2.4 mostra-se um semi-espaco elástico submetido à acção de uma pressão normal distribuída $p(x)$. Esta pressão, actuando sobre um elemento de área $d(x')$ (ou $d(s)$) pode ser considerada como uma carga elementar concentrada, isto é,

$$p(x') dx' = p(s) ds = dP \quad (2.26)$$

A esta carga distribuída corresponde uma distribuição de tensões elementar definida, à semelhança de (2.16), por

$$d\sigma_x = -\frac{2}{\pi} dP \frac{x'^2 z}{(x'^2 + z^2)^2}$$

$$d\sigma_z = -\frac{2}{\pi} dP \frac{z^3}{(x'^2 + z^2)^2} \quad (2.27)$$

$$d\tau_{xz} = -\frac{2}{\pi} dP \frac{x' z^2}{(x'^2 + z^2)^2}$$

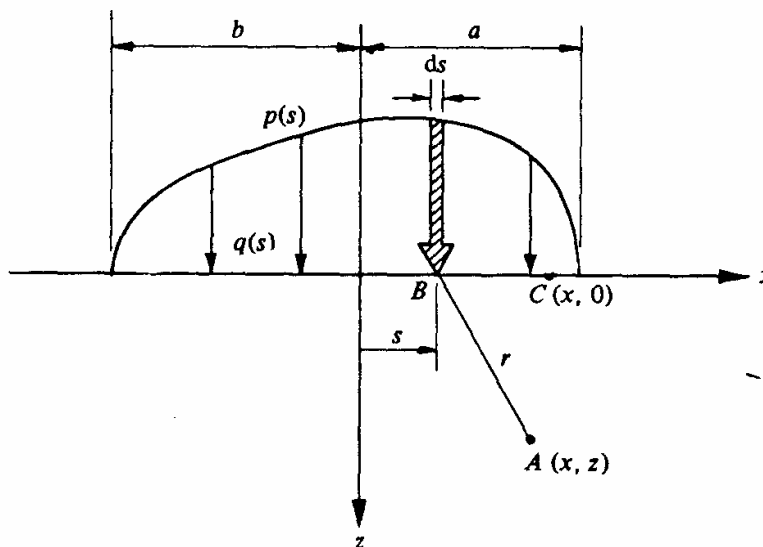


Figura 2.4 – Semi-espaco elástico submetido a uma pressão normal distribuída [1].

Sendo a força normal total aplicada ao semi-espaco elástico definida como

$$P = \int_{-b}^a dP = \int_{-b}^a p(s) ds$$

obtem-se o seguinte campo de tensões substituindo x' por $(x - s)$ e integrando em ordem a s ,

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{2z}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(s)(x-s)^2 ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} \\ \sigma_z &= -\frac{2z^3}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(s) ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} \\ \tau_{xz} &= -\frac{2z^2}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(s)(x-s) ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2}\end{aligned}\tag{2.28}$$

Seguindo uma metodologia idêntica é possível determinar os deslocamentos correspondentes à pressão normal, os quais na superfície do semi-espaco elástico são dados por:

$$\begin{aligned}\bar{u}_x &= -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2E} \left\{ \int_{-b}^x p(s) ds - \int_x^a p(s) ds \right\} + C_1 \\ \bar{u}_z &= -\frac{2(1-\nu^2)}{2E} \int_{-b}^a p(s) \ln|x-s| ds + C_2\end{aligned}\tag{2.29}$$

Derivando as expressões anteriores em ordem a x , de modo a determinar os gradientes dos deslocamentos superficiais, obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} &= -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2E} p(x) \\ \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} &= -\frac{2(1-\nu^2)}{2E} \int_{-b}^a \frac{p(s)}{x-s} ds\end{aligned}\tag{2.30}$$

Estas expressões tem a vantagem de fazer desaparecer as constantes C_1 e C_2 , o que evita a ambiguidade do “deslocamento de um ponto afastado da origem O ”.

O gradiente $\bar{\varepsilon}_x = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x}$ representa a componente tangencial da deformação na superfície, e o gradiente $\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x}$ representa a inclinação da superfície deformada.

Um importante resultado deriva directamente da expressão (2.30). A lei de Hooke em estado plano de tensão (2.5) estabelece que na superfície

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{1}{E} \left[(1 - \nu^2) \bar{\sigma}_x - \nu(1 + \nu) \bar{\sigma}_z \right] \quad (2.31)$$

Igualando as duas expressões, e sabendo que $\sigma_z = -p(x)$, resulta que

$$\bar{\sigma}_x = \bar{\sigma}_z = -p(x) \quad (2.32)$$

Verifica-se assim, que quando submetido a uma pressão normal distribuída, as tensões normais e tangenciais na superfície são compressivas e iguais. Tal facto explica a reduzida tendência que têm as camadas superficiais para se deformarem plasticamente.

2.6 Pressões normal e tangencial distribuídas – Caso geral

Em geral, a superfície de contacto entre dois sólidos transmite pressões tangenciais devidas ao atrito para além das pressões normais. O semi-espaco elástico representado na figura 2.5 está sollicitado por uma pressão normal $p(x)$ e uma pressão tangencial $q(x)$, aplicadas sobre uma banda $(-b < x < a)$.

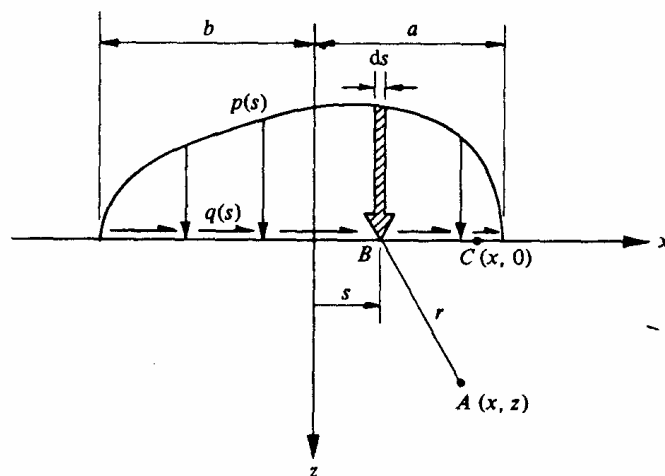


Figura 2.5 – Semi-espaco elástico submetido a uma pressão distribuída com componentes normal e tangencial [1].

Pretende-se determinar o campo de tensões instalado num ponto genérico A do semi-espaco elástico, bem como os deslocamentos em qualquer ponto C da superfície.

O problema pode ser analisado como tratando-se da sobreposição de uma sollicitação normal e uma sollicitação tangencial, ambas distribuídas. Assim, o campo de tensões instalado no sólido vem definido por:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{2z}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(s) (x-s)^2 ds}{[(x-s)^2+z^2]^2} - \frac{2}{\pi} \int_{-b}^a \frac{q(s) (x-s)^3 ds}{[(x-s)^2+z^2]^2} \\ \sigma_z &= -\frac{2z^3}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(s) ds}{[(x-s)^2+z^2]^2} - \frac{2z^2}{\pi} \int_{-b}^a \frac{q(s) (x-s) ds}{[(x-s)^2+z^2]^2} \\ \tau_{xz} &= -\frac{2z^2}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(s) (x-s) ds}{[(x-s)^2+z^2]^2} - \frac{2z}{\pi} \int_{-b}^a \frac{q(s) (x-s)^2 ds}{[(x-s)^2+z^2]^2}\end{aligned}\quad (2.33)$$

Conhecidas as distribuições de pressões $p(x)$ e $q(x)$ é possível determinar as tensões instaladas em cada sólido, embora a integração possa apresentar, nalguns casos, algumas dificuldades.

A determinação dos deslocamentos na superfície dos sólidos pode também ser obtida pelo Princípio da sobreposição dos efeitos ou de Saint-Venant. Assim num ponto C genérico da superfície dos sólidos de coordenadas (x, θ) os deslocamentos são definidos por:

$$\begin{aligned}\bar{u}_x &= -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2E} \left\{ \int_{-b}^x p(s) ds - \int_x^a p(s) ds \right\} - \frac{2(1-\nu^2)}{2E} \int_{-b}^a q(s) \ln|x-s| ds + C_1 \\ \bar{u}_z &= -\frac{2(1-\nu^2)}{2E} \int_{-b}^a p(s) \ln|x-s| ds - \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2E} \left\{ \int_{-b}^x q(s) ds - \int_x^a q(s) ds \right\} + C_2\end{aligned}\quad (2.34)$$

Derivando as expressões anteriores em ordem a x , de modo a determinar os gradientes dos deslocamentos superficiais, obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} &= -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2E} p(x) - \frac{2(1-\nu^2)}{2E} \int_{-b}^a \frac{q(s)}{x-s} ds \\ \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} &= -\frac{2(1-\nu^2)}{2E} \int_{-b}^a \frac{p(s)}{x-s} ds - \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2E} q(x)\end{aligned}\quad (2.35)$$

Estas expressões têm a vantagem de fazer desaparecer as constantes C_1 e C_2 , o que evita a ambiguidade do “deslocamento de um ponto afastado da origem O ”. O gradiente $\partial \bar{u}_x / \partial x$ representa a componente tangencial da deformação na superfície, e o gradiente $\partial \bar{u}_z / \partial x$ é a inclinação da superfície deformada.

Bibliografia do Capítulo 2:

- [1] K. L. Johnson, “Contact Mechanics”, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1985. ISBN-0-521-25576-7
- [2] Timoshenko e Goodier, “Theory of Elasticity”, 3rd Edition, McGraw-Hill Kogakusha, Lda, Tóquio, Japão, 1970. ISBN-0-07-085805-5
- [3] A. P. Boresi, e al. “Advanced Mechanics of Materials” 3rd Edition, John Wiley & Sons, New York, USA, 1978. ISBN-0-471-08892-7

CAPÍTULO 3

SEMI-ESPAÇO ELÁSTICO SUBMETIDA A UMA SOLICITAÇÃO PONTUAL

3.1 Solicitação pontual

Este capítulo é dedicado à análise dos campos de deslocamentos, deformações e tensões que se desenvolvem num semi-espaço elástico, quando sobre a superfície $z = 0$ actua uma solicitação pontual, com componentes normal e tangencial, aplicadas sobre uma pequena superfície S na vizinhança da origem O do sistema de eixos. No exterior da área S as componentes normal e tangencial da solicitação são nulas. Trata-se portanto de um tipo de problema de elasticidade onde as solicitações superficiais são conhecidas sobre toda a superfície (ou na fronteira) $z = 0$.

Como a superfície S onde estão aplicadas as solicitações é muito pequena, quando comparada com a superfície do semi-espaço elástico $z = 0$, as tensões tendem para 0 à medida que o ponto de observação se afasta da origem.

Neste caso a solicitação é bidimensional: a pressão normal $p(x,y)$ e as pressões tangenciais $q_x(x,y)$ e $q_y(x,y)$ apresentam, em geral componentes segundo as direcções x e y . Em consequência o campo de tensões resultante é tridimensional, sendo as seis componentes do

tensor das tensões, σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{xz} , diferentes de zero, em qualquer ponto do semi-espaço elástico [1, 2, 3].

Ocorre um caso particular quando a solicitação é axi-simétrica em relação ao eixo Z . Em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) a pressão normal $p(r)$ e a pressão tangencial $q(r)$ são independentes de θ , e $q(r)$ se existir actua na direcção radial. Em consequência, as componentes do tensor das tensões $\tau_{r\theta}$ e $\tau_{\theta z}$ desaparecem e as restantes são independentes de θ .

A solução deste problema de elasticidade foi estabelecida por Boussinesq (1885) para as pressões normais, e por Cerruti (1882) para as pressões tangenciais, ambos recorrendo à teoria de potencial. Apresentações desenvolvidas dessas soluções são devidas a Love [4] e Salomon [5]. Em seguida apresentam-se os resultados mais significativos de tais soluções.

O semi-espaço elástico está representado na figura 3.1. Considera-se que $C(\xi, \eta)$ representa um ponto da superfície S onde está aplicada a solicitação exterior, enquanto $A(x, y, z)$ representa um ponto do interior do semi-espaço elástico onde se pretendem determinar os campos de deslocamentos, deformações e tensões. A distância entre os pontos C e A é definida pela seguinte expressão:

$$\overline{CA} = \rho = \left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2 \right]^{1/2} \quad (3.1)$$

As distribuições de pressão $p(\xi, \eta)$, $q_x(\xi, \eta)$ e $q_y(\xi, \eta)$ estão aplicadas sobre S .

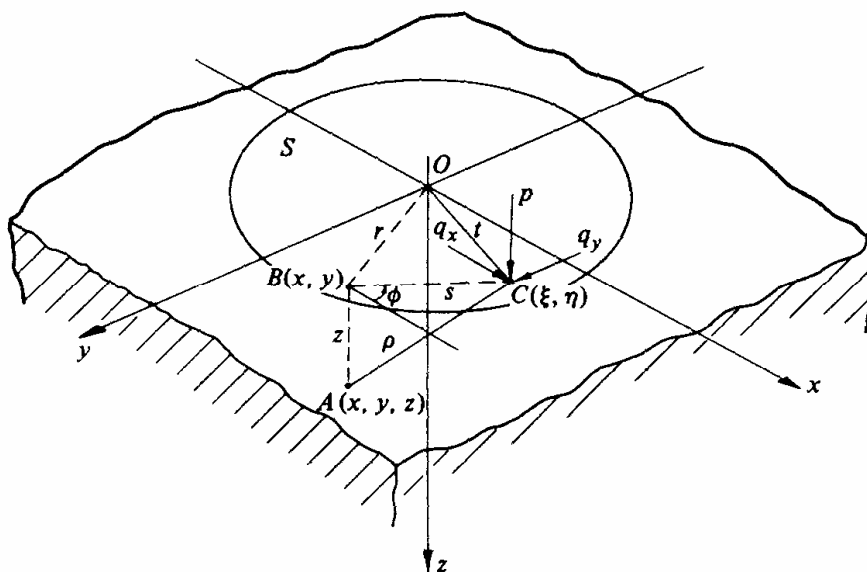


Figura 3.1 – Semi-espaço elástico submetido a uma solicitação pontual [1].

3.2 Funções potenciais de Boussinesq e Cerruti

Boussinesq e Cerruti definiram as funções potenciais F_1 , G_1 e H_1 , cada uma satisfazendo a equação de Laplace ($\nabla^2 F_1 = 0$, $\nabla^2 G_1 = 0$, $\nabla^2 H_1 = 0$):

$$\begin{aligned} F_1 &= \iint_S q_x(\xi, \eta) \Omega \, d\xi \, d\eta \\ G_1 &= \iint_S q_y(\xi, \eta) \Omega \, d\xi \, d\eta \\ H_1 &= \iint_S p(\xi, \eta) \Omega \, d\xi \, d\eta \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde

$$\Omega = z \ln(\rho + z) - \rho \quad (3.3)$$

F_1 , G_1 e H_1 , representam, respectivamente, os potenciais das pressões tangenciais q_x segundo X , q_y segundo Y e da pressão normal p segundo Z . São ainda definidas as funções potenciais F , G e H , respectivamente:

$$\begin{aligned} F &= \frac{F_1}{\partial z} = \iint_S q_x(\xi, \eta) \ln(\rho + z) \, d\xi \, d\eta \\ G &= \frac{G_1}{\partial z} = \iint_S q_y(\xi, \eta) \ln(\rho + z) \, d\xi \, d\eta \\ H &= \frac{H_1}{\partial z} = \iint_S p(\xi, \eta) \ln(\rho + z) \, d\xi \, d\eta \end{aligned} \quad (3.4)$$

($\nabla^2 F = 0$, $\nabla^2 G = 0$, $\nabla^2 H = 0$). A derivada de Ω em ordem a z é definida por:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial Z} = \frac{\partial}{\partial z} [z \ln(\rho + z) - \rho] = \ln(\rho + z) \quad (3.5)$$

São também definidas as somas de funções potenciais ψ_1 e ψ ($\nabla^2 \psi_1 = 0$, $\nabla^2 \psi = 0$):

$$\psi_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial y} + \frac{\partial H_1}{\partial z} \quad (3.6)$$

$$\psi = \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \quad (3.7)$$

A. E. Love [4] demonstrou que os deslocamentos elásticos u_x , u_y e u_z , de qualquer ponto $A(x,y,z)$ do interior do semi-espaço elástico podem ser expressos em função das seguintes funções:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1}{4\pi G_e} \left[2 \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} + 2\nu \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - z \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] \\ u_y &= \frac{1}{4\pi G_e} \left[2 \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y} + 2\nu \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] \\ u_z &= \frac{1}{4\pi G_e} \left[\frac{\partial H}{\partial x} + (1 - 2\nu) \psi - z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

O valor dos deslocamentos elásticos definidos pelas expressões (3.8) decrescem com o valor de $1/\rho$, para pontos afastados da origem da área solicitada. Estes deslocamentos representam, portanto, os deslocamentos elásticos de pontos próximos da área solicitada em relação a pontos do sólido situados a grande distância da zona carregada ($\rho \rightarrow \infty$), onde o semi-espaço elástico pode ser considerado como fixo (encastrado).

Este tipo de comportamento, observado no caso de uma solitação bidimensional, onde a referência para os deslocamentos pode ser estabelecida no infinito, é mais favorável do que o caso unidimensional, vista no capítulo anterior, onde a variação dos deslocamentos depende do parâmetro $\ln \rho$, impondo a necessidade de considerar uma referência arbitrária.

A Teoria da Elasticidade linear permite estabelecer a relação entre deslocamentos e deformações; a partir destas, recorrendo à correspondente Lei constitutiva, neste caso a lei de Hooke, obtêm-se as correspondentes tensões (ver expressão 3.8):

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{2\nu G_e}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2G_e \frac{\partial u_x}{\partial x} \\
\sigma_y &= \frac{2\nu G_e}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2G_e \frac{\partial u_y}{\partial y} \\
\sigma_z &= \frac{2\nu G_e}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2G_e \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
\tau_{xy} &= G_e \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right); \quad \tau_{yz} = G_e \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right); \quad \tau_{xz} = G_e \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

As tensões dependem portanto da dilatação Δ e do módulo de rigidez transversal G_e :

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{1-2\nu}{2\pi G_e} \frac{\partial \psi}{\partial z} \\
G_e &= \frac{E}{2(1+\nu)}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

A determinação dos campos de deslocamentos, deformações e tensões, pode ser obtida a partir da sobreposição de três casos particulares:

- i) Solicitação normal segundo Z - $F_I = 0, F = 0, e G_I = 0, G = 0;$
- ii) Solicitação tangencial segundo X - $G_I = 0, G = 0, e H_I = 0, H = 0;$
- ii) Solicitação tangencial segundo Y - $F_I = 0, F = 0, e H_I = 0, H = 0;$

3.3 Solicitação puramente normal

Quando submetido a uma solicitação puramente normal $p(\xi, \eta)$, como ocorre no caso de um contacto sem atrito, as equações que definem os deslocamentos e as tensões vêm muito simplificadas. Neste caso $F_I = 0, F = 0, e G_I = 0, G = 0$, e logo:

$$\psi_1 = \frac{\partial H_1}{\partial z} = H = \iint_S p(\xi, \eta) \ln(\rho + z) d\xi d\eta \quad (3.11)$$

$$\psi = \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial z} = \iint_S p(\xi, \eta) \frac{1}{\rho} d\xi d\eta \quad (3.12)$$

Assim o campo de deslocamentos é definido por:

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{1}{4\pi G_e} \left[(1-2\nu) \frac{\partial H}{\partial x} - z \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial z} \right] \\ u_y &= -\frac{1}{4\pi G_e} \left[(1-2\nu) \frac{\partial H}{\partial y} - z \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial z} \right] \\ u_z &= -\frac{1}{4\pi G_e} \left[-2(1-\nu) \frac{\partial H}{\partial z} + z \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

e o campo de tensões é definido por:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{2\pi} \left[2\nu \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - z \frac{\partial^3 H}{\partial x^2 \partial z} - (1-2\nu) \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right] \\ \sigma_y &= \frac{1}{2\pi} \left[2\nu \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - z \frac{\partial^3 H}{\partial y^2 \partial z} - (1-2\nu) \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right] \\ \sigma_z &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - z \frac{\partial^3 H}{\partial z^3} \right] \\ \tau_{xy} &= -\frac{1}{2\pi} \left[(1-2\nu) \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^3 H}{\partial x \partial y \partial z} \right] \\ \tau_{yz} &= -\frac{1}{2\pi} z \frac{\partial^3 H}{\partial y \partial z^2} ; \quad \tau_{xz} = -\frac{1}{2\pi} z \frac{\partial^3 H}{\partial x \partial z^2} \end{aligned} \quad (3.14)$$

A soma de $\sigma_x + \sigma_y$ é igual a:

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{1}{2\pi} \left[4\nu \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - z \left(\frac{\partial^3 H}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 H}{\partial y^2 \partial z} \right) - (1-2\nu) \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) \right]$$

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{1}{2\pi} \left[4\nu \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) - (1-2\nu) \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) \right]$$

como o Laplaciano de H é nulo,

$$\nabla^2 H = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}$$

sendo a soma de $\sigma_x + \sigma_y$ igual a:

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{1}{2\pi} \left[4\nu \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - z \frac{\partial}{\partial z} \left(- \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right) - (1-2\nu) \left(- \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right) \right] \quad (3.15)$$

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{1}{2\pi} \left[(1+2\nu) \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + z \frac{\partial^3 H}{\partial z^3} \right]$$

Na superfície do semi-espaco elástico ($z = 0$) as tensões normais são nulas no exterior da área sollicitada e no seu interior são iguais à sollicitação aplicada. Assim:

$$\bar{\sigma}_z = (\sigma_z)_{z=0} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - z \frac{\partial^3 H}{\partial z^3} \right] \quad (3.16)$$

$$\bar{\sigma}_z = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right]_{z=0} = \begin{cases} -p(\xi, \eta) & \text{no interior de } S \\ 0 & \text{no exterior de } S \end{cases}$$

Ainda na superfície do semi-espaco elástico os deslocamentos são definidos por:

$$\bar{u}_x = - \frac{1-2\nu}{4\pi G_e} \frac{\partial H}{\partial x}$$

$$\bar{u}_y = - \frac{1-2\nu}{4\pi G_e} \frac{\partial H}{\partial y} \quad (3.17)$$

$$\bar{u}_z = \frac{1-\nu}{2\pi G_e} \frac{\partial H}{\partial z}$$

As equações (3.16) e (3.17), mostram que a pressão normal e os deslocamentos no interior da área solicitada dependem apenas da sollicitação exterior, e portanto da função potencial H .

As equações apresentadas constituem uma solução formal do problema das tensões e deformações num semi-espaço elástico com tracções prescritas na sua superfície.

3.4 Sollicitação normal concentrada

Os deslocamentos e as tensões produzidas por uma sollicitação normal concentrada P actuando sobre a superfície do semi-espaço elástico na origem, como se mostra na figura 3.2, podem ser determinadas a partir do caso geral anteriormente apresentado.

Neste caso a área S de aplicação da sollicitação está reduzida a um ponto, a origem O , e a distância entre os pontos C e A (ρ) passa a ser definida por,

$$\overline{CA} = \rho = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad (3.18)$$

e a sollicitação aplicada é igual a,

$$\iint_S p(\xi, \eta) d\xi d\eta = P \quad (3.19)$$

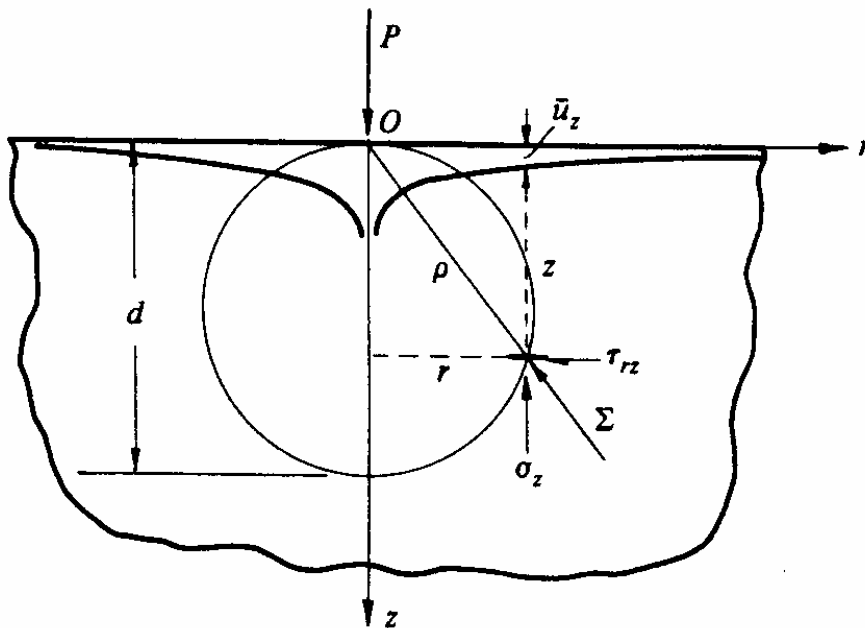


Figura 3.2 – Semi-espaço elástico submetido a uma sollicitação normal concentrada [1].

Neste caso as funções potenciais de Boussinesq são definidas por:

$$\psi_1 = \frac{\partial H_1}{\partial z} = H = P \ln(\rho + z) \quad (3.20)$$

$$\psi = \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{P}{\rho} \quad (3.21)$$

Substituindo as expressões anteriores nas expressões que definem os deslocamentos no caso de uma solitação puramente normal, obtém-se:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{P}{4\pi G_e} \left[\frac{xz}{\rho^3} - (1 - 2\nu) \frac{x}{\rho(\rho + z)} \right] \\ u_y &= \frac{P}{4\pi G_e} \left[\frac{yz}{\rho^3} - (1 - 2\nu) \frac{y}{\rho(\rho + z)} \right] \\ u_z &= \frac{P}{4\pi G_e} \left[\frac{z^2}{\rho^3} + \frac{2(1 - \nu)}{\rho} \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

Para as tensões obtém-se as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{(1 - 2\nu)}{r^2} \left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{x^2 - y^2}{r^2} + \frac{zy^2}{\rho^3} \right] - \frac{3zx^2}{\rho^5} \right\} \\ \sigma_y &= \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{(1 - 2\nu)}{r^2} \left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{y^2 - x^2}{r^2} + \frac{zx^2}{\rho^3} \right] - \frac{3zy^2}{\rho^5} \right\} \\ \sigma_z &= -\frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{\rho^5} \\ \tau_{xy} &= \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{(1 - 2\nu)}{r^2} \left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{xy}{r^2} + \frac{zxy}{\rho^3} \right] - \frac{3zxy}{\rho^5} \right\} \\ \tau_{yz} &= -\frac{3P}{2\pi} \frac{xz^2}{\rho^5} & \tau_{xz} &= -\frac{3P}{2\pi} \frac{yz^2}{\rho^5} \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde $r^2 = x^2 + y^2$.

A soma de $\sigma_x + \sigma_y$ vem igual a,

$$\begin{aligned}\sigma_x + \sigma_y &= \frac{P}{2\pi} \left[(1+2\nu) \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + z \frac{\partial^3 H}{\partial z^3} \right] \\ \sigma_x + \sigma_y &= \frac{P}{2\pi} \left[(1+2\nu) \frac{-z}{\rho^3} + z \left(-\frac{1}{\rho^3} + \frac{3z^2}{\rho^5} \right) \right] \\ \sigma_x + \sigma_y &= \frac{P}{2\pi} \left[-(1+\nu) \frac{2z}{\rho^3} + \frac{3z^3}{\rho^5} \right]\end{aligned}\quad (3.24)$$

No ponto $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, ocorre uma singularidade ($r = 0$) e os deslocamentos são infinitos. Na superfície do semi-espaço elástico, para $x \neq 0$ e $y \neq 0$, os deslocamentos são definidos por:

$$\begin{aligned}\bar{u}_x &= -\frac{P}{4\pi G_e} (1-2\nu) \frac{x}{r^2} \\ \bar{u}_y &= -\frac{P}{4\pi G_e} (1-2\nu) \frac{y}{r^2} \\ \bar{u}_z &= \frac{P}{2\pi G_e} \frac{(1-\nu)}{r}\end{aligned}\quad (3.24)$$

No ponto $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, ocorre uma singularidade ($r = 0$) e as tensões são infinitas. Na superfície do semi-espaço elástico, para $x \neq 0$ e $y \neq 0$, as tensões são definidos por:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_x &= \frac{P}{2\pi} \frac{(1-2\nu)(x^2 - y^2)}{r^4} \\ \bar{\sigma}_y &= \frac{P}{2\pi} \frac{(1-2\nu)(y^2 - x^2)}{r^4} \\ \bar{\sigma}_z &= 0 \\ \bar{\tau}_{xy} &= \frac{P}{2\pi} \frac{(1-2\nu)xy}{r^4} \quad \bar{\tau}_{yz} = 0 \quad \bar{\tau}_{xz} = 0\end{aligned}\quad (3.25)$$

Timoshenko e Goodier [2] apresentam um resultado equivalente, usando coordenadas cilíndricas e uma função de tensão para problemas axi-simétricos. Para os deslocamentos obtém-se:

$$\begin{aligned}
 u_r &= \frac{P}{4\pi G_e} \left[\frac{r z}{\rho^3} - (1 - 2\nu) \frac{\rho - z}{\rho r} \right] \\
 u_\theta &= 0 \\
 u_z &= \frac{P}{4\pi G_e} \left[\frac{z^2}{\rho^3} + \frac{2(1 - \nu)}{\rho} \right]
 \end{aligned}
 \tag{3.26}$$

O campo de tensões é definido por:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \frac{P}{2\pi} \left[(1 - 2\nu) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{z}{\rho r^2} \right) - \frac{3z r^2}{\rho^5} \right] \\
 \sigma_\theta &= -\frac{P}{2\pi} (1 - 2\nu) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{z}{\rho r^2} - \frac{z}{\rho^3} \right) \\
 \sigma_z &= -\frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{\rho^5} \\
 \tau_{rz} &= -\frac{3P}{2\pi} \frac{r z^2}{\rho^5} \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \tau_{\theta z} = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.27}$$

Note-se que:

$$\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z = \frac{P}{\pi} (1 + \nu) \frac{z}{\rho^3}
 \tag{3.28}$$

Na superfície do semi-espaco elástico, para $x \neq 0$ e $y \neq 0$, os deslocamentos são definidos pelas expressões (3.28), satisfazendo as expressões (3.24):

$$\bar{u}_r = -\frac{P}{4\pi G_e} \frac{(1-2\nu)}{r}$$

$$\bar{u}_\theta = 0 \tag{3.29}$$

$$\bar{u}_z = \frac{P}{2\pi G_e} \frac{(1-\nu)}{r}$$

A última expressão mostra que o deslocamento segundo a direcção Z , dos pontos da superfície, é um hiperbolóide que tende para uma assíptótica, correspondente à superfície não deformada, quando r tende para infinito. O mesmo deslocamento é, teoricamente, infinito na origem O , quando r nulo, como está representado na figura 3.2.

3.5 Pressão normal distribuída

Os deslocamentos e as tensões correspondentes a uma solicitação normal distribuída sobre uma área S da superfície do semi-espaço elástico, podem ser obtidos a partir dos resultados correspondentes a uma carga concentrada, definidos no parágrafo anterior, usando o princípio da sobreposição dos efeitos.

A pressão normal distribuída $p(\xi, \eta)$ está aplicada sobre a área S da superfície do semi-espaço elástico (ver figura 3.3):

- $A(x, y, z)$ - representa um outro ponto genérico do interior do semi-espaço elástico onde se pretendem determinar os campos de deslocamentos, deformações e tensões;
- $B(x, y, 0)$ - representa um ponto da superfície do semi-espaço elástico onde também se pretendem determinar os deslocamentos, deformações e tensões.
- $C(\xi, \eta)$ - representa um ponto genérico da área S onde está aplicada a solicitação normal distribuída;

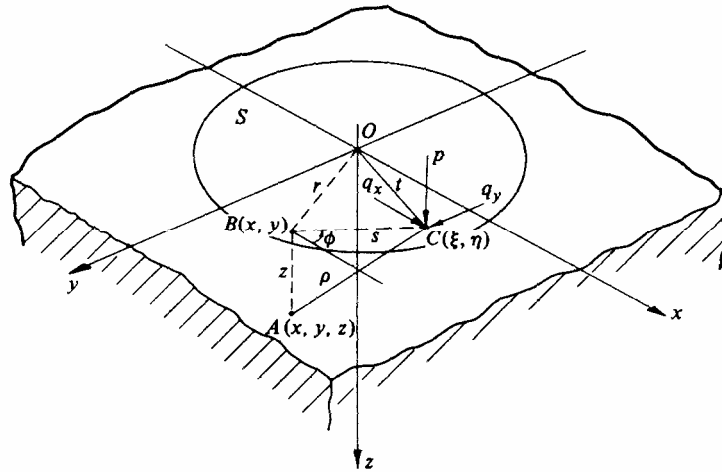


Figura 3.3 – Semi-esp aco elástico submetido a uma sollicita o normal distribuída [1].

A distância entre os pontos C e A   definida pela expressão (3.1):

$$\overline{CA} = \rho = \left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2 \right]^{1/2} \quad (3.30)$$

A distância entre os pontos C e B   definida por:

$$\overline{CB} = r = \left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 \right]^{1/2} \quad (3.31)$$

De modo a simplificar as expressões, são usadas coordenadas polares (s, ϕ) com origem no ponto B , de tal modo que a pressão $p(s, \phi)$ que actua no ponto C seja equivalente a uma f rca concentrada de intensidade $p(s, \phi) s ds d\phi$.

O deslocamento da superfície no ponto B , devido a essa f rca concentrada, pode ser obtido a partir das expressões (3.29), fazendo $r = BC = s$. O deslocamento segundo Z no mesmo ponto devido a toda a pressão distribuída sobre a  rea S ,   dado por:

$$\bar{u}_z = \frac{(1 - \nu)}{2\pi G_e} \iint_S p(s, \phi) ds d\phi \quad (3.32)$$

$$\bar{u}_z = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \iint_S p(s, \phi) ds d\phi$$

As expressões para as tensões podem ser obtidas por integra o das expressões (3.23) para o caso da carga concentrada.

3.6 Pressão de Hertz aplicada sobre uma área circular

Segundo a teoria de Hertz, que será apresentada no capítulo 4, o contacto sem atrito entre dois corpos de revolução elásticos, por exemplo duas esferas, produz uma área de contacto circular S como se mostra na figura 3.4.

Sobre a área S actua uma distribuição de pressão de Hertz definida por,

$$p(r) = p_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \quad (3.33)$$

sendo a carga normal aplicada igual a,

$$P = \int_S p(r) dr = \frac{2}{3} \pi p_0 a^3 \quad (3.34)$$

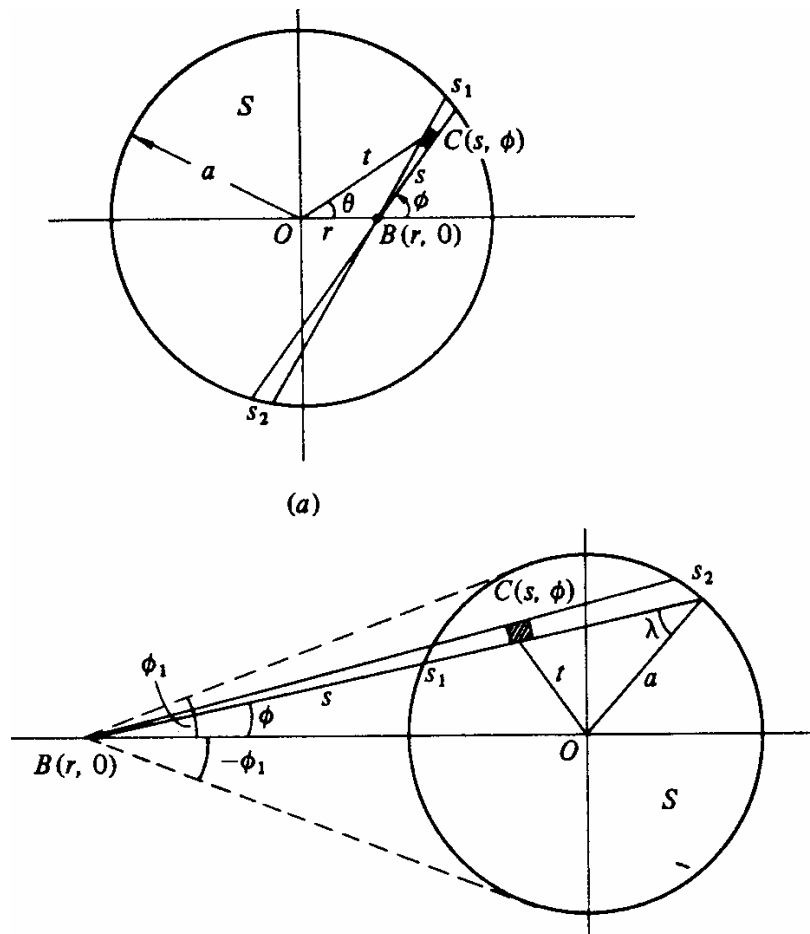


Figura 3.4 – Pressão de Hertz aplicada sobre uma área circular S [1]: a) deslocamento de um ponto no interior de S . b) deslocamento de um ponto no exterior de S .

Considerando a figura 3.4 pode-se escrever que

$$\begin{aligned} t^2 &= r^2 + s^2 + 2rs \cos \phi \\ p(s, \phi) &= p_0 a (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde,

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= a^2 - r^2 \\ \beta &= r \cos \phi \end{aligned} \quad (3.36)$$

Substituindo na expressão que define o deslocamento segundo Z de um ponto da superfície (3.32), obtém-se

$$\begin{aligned} \bar{u}_z &= \frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint_S \frac{p_0}{a} (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{1/2} ds d\phi \\ \bar{u}_z &= \frac{1-\nu^2}{\pi E} \frac{p_0}{a} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{s_1} (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{1/2} ds \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde s_1 é a raiz positiva da equação,

$$(\alpha^2 - 2\beta s - s^2) = 0 \quad (3.38)$$

Para obter o deslocamento na direcção radial, u_r , procede-se de modo análogo, obtendo-se

$$\bar{u}_r = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2\pi E} \frac{p_0}{a} \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi \int_0^{s_1} (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{1/2} ds \quad (3.39)$$

Procedendo às integrações em ordem a s e ϕ [1] determinam-se os valores dos deslocamentos em qualquer ponto da superfície do semi-espaco elástico, no interior da área S :

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_r &= -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{3E} \frac{a^2}{r} p_0 \left[1 - \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{3/2} \right] \\ \bar{u}_z &= \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\pi}{4} \frac{p_0}{a} (2a^2 - r^2) \end{aligned} \right\} r \leq a \quad (3.40)$$

Em qualquer ponto do exterior da área de aplicação da pressão de Hertz, os deslocamentos superficiais são dados pelas seguintes expressões:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_r &= -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{3E} \frac{a^2}{r} p_0 \\ \bar{u}_z &= \frac{1-\nu^2}{E} \frac{p_0}{2a} \left[\left(2a^2 - r^2\right) \sin^{-1}\left(\frac{a}{r}\right) + r^2 \frac{a}{r} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^{1/2} \right] \end{aligned} \right\} r > a \quad (3.41)$$

O deslocamento na direcção radial é equivalente a considerar a carga concentrada no centro da área solicitada.

As tensões na superfície do semi-espaço elástico ($z = 0$) e no interior da área solicitada, são dadas pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\sigma}_r}{p_0} &= \frac{(1-2\nu)}{3\pi} \left(\frac{a^2}{r^2}\right) \left[1 - \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{3/2} \right] - \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2} \\ \frac{\bar{\sigma}_\theta}{p_0} &= -\frac{(1-2\nu)}{3\pi} \left(\frac{a^2}{r^2}\right) \left[1 - \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{3/2} \right] - 2\nu \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2} \\ \frac{\bar{\sigma}_z}{p_0} &= -\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2} \quad \bar{\tau}_{rz} = \bar{\tau}_{r\theta} = \bar{\tau}_{\alpha z} = 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

As tensões na superfície do semi-espaço elástico ($z = 0$) mas no exterior da área solicitada, são dadas pelas seguintes expressões:

$$\frac{\bar{\sigma}_r}{p_0} = -\frac{\bar{\sigma}_\theta}{p_0} = (1-2\nu) \left(\frac{a^2}{3r^2}\right) \quad (3.43)$$

As tensões no interior do semi-espaço elástico, ao longo do eixo Z ($x = y = 0$), são dadas pelas expressões:

$$\frac{\sigma_r}{p_0} = \frac{\sigma_\theta}{p_0} = -(1+\nu) \left[1 - \left(\frac{z}{a} \right) \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{z} \right) \right] + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z^2}{a^2} \right)^{-1} \quad (3.44)$$

$$\frac{\sigma_z}{p_0} = - \left(1 + \frac{z^2}{a^2} \right)^{-1}$$

A determinação analítica dos valores das tensões noutros pontos do semi-espaco elástico, também é possível, embora as correspondentes expressões sejam de manipulação muito trabalhosa, sendo preferível utilizar um método numérico.

3.7 Pressão Hertz aplicada sobre uma área elíptica

Mostrar-se-á no Capítulo 4 que o contacto sem atrito entre dois corpos de revolução elásticos, produz, no caso mais geral, uma área de contacto elíptica S como se mostra na figura 3.5. Os resultados para os deslocamentos e tensões são qualitativamente similares aos obtidos no caso de uma área circular, já que o círculo é um caso particular da elipse.

A distribuição de pressão de Hertz é definida por,

$$p(x, y) = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (3.45)$$

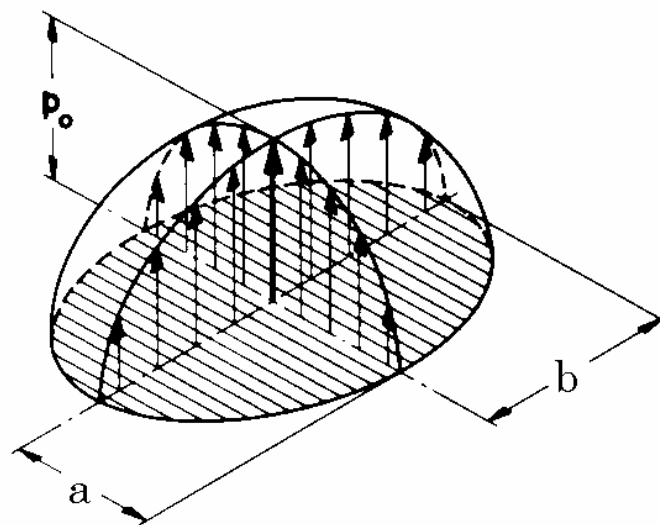


Figura 3.5 – Pressão de Hertz aplicada sobre uma área elíptica S [6].

actua sobre uma área elíptica S representada por,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 = 0 \quad (3.46)$$

e a carga total é igual a,

$$P = \iint_S p(x, y) dx dy = \iint_S p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy = \frac{2}{3} \pi a b p_0 \quad (3.47)$$

Recorrendo à função potencial de Boussinesq (ver 3.12)

$$\psi = \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial z} = \iint_S p(\xi, \eta) \frac{1}{\rho} d\xi d\eta \quad (3.48)$$

obtém-se, usando coordenadas elípticas,

$$\psi(x, y, z) = \frac{1}{2} \pi a b p_0 \int_{\lambda_1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + w} - \frac{y^2}{b^2 + w} - \frac{z^2}{w} \right) \frac{dw}{[(a^2 + w)(b^2 + w)w]^{1/2}} \quad (3.49)$$

e na superfície do semi-espaco elástico, e no interior da área solicitada, a função potencial de Boussinesq toma a forma,

$$\psi(x, y, 0) = \frac{1}{2} \pi a b p_0 \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + w} - \frac{y^2}{b^2 + w} \right) \frac{dw}{[(a^2 + w)(b^2 + w)w]^{1/2}} \quad (3.50)$$

A definição dos deslocamentos é bastante complexa. Considerando apenas os deslocamentos segundo Z dos pontos da superfície do semi-espaco elástico, situados no interior da área de aplicação da solitação, obtém-se que

$$\bar{u}_z = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} (L - M x^2 - N y^2) \quad (3.51)$$

onde

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{2} \pi a b p_0 \int_0^{\infty} \frac{dw}{[(a^2 + w)(b^2 + w)w]^{1/2}} = \pi a p_0 K(e) \\
 M &= \frac{1}{2} \pi a b p_0 \int_0^{\infty} \frac{dw}{[(a^2 + w)^3 (b^2 + w)w]^{1/2}} = \frac{\pi a p_0}{e^2 b^2} [K(e) - E(e)] \\
 N &= \frac{1}{2} \pi a b p_0 \int_0^{\infty} \frac{dw}{[(a^2 + w)(b^2 + w)^3 w]^{1/2}} = \frac{\pi a p_0}{e^2 b^2} \left[\frac{b^2}{a^2} E(e) - K(e) \right]
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

onde $E(e)$ e $K(e)$ são integrais elípticos sem solução analítica, mas tabelados, definidos por,

$$E(e) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} \, d\theta \quad K(e) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}} \tag{3.53}$$

São definidos ainda os integrais $E(\phi, e)$ e $F(\phi, e)$, necessários para o cálculo das tensões, também sem solução analítica e tabelados, definidos por,

$$E(\phi, e) = \int_0^{\phi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} \, d\theta \quad K(\phi, e) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}} \tag{3.54}$$

sendo

$$e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} \quad , \quad a < b$$

A determinação analítica das tensões é também bastante complicada, excepto segundo determinadas linhas bem definidas, nomeadamente ao longo dos eixos X , Y e Z .

a) Tensões segundo Z ($x = y = 0$):

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_x}{p_0} &= \frac{2a}{e^2 b} (\Omega_x - \nu \Omega'_x) \\ \frac{\sigma_y}{p_0} &= \frac{2a}{e^2 b} (\Omega_y - \nu \Omega'_y) \\ \frac{\sigma_z}{p_0} &= -\frac{a}{e^2 b} \left(\frac{1 - T^2}{T} \right)\end{aligned}\quad (3.55)$$

onde

$$\left. \begin{aligned}\Omega_x &= -\frac{1}{2} (1 - T) + \zeta [F(\phi, e) - E(\phi, e)] \\ \Omega'_x &= 1 - \left(\frac{b^2 T}{a^2} \right) + \zeta \left[\frac{b^2}{a^2} E(\phi, e) - F(\phi, e) \right] \\ \Omega_y &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2T} \right) - \left(\frac{b^2 T}{a^2} \right) + \zeta \left[\frac{b^2}{a^2} E(\phi, e) - F(\phi, e) \right] \\ \Omega'_y &= -1 + T + \zeta [F(\phi, e) - E(\phi, e)] \\ T &= \left(\frac{a^2 + z^2}{b^2 + z^2} \right)^{1/2} ; \quad \zeta = \frac{z}{b} = \cot \phi\end{aligned}\right\} (3.56)$$

b) Tensões segundo x ($y = z = 0$):

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_x}{p_0} &= -2\nu\gamma - (1-2\nu)\frac{2a}{e^2 b} \left[\left(1 - \frac{a\gamma}{b} \right) - \frac{x}{be} \tanh^{-1} \left(\frac{ex}{b+a\gamma} \right) \right] \\ \frac{\sigma_y}{p_0} &= -2\nu\gamma - (1-2\nu)\frac{2a}{e^2 b} \left[\left(\frac{b\gamma}{a} - 1 \right) + \frac{x}{be} \tanh^{-1} \left(\frac{ex}{b+a\gamma} \right) \right]\end{aligned}\quad (3.57)$$

e

$$\gamma = \left[1 - (x/a)^2 - (y/b)^2 \right]^{1/2}.$$

c) Tensões segundo y ($x = z = 0$),

$$\frac{\sigma_x}{p_0} = -2\nu\gamma - (1-2\nu)\frac{2a}{e^2 b} \left[\left(1 - \frac{a\gamma}{b} \right) - \frac{y}{be} \tanh^{-1} \left(\frac{bey}{a(b\gamma + a)} \right) \right]$$

$$\frac{\sigma_y}{p_0} = -2\nu\gamma - (1-2\nu)\frac{2a}{e^2 b} \left[\left(\frac{b\gamma}{a} - 1 \right) + \frac{y}{be} \tanh^{-1} \left(\frac{bey}{a(b\gamma + a)} \right) \right]$$
(3.58)

d) No centro do contacto ($x = y = z = 0$):

$$\frac{\sigma_x}{p_0} = -2\nu - (1-2\nu)\frac{a}{b+a}$$

$$\frac{\sigma_y}{p_0} = -2\nu - (1-2\nu)\frac{b}{b+a}$$
(3.59)

Bibliografia do Capítulo 3:

- [1] K. L. Johnson, “Contact Mechanics”, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1985. ISBN-0-521-25576-7
- [2] Timoshenko e Goodier, “Theory of Elasticity”, 3rd edition, McGraw-Hill, New York, USA, 1970. ISBN-0-07-085805-5
- [3] A. P. Boresi, e al. “Advanced Mechanics of Materials John Wiley & Sons, New York, USA, 1978. ISBN-0-471-08892-7
- [4] A. E. Love, “Mathematical theory of Elasticity”, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1985. ISBN-0-521-25576-7
- [5] Salomon, “Theory of Elasticity”, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1985. ISBN-0-521-25576-7
- [6] Eschman, Hasbargen e Weigand, “Ball and Roller Bearings – Theory, Design and Application”, 2nd Edition, John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1985. ISBN-0-471-26283-8

CAPÍTULO 4

CONTACTO NORMAL ENTRE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO ELÁSTICOS – TEORIA DE HERTZ

4.1 Apresentação do problema

Quando dois sólidos elásticos de revolução são postos em contacto um com o outro, tocam-se, inicialmente, num único ponto ou segundo uma linha. Se solicitados por uma determinada carga, mesmo de pequena intensidade, eles deformam-se na vizinhança do ponto inicial de contacto, originando uma pequena área de contacto de pequenas dimensões quando comparadas com as dos dois corpos. Na figura 4.1 mostra-se um exemplo de um problema de contacto, formado por dois discos elásticos, semicirculares, submetidos à acção de uma força F_n .

Para ser possível analisar este problema, é necessária uma **Teoria de Contacto**, que permita determinar a forma da área de contacto e a sua evolução com o aumento da solicitação, e a intensidade e a distribuição das pressões superficiais, normais e eventualmente tangenciais, transmitidas através da superfície de contacto. Finalmente, conhecida essa distribuição de pressões superficiais, será necessário poder determinar os campos de deslocamentos, deformações e tensões a que está submetido cada uma dos sólidos na vizinhança dessa área de contacto [1, 2, 3].

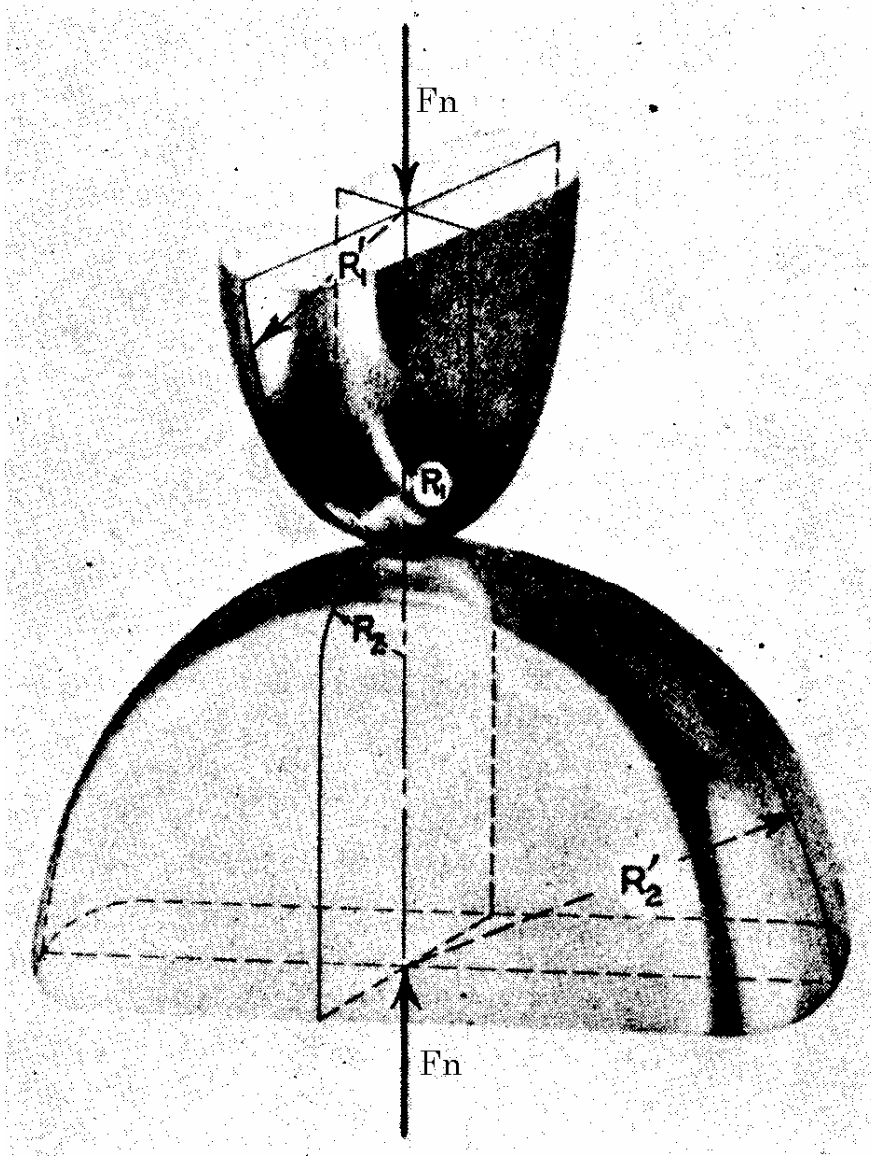


Figura 4.1 - Contacto entre dois discos elásticos, semicirculares, pressionados por uma força F_n [3].

Num problema de contacto a transmissão dos esforços é realizada através da interface entre os dois corpos, isto é entre porções limitadas das superfícies desses sólidos. Logo, a geometria dessas superfícies tem influência sobre o próprio contacto, sendo necessário definir a sua geometria com detalhe e precisão, antes de ser possível formular o problema de Elasticidade.

Quando postos em contacto os dois sólidos tocam-se num único ponto, O , designado de **ponto inicial de contacto**. Esse ponto é também a origem de um sistema de coordenadas rectangulares, no qual o plano $[X O Y]$ é o **plano tangente comum** às duas superfícies em O , sendo o eixo Z direccionado segundo a normal ao plano tangente comum, com sentido positivo dirigido para o interior do sólido inferior, como se mostra na figura 4.2.

Considera-se também que ambas as superfícies são perfeitamente lisas, portanto com rugosidade nula, e que a sua geometria é definível por uma função matemática, contínua até à segunda derivada, pelo menos na vizinhança do ponto inicial de contacto. Tal significa que secções rectas dos dois corpos, que contenham o ponto O , são curvas contínuas antes da aplicação da solitação, ou de um modo mais simples que os dois corpos são **sólidos de revolução** [1, 2, 3].

Assim, é também possível definir planos principais de curvatura para cada um dos sólidos (x_1Oz_1 , y_1Oz_1 , x_2Oz_2 , y_2Oz_2) e determinar os correspondentes **raios principais de curvatura**, respectivamente, R_{x1} , R_{y1} e R_{x2} , R_{y2} , como se mostra na figura 4.2. No caso mais geral os planos principais de curvatura dos dois sólidos fazem entre si um determinado ângulo α , embora em muitas aplicações correntes este ângulo seja nulo.

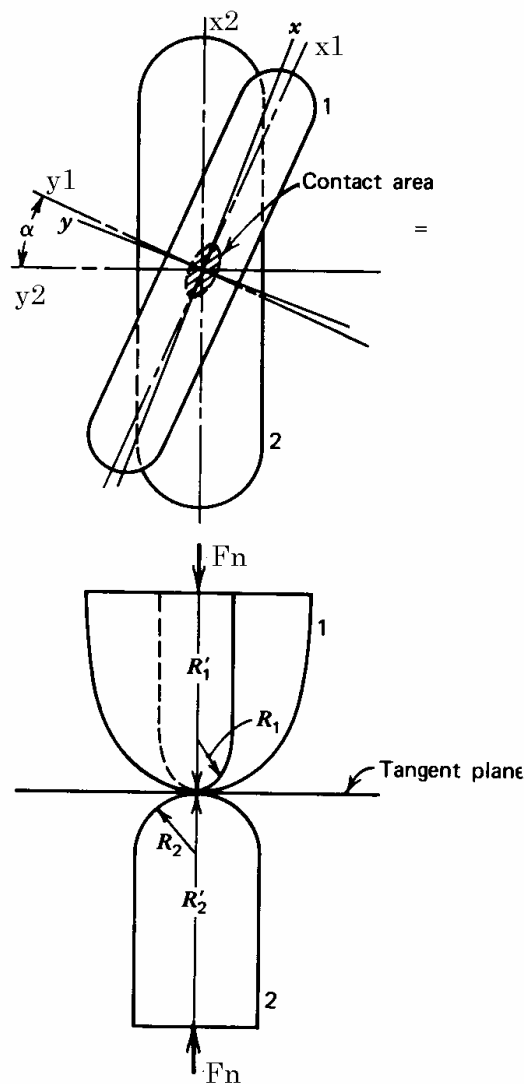


Figura 4.2 - Planos e raios principais de curvatura [3].

A linha de acção da força F_n passa pêlos centros de curvatura dos dois sólidos e pelo ponto inicial de contacto, O , pelo que também é perpendicular ao plano tangente comum.

Deste modo não haverá a tendência para que um sólido possa escorregar relativamente ao outro, e portanto, não existe qualquer sollicitação tangencial ou de atrito, $F_t = 0$.

Como referido, a sollicitação F_n provoca a deformação elástica dos sólidos, originando a formação de uma pequena superfície de contacto na vizinhança do ponto inicial de contacto, como também se mostra na figura 4.2.

4.2 Modelo de contacto (formulação do problema)

Essencialmente, o Modelo de Contacto relaciona a distância entre as superfícies dos sólidos em contacto, medida segundo a normal ao plano tangente comum, antes e após a deformação elástica provocada pela sollicitação aplicada.

4.2.1 Geometria das superfícies no estado não deformado

No caso dos sólidos em contacto serem perfeitamente lisos e de revolução, caso aqui considerado, é possível definir a distância de cada ponto da superfície do sólido I ao plano tangente comum pela seguinte expressão,

$$z_I = \frac{x_I^2}{2 R_{xI}} + \frac{y_I^2}{2 R_{yI}} \quad (4.1)$$

Tendo em consideração a figura 4.3, verifica-se que a distância z_I é igual à distância entre os pontos C ou D e o plano tangente comum; o triângulo ODD' permite escrever que

$$z_I = x_I \tan \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2} x_I \beta \quad (4.2)$$

já que o ângulo β é muito pequeno.

Por outro lado o triângulo KHD permite afirmar que

$$\tan \beta = \beta = \frac{KD}{HK} = \frac{x_1}{R_{x1}} \tag{4.3}$$

uma vez que sendo o ângulo β muito pequeno, R_{x1} é praticamente igual a HK . Substituindo a expressão 4.3 em 4.2 obtém-se que

$$z_1 = \frac{x_1^2}{2 R_{x1}} \tag{4.4}$$

Analogamente, pode ser definida a distância z_1 , mas agora entre os pontos E ou F e o plano tangente comum, a qual é definida por

$$z_1 = \frac{y_1^2}{2 R_{y1}} \tag{4.5}$$

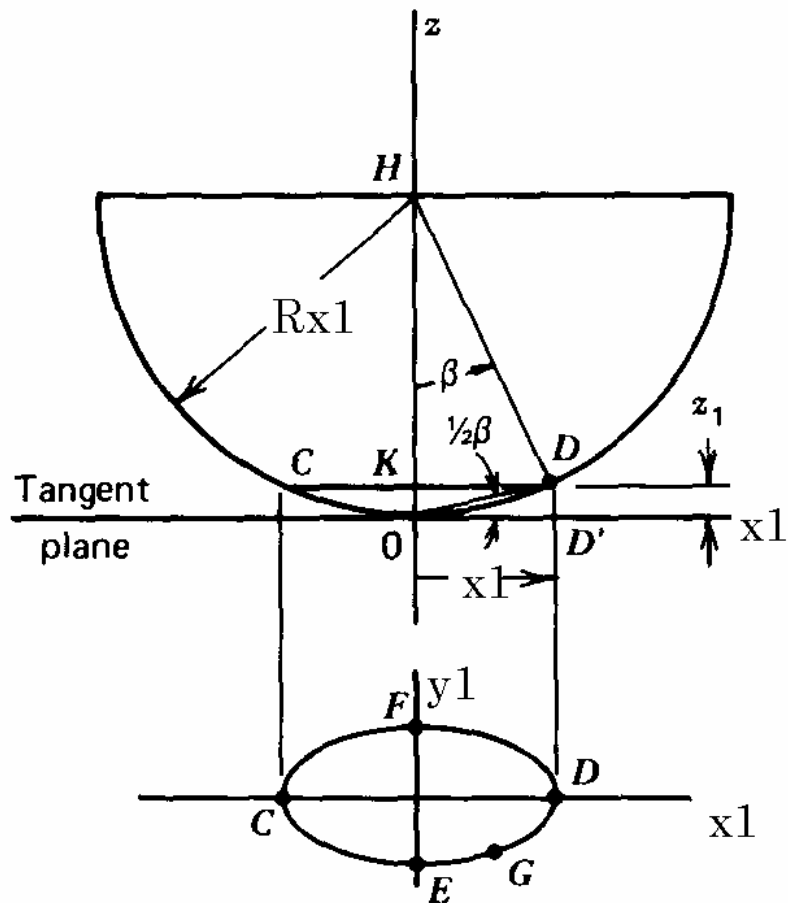


Figura 4.3 - Distância entre um ponto da superfície e o plano tangente comum [3].

Com base nos dois resultados anteriores, é possível determinar a distância entre o plano tangente comum e um ponto genérico G da superfície do sólido 1 , a qual é igual a

$$z_1 = \frac{x_1^2}{2 R_{x1}} + \frac{y_1^2}{2 R_{y1}} \quad (4.6)$$

o que é justificado pelo facto de que z_1 se transforma na expressão (4.5) quando $x_1 = 0$. Note-se ainda que o conjunto dos pontos G cuja distância ao plano tangente comum é constante, formam uma elipse, pelo que a expressão 4.6 é a equação de uma elipse.

Por analogia, a distância entre o plano tangente comum e um ponto genérico G da superfície do sólido 2 , é igual a

$$z_2 = \frac{x_2^2}{2 R_{x2}} + \frac{y_2^2}{2 R_{y2}} \quad (4.7)$$

Conhecidos z_1 e z_2 , é possível determinar a distância entre um ponto da superfície do sólido 1 e um ponto da superfície do sólido 2 , que estejam situados sobre a mesma normal ao plano tangente comum, isto é, a distância entre dois pontos em oposição, como se mostra na figura 4.3. Essa separação entre as duas superfícies é definida por

$$z = z_1 + z_2 = \frac{x_1^2}{2 R_{x1}} + \frac{y_1^2}{2 R_{y1}} + \frac{x_2^2}{2 R_{x2}} + \frac{y_2^2}{2 R_{y2}} \quad (4.8)$$

De modo a poder ser utilizada de um modo simples, esta expressão tem de ser convertida para coordenadas do sistema global O, X, Y, Z comum aos dois sólidos em contacto. Expressando as coordenadas x_2 e y_2 em função de x_1 e y_1 , obtém-se (ver figura 4.2)

$$x_2 = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha \quad (4.9)$$

$$y_2 = -x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha$$

e substituindo na expressão (4.8) determina-se

$$z = A' x_1^2 + 2H' x_1 y_1 + B' y_1^2 \quad (4.10)$$

sendo A' , H' e B' definidos por,

$$2A' = \frac{1}{R_{x1}} + \frac{1}{R_{y1}} \cos^2 \alpha + \frac{1}{R_{y2}} \sin^2 \alpha$$

$$2H' = \left(\frac{1}{R_{x2}} - \frac{1}{R_{y2}} \right) \cos \alpha \sin \alpha \quad (4.11)$$

$$2B' = \frac{1}{R_{y1}} + \frac{1}{R_{x2}} \sin^2 \alpha + \frac{1}{R_{y2}} \cos^2 \alpha$$

A equação (4.10) é a equação de uma elipse com centro no ponto O . Para a expressar em termos de x e y , isto é segundo as direcções do eixo menor e do eixo maior da elipse, é necessário converter as coordenadas Ox_1y_1 em coordenadas Oxy . Recorrendo novamente à figura 4.2, verifica-se que

$$x_1 = x \cos \lambda - y \sin \lambda$$

$$y_1 = x \sin \lambda + y \cos \lambda \quad (4.12)$$

e substituindo na expressão (4.10) obtém-se que

$$z = A x^2 + B y^2$$

ou

$$z = \frac{I}{2R_x} x^2 + \frac{I}{2R_y} y^2 \quad (4.13)$$

onde A e B são curvaturas equivalentes, e R_x e R_y são os raios de curvatura equivalentes, respectivamente, nas direcções x e y .

A , B , R_x e R_y , são definidos do seguinte modo:

$$A = D + E = \frac{1}{2R_x} \quad B = D - E = \frac{1}{2R_y} \quad , \quad A \geq B$$

$$D = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{R_{x1}} + \frac{1}{R_{y1}} + \frac{1}{R_{x2}} + \frac{1}{R_{y2}} \right) \quad (4.14)$$

$$E = \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{1}{R_{y1}} - \frac{1}{R_{x1}} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_{y2}} - \frac{1}{R_{x2}} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{R_{y1}} - \frac{1}{R_{x1}} \right) \left(\frac{1}{R_{y2}} - \frac{1}{R_{x2}} \right) \cos 2\alpha}$$

No caso particular do ângulo α ser nulo, o que corresponde a muitas aplicações correntes, as expressões (4.14) tomam a seguinte forma:

$$A = D + E = \frac{I}{R_x} = \frac{I}{2} \left(\frac{I}{R_{x1}} + \frac{I}{R_{x2}} \right) \quad (4.15)$$

$$B = D - E = \frac{I}{R_y} = \frac{I}{2} \left(\frac{I}{R_{y1}} + \frac{I}{R_{y2}} \right)$$

Frequentemente, é também definida a razão entre as curvaturas segundo x e y , a qual é igual a

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{I}{R_x}}{\frac{I}{R_y}} = \frac{R_y}{R_x} \quad , \quad \frac{A}{B} \geq 1 \quad (4.16)$$

O conjunto de pontos para os quais $z = A x^2 + B y^2 = \text{Constante}$ corresponde a pontos situados à mesma distância entre si e formam uma elipse.

4.2.2 Geometria das superfícies no estado deformado

Quando a solicitação F_n é aplicada, os sólidos em contacto deformam-se elasticamente, originando uma pequena superfície de contacto entre ambos, distribuída simetricamente em torno do ponto inicial de contacto.

Durante a aplicação da força F_n os centros dos sólidos em contacto deslocam-se segundo z , sendo esses deslocamentos elásticos designados por δ_1 e δ_2 , respectivamente para os sólidos 1 e 2, como representado na figura 4.4. Deste modo, os centros dos dois corpos aproximam-se um do outro, o que significa que a distância entre eles diminui de $\delta = \delta_1 + \delta_2$.

Se todos os pontos dos sólidos 1 e 2 se aproximassem da quantidade δ , então, na vizinhança do ponto O , os dois sólidos penetrariam um no interior do outro, como se mostra na figura 4.4, e por este motivo a quantidade $\delta = \delta_1 + \delta_2$ é designada por **penetração**. Tal penetração é, obviamente, fisicamente impossível.

Como a penetração é impossível, na vizinhança do ponto O os pontos das superfícies dos sólidos em contacto sofrem deslocamentos elásticos segundo z , relativamente aos centros dos sólidos, aproximando-se destes. Tais deslocamentos são designados por

$$\bar{u}_{z1} = w_1 \quad e \quad \bar{u}_{z2} = w_2$$

respectivamente para os sólidos 1 e 2 .

Deste modo, após deformação elástica, a distância entre os pontos S_1 e S_2 da superfície de cada um dos sólidos sofre uma diminuição igual a

$$\Delta z = \delta - (\omega_1 + \omega_2) \tag{4.17}$$

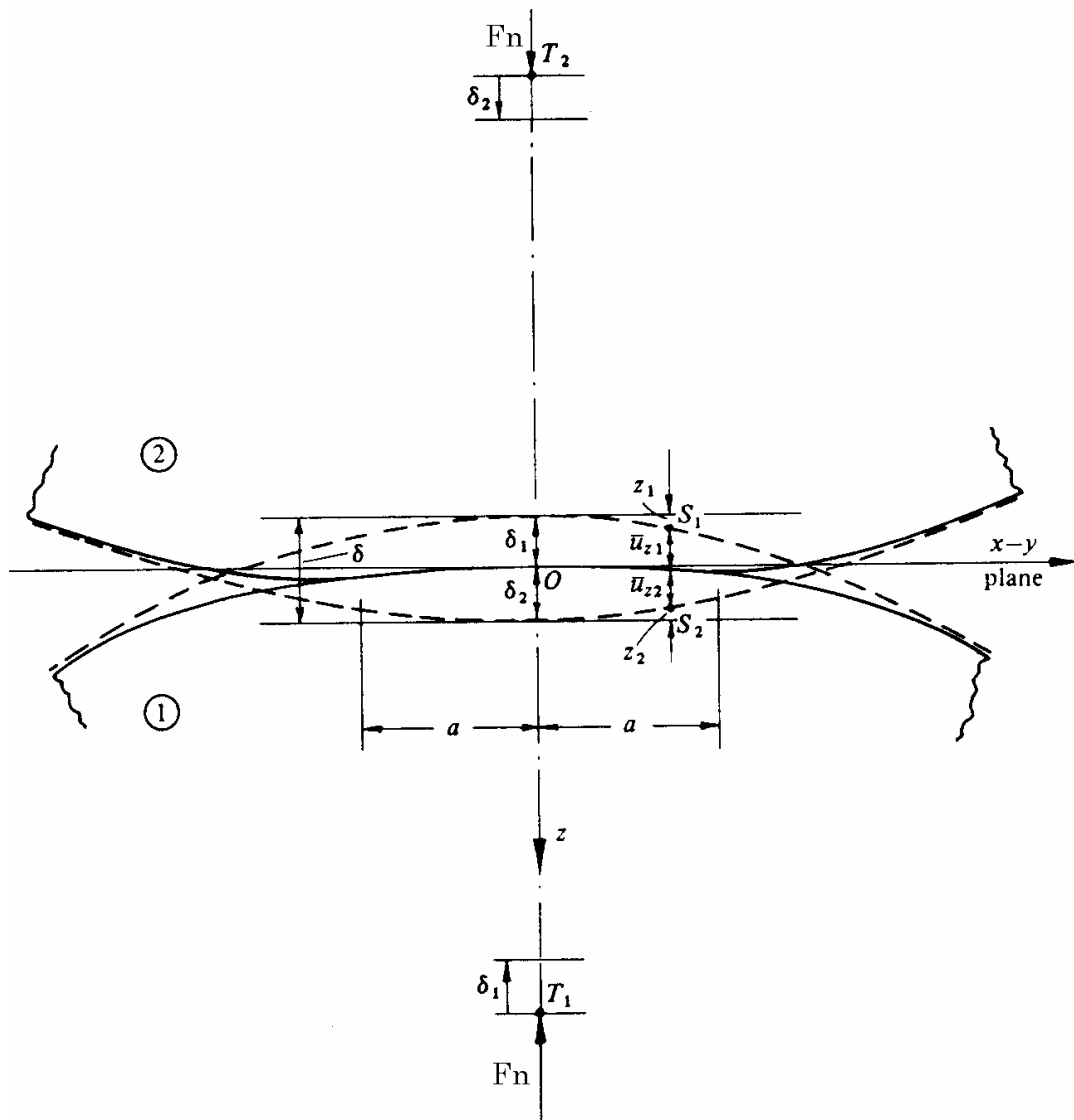


Figura 4.4 - Distância entre pontos das superfícies em contacto após deformação elástica [1].

Logo, após a aplicação da solicitação F_n a distância entre dois pontos S_1 e S_2 da superfície de cada um dos sólidos, passa a ser definida por

$$z = z_1 + z_2 - \delta + (\omega_1 + \omega_2) \quad (4.18)$$

isto é,

$$z = A x^2 + B y^2 - \delta + (\omega_1 + \omega_2) \quad (4.19)$$

Se após deformação, os pontos S_1 e S_2 entram em contacto, então a distância que os separa torna-se nula. Caso contrário, a distância entre eles permanece maior que zero.

Assim, pode-se afirmar que após a deformação elástica a distância entre dois pontos da superfície de cada um dos sólidos em contacto, situados sobre a mesma normal ao plano tangente comum, é definida por

$$A x^2 + B y^2 - \delta + (\omega_1 + \omega_2) \geq 0 \quad (4.20)$$

A inequação da deformada do problema de contacto (4.20) expressa a compatibilidade que deve existir entre os deslocamentos elásticos e a geometria dos sólidos. A inequação, é o resultado da não linearidade do problema, uma vez que as dimensões da superfície de contacto são desconhecidas à partida. Trata-se portanto de um problema de não linearidade de fronteira.

4.2.3 Pressões de contacto

Já foi referido que a única solicitação que actua sobre os sólidos em contacto é normal ao plano tangente comum, pelo que não existe qualquer força tangencial aplicada.

As pressões no interior da superfície de contacto, resultantes da solicitação aplicada, são desconhecidas, mas necessariamente normais à superfície, compressivas e maiores que zero. No exterior da área de contacto as tracções superficiais são nulas. Logo em qualquer ponto da superfície é possível afirmar que

$$p(x, y) = \sigma_n = \sigma_{zz} \geq 0 \quad (4.21)$$

4.2.4 Equilíbrio do sistema

As pressões desenvolvidas no interior da área de contacto, tem, por uma questão de equilíbrio, de igualar a solicação aplicada. Logo,

$$\iint_{\tau_c} p(x, y) dx dy = F_n \quad (4.22)$$

4.2.5 Forma da superfície de contacto

Os pontos, de ambas as superfícies, que entram em contacto à medida que a solicação é aplicada, correspondem a pontos situados à mesma distância entre si, isto é, pontos para os quais $z = A x^2 + B y^2 = \text{Constante}$; tal conjunto de pontos, como prova a expressão anterior, formam uma elipse. Logo, a superfície de contacto tem necessariamente a forma elíptica, isto é,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4.23)$$

onde a e b representam as dimensões dos eixos da elipse de contacto.

As expressões (4.20) a (4.23) representam a formulação do problema de contacto entre dois sólidos de revolução elásticos. A resolução simultânea deste conjunto de 4 expressões (2 inequações e 2 equações) permite obter a solução do problema.

4.3 Teoria de HERTZ

A solução do problema de contacto entre dois sólidos elásticos de revolução é devida a Hertz e data de 1882. Para derivar tal solução, Hertz partiu de algumas hipóteses base que importa recordar:

- i) o material dos sólidos em contacto tem um comportamento homogéneo, isotrópico e linear elástico, de acordo com a lei de Hooke;
- ii) os sólidos são de revolução, as suas superfícies são contínuas e contraformais, sendo conhecidos os seus raios principais de curvatura na vizinhança do ponto inicial de contacto;

- iii) a solicitação aplicada é puramente normal, e as superfícies não transmitem tracções tangenciais (superfícies sem atrito).

Hertz introduziu a simplificação de que os sólidos, para efeitos da determinação dos deslocamentos locais, podem ser considerados como semi-espacos elásticos, submetidos a uma solicitação normal, aplicada sobre uma pequena área elíptica da sua superfície plana (ver capítulo 3). Para que esta simplificação seja admissível, duas novas hipóteses tem de ser formuladas e satisfeitas:

- iv) as dimensões da área de contacto tem de ser pequenas quando comparadas com as dimensões de cada um dos sólidos em contacto;
- v) as dimensões da área de contacto tem de ser pequenas quando comparadas com as dimensões dos raios de curvatura equivalentes.

A hipótese iv) é necessária para garantir que o sólido se assemelha a um semi-espaco elástico, e portanto as pressões de contacto calculadas não são influenciadas pela presença das fronteiras dos sólidos junto à área de contacto. A última hipótese garante que as superfícies dos sólidos, no exterior do contacto, se aproximam da superfície plana do semi-espaco elástico.

4.3.1 Solução do problema de HERTZ

Hertz verificou que o problema de elasticidade representado pela expressão (4.20)

$$A x^2 + B y^2 - \delta + (\omega_1 + \omega_2) \geq 0$$

é formalmente idêntico ao problema do potencial electrostático: “uma carga eléctrica cuja intensidade sobre uma zona elíptica da superfície de um condutor varia de acordo com a ordenada de um semi-elipsóide, produz uma variação parabólica do potencial ao longo da superfície”. Verifica-se ainda, que o potencial electrostático satisfaz as mesmas equações diferenciais que devem ser satisfeitas pela Teoria da Elasticidade [1, 3].

Por analogia, uma distribuição de pressão semi-elipsoidal,

$$p(x, y) = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (4.24)$$

que actua sobre uma área de contacto elíptica,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 = 0 \quad (4.25)$$

produz um campo de deslocamentos na superfície do semi-espaco elástico definidos por

$$\bar{u}_z = w = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} (L - M x^2 - N y^2) \quad (4.26)$$

sendo a pressão máxima de Hertz p_0 função da carga total aplicada F_n

$$F_n = \iint_S p(x, y) dx dy = \iint_S p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy \quad (4.27)$$

$$F_n = \frac{2}{3} \pi a b p_0$$

Estes resultados já foram desenvolvidos aquando da análise dos semi-espacos elásticos submetidos a solicitações pontuais (Capítulo 3).

No caso de dois sólidos em contacto a expressão (4.26) transforma-se em

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} = w_1 + w_2 = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \right) (L - M x^2 - N y^2)$$

isto é

$$w_1 + w_2 = \frac{1}{\pi E^*} (L - M x^2 - N y^2) \quad (4.28)$$

com

$$\frac{1}{E^*} = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \quad (4.29)$$

e onde E^* representa o módulo de Young equivalente para os dois sólidos em contacto.

Os parâmetros L , M e N são definidos pelas seguintes expressões (ver parágrafo 3.7):

$$\begin{aligned}
 L &= \pi a p_0 K(e) \\
 M &= \frac{\pi a p_0}{e^2 b^2} [K(e) - E(e)] \\
 N &= \frac{\pi a p_0}{e^2 b^2} \left[\frac{b^2}{a^2} E(e) - K(e) \right]
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

sendo $E(e)$ e $K(e)$ integrais elípticas, sem solução analítica mas tabelados, definidos por,

$$E(e) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} \, d\theta \quad K(e) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}} \tag{4.31}$$

São ainda definidos os integrais $E(\phi, e)$ e $F(\phi, e)$, necessários para o cálculo das tensões, também sem solução analítica e tabelados, dados por,

$$E(\phi, e) = \int_0^{\phi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} \, d\theta \quad K(\phi, e) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}} \tag{4.32}$$

Nas expressões anteriores (4.31 e 4.32) a variável e é definida por:

$$\boxed{e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} \quad , \quad a < b} \tag{4.33}$$

Retomando a expressão (4.20)

$$A x^2 + B y^2 - \delta + (\omega_1 + \omega_2) \geq 0$$

e substituindo o termo $(\omega_1 + \omega_2)$ pela expressão (4.28), obtém-se

$$A x^2 + B y^2 - \delta + \frac{I}{\pi E^*} (L - M x^2 - N y^2) \geq 0 \tag{4.34}$$

o que para os pontos situados no interior da superfície de contacto conduz à seguinte expressão:

$$\delta - A x^2 - B y^2 = \frac{1}{\pi E^*} (L - M x^2 - N y^2) \quad (4.35)$$

Atendendo às definições de L , M , e N dadas pelas expressões (4.30), determina-se que:

$$\delta = \frac{L}{\pi E^*} = \frac{p_0}{E^*} a K(e)$$

$$A = \frac{M}{\pi E^*} = \frac{p_0}{E^*} \frac{a}{e^2 b^2} [K(e) - E(e)] \quad (4.36)$$

$$B = \frac{N}{\pi E^*} = \frac{p_0}{E^*} \frac{a}{e^2 b^2} \left[\frac{b^2}{a^2} E(e) - K(e) \right]$$

sendo a pressão máxima de Hertz, p_0 , e a pressão média no interior do contacto, p_m , iguais a

$$\boxed{\begin{aligned} p_0 &= \frac{3}{2} \frac{F_n}{\pi a b} \\ p_m &= \frac{F_n}{\pi a b} \end{aligned}} \quad (4.37)$$

A determinação da forma e dimensões da elipse de contacto é mais simples recorrendo à relação B/A . Atendendo às expressões (4.16) e (4.36) obtém-se que

$$\frac{B}{A} = \frac{R_x}{R_y} = \frac{\frac{b^2}{a^2} E(e) - K(e)}{K(e) - E(e)} \Leftrightarrow \quad (4.38)$$

$$k = \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{E(e)}{[K(e) - E(e)] \frac{B}{A} + K(e)}}$$

cuja solução pode ser obtida, iterativamente, do seguinte modo:

1. Arbitrar o valor inicial de $k^l = (a/b)^l = (A/B)^{-2/3}$;
2. Calcular o valor e^n - expressão 4.33;
3. Determinar o valor de $E(e^n)$ e $K(e^n)$;
4. Determinar $k^{n'} = (a/b)^{n'}$ - expressão 4.38;
5. Determinar $k^{n+1} = (k^n + k^{n'})/2$;
6. Retomar o ponto 2.

A solução analítica do problema de HERTZ é complicada, implicando o recurso a tabelas de integrais elípticos, e a métodos iterativos.

4.3.2 Solução do problema de HERTZ através de tabelas ou ábacos

Recorrendo às expressões (4.36), é possível determinar o valor da soma de $A + B$, isto é

$$A + B = \frac{p_0}{E^*} \frac{a}{e^2 b^2} \left[\frac{b^2}{a^2} E(e) - E(e) \right]$$

$$A + B = \frac{p_0}{E^*} \frac{a}{e^2 b^2} \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) E(e)$$

Atendendo às definições de e e p_0 , dadas pelas expressões (4.33) e (4.37), respectivamente, substituindo-as na expressão anterior, e procedendo a simplificações sucessivas, obtém-se

$$e^2 = \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \quad , \quad p_0 = \frac{3}{2} \frac{F_n}{\pi a b}$$

$$A + B = \frac{\frac{3}{2} \frac{F_n}{\pi a b}}{E^*} \frac{a}{\left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) b^2} \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) E(e)$$

Continuando a simplificação,

$$A + B = \frac{3}{2} \frac{F_n}{\pi a b} \frac{a}{\left(\frac{b^2 - a^2}{b^2}\right) b^2} \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2}\right) E(e)$$

$$A + B = \frac{3}{2} \frac{F_n}{\pi a b} \frac{1}{a} E(e) = \frac{3F_n}{2\pi a b E^*} \frac{1}{a} E(e)$$

$$\text{mas } b = \frac{a}{k}$$

$$A + B = \frac{3F_n}{2\pi \frac{a}{k} a E^*} \frac{1}{a} E(e) = \frac{F_n}{a^3 E^*} \frac{3kE(e)}{2\pi}$$

Assim é possível determinar uma expressão para o valor de a

$$a^3 = \frac{F_n}{(A + B)E^*} \frac{3kE(e)}{2\pi}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{F_n}{(A + B)E^*}} \sqrt[3]{\frac{3kE(e)}{2\pi}}$$

$$a = C_a \sqrt[3]{\frac{F_n}{(A + B)E^*}}$$

$$C_a = \sqrt[3]{\frac{3kE(e)}{2\pi}}$$

(4.39)

Os valores de C_a e de k podem ser obtidos na tabela 4.1 ou no ábaco da figura 4.5, em função do valor de A/B . Uma vez determinados os valores de a e k , o valor de b resulta da expressão $b = a/k$.

A/B	k	1/k	e	C _a	C _δ
1.0	1.000	1.000	0.000	0.909	2.356
1.1	1.000	1.000	0.000	0.909	2.356
1.2	0.886	1.129	0.464	0.856	2.215
1.3	0.840	1.190	0.543	0.834	2.155
1.4	0.799	1.252	0.601	0.815	2.100
1.5	0.763	1.311	0.646	0.797	2.049
1.6	0.731	1.368	0.682	0.782	2.003
1.7	0.702	1.425	0.712	0.767	1.959
1.8	0.676	1.479	0.737	0.754	1.919
1.9	0.652	1.534	0.758	0.742	1.882
2.0	0.631	1.585	0.776	0.731	1.846
2.1	0.611	1.637	0.792	0.721	1.813
2.2	0.592	1.689	0.806	0.711	1.782
2.3	0.575	1.739	0.818	0.702	1.753
2.4	0.559	1.789	0.829	0.693	1.725
2.5	0.544	1.838	0.839	0.685	1.699
2.6	0.530	1.887	0.848	0.678	1.674
2.7	0.517	1.934	0.856	0.671	1.650
2.8	0.505	1.980	0.863	0.664	1.627
2.9	0.493	2.028	0.870	0.658	1.605
3.0	0.483	2.070	0.876	0.652	1.584
3.1	0.472	2.119	0.882	0.646	1.564
3.2	0.463	2.160	0.886	0.640	1.545
3.3	0.453	2.208	0.892	0.635	1.527
3.4	0.445	2.247	0.896	0.630	1.509
3.5	0.436	2.294	0.900	0.625	1.492
3.6	0.428	2.336	0.904	0.620	1.475
3.7	0.421	2.375	0.907	0.616	1.460
3.8	0.413	2.421	0.911	0.612	1.444
3.9	0.407	2.457	0.913	0.607	1.430
4.0	0.400	2.500	0.917	0.603	1.415
4.1	0.394	2.538	0.919	0.600	1.401
4.2	0.387	2.584	0.922	0.596	1.388
4.3	0.382	2.618	0.924	0.592	1.375
4.4	0.376	2.660	0.927	0.589	1.363
4.5	0.370	2.703	0.929	0.585	1.350
4.6	0.365	2.740	0.931	0.582	1.338
4.7	0.360	2.778	0.933	0.579	1.327
4.8	0.355	2.817	0.935	0.576	1.316
4.9	0.351	2.849	0.936	0.573	1.305
5.0	0.346	2.890	0.938	0.570	1.290
5.1	0.342	2.924	0.940	0.567	1.284
5.2	0.337	2.967	0.942	0.564	1.274
5.3	0.333	3.003	0.943	0.562	1.264
5.4	0.329	3.040	0.944	0.559	1.254
5.5	0.325	3.077	0.946	0.557	1.245
5.6	0.322	3.106	0.947	0.554	1.236
5.7	0.318	3.145	0.948	0.552	1.227
5.8	0.314	3.185	0.949	0.549	1.218
5.9	0.311	3.215	0.950	0.547	1.210
6.0	0.308	3.247	0.951	0.545	1.202
6.1	0.304	3.289	0.953	0.543	1.194
6.2	0.301	3.322	0.954	0.540	1.186
6.3	0.298	3.356	0.955	0.538	1.178
6.4	0.295	3.390	0.955	0.536	1.170
6.5	0.292	3.425	0.956	0.534	1.163
6.6	0.289	3.460	0.957	0.532	1.156
6.7	0.287	3.484	0.958	0.530	1.148
6.8	0.284	3.521	0.959	0.528	1.141
6.9	0.281	3.559	0.960	0.527	1.135
7.0	0.279	3.584	0.960	0.525	1.128
7.1	0.276	3.623	0.961	0.523	1.121
7.2	0.274	3.650	0.962	0.521	1.115
7.3	0.271	3.690	0.963	0.520	1.108
7.4	0.269	3.717	0.963	0.518	1.102
7.5	0.267	3.745	0.964	0.516	1.096
7.6	0.264	3.788	0.965	0.515	1.090
7.7	0.262	3.817	0.965	0.513	1.084
7.8	0.260	3.846	0.966	0.511	1.078
7.9	0.258	3.876	0.966	0.510	1.073
8.0	0.256	3.906	0.967	0.508	1.067
8.1	0.254	3.937	0.967	0.507	1.061
8.2	0.252	3.968	0.968	0.505	1.056
8.3	0.250	4.000	0.968	0.504	1.051
8.4	0.248	4.032	0.969	0.503	1.045
8.5	0.246	4.065	0.969	0.501	1.040
8.6	0.244	4.098	0.970	0.500	1.035
8.7	0.243	4.115	0.970	0.498	1.030
8.8	0.241	4.149	0.971	0.497	1.025
8.9	0.239	4.184	0.971	0.496	1.020
9.0	0.238	4.202	0.971	0.495	1.016
9.1	0.236	4.237	0.972	0.493	1.011
9.2	0.234	4.274	0.972	0.492	1.006
9.3	0.233	4.292	0.972	0.491	1.002
9.4	0.231	4.329	0.973	0.490	0.997
9.5	0.230	4.348	0.973	0.488	0.993
9.6	0.228	4.386	0.974	0.487	0.988
9.7	0.227	4.405	0.974	0.486	0.984
9.8	0.225	4.444	0.974	0.485	0.980
9.9	0.224	4.464	0.975	0.484	0.976
10.0	0.222	4.505	0.975	0.483	0.972

Tabela 4.1 – Factores para a solução do problema de HERTZ.

A/B	k	1/k	e	C _a	C _δ	A/B	k	1/k	e	C _a	C _δ
1.0	1.000	1.000	0.000	0.909	2.356	51.0	0.082	12.195	0.997	0.341	0.478
2.0	0.631	1.585	0.776	0.731	1.846	52.0	0.081	12.346	0.997	0.339	0.474
3.0	0.483	2.070	0.876	0.652	1.584	53.0	0.080	12.500	0.997	0.338	0.470
4.0	0.400	2.500	0.917	0.603	1.415	54.0	0.079	12.658	0.997	0.337	0.466
5.0	0.346	2.890	0.938	0.570	1.294	55.0	0.078	12.821	0.997	0.336	0.462
6.0	0.308	3.247	0.951	0.545	1.202	56.0	0.077	12.987	0.997	0.334	0.459
7.0	0.279	3.584	0.960	0.525	1.128	57.0	0.077	12.987	0.997	0.333	0.455
8.0	0.256	3.906	0.967	0.508	1.067	58.0	0.076	13.158	0.997	0.332	0.452
9.0	0.238	4.202	0.971	0.495	1.016	59.0	0.075	13.333	0.997	0.331	0.448
10.0	0.222	4.505	0.975	0.483	0.972	60.0	0.074	13.514	0.997	0.330	0.445
11.0	0.209	4.785	0.978	0.472	0.933	61.0	0.074	13.514	0.997	0.329	0.442
12.0	0.198	5.051	0.980	0.463	0.899	62.0	0.073	13.699	0.997	0.327	0.438
13.0	0.189	5.291	0.982	0.455	0.869	63.0	0.072	13.889	0.997	0.326	0.435
14.0	0.180	5.556	0.984	0.447	0.842	64.0	0.072	13.889	0.997	0.325	0.432
15.0	0.172	5.814	0.985	0.441	0.817	65.0	0.071	14.085	0.997	0.324	0.429
16.0	0.166	6.024	0.986	0.435	0.795	66.0	0.070	14.286	0.998	0.323	0.426
17.0	0.160	6.250	0.987	0.429	0.774	67.0	0.070	14.286	0.998	0.322	0.423
18.0	0.154	6.494	0.988	0.424	0.756	68.0	0.069	14.493	0.998	0.321	0.421
19.0	0.149	6.711	0.989	0.419	0.738	69.0	0.068	14.706	0.998	0.320	0.418
20.0	0.144	6.944	0.990	0.414	0.722	70.0	0.068	14.706	0.998	0.320	0.415
21.0	0.140	7.143	0.990	0.410	0.707	71.0	0.067	14.925	0.998	0.319	0.413
22.0	0.136	7.353	0.991	0.406	0.692	72.0	0.067	14.925	0.998	0.318	0.410
23.0	0.132	7.576	0.991	0.402	0.679	73.0	0.066	15.152	0.998	0.317	0.408
24.0	0.129	7.752	0.992	0.398	0.667	74.0	0.066	15.152	0.998	0.316	0.405
25.0	0.126	7.937	0.992	0.395	0.655	75.0	0.065	15.385	0.998	0.315	0.403
26.0	0.123	8.130	0.992	0.392	0.644	76.0	0.065	15.385	0.998	0.314	0.400
27.0	0.120	8.333	0.993	0.388	0.633	77.0	0.064	15.625	0.998	0.313	0.398
28.0	0.118	8.475	0.993	0.385	0.623	78.0	0.064	15.625	0.998	0.313	0.396
29.0	0.115	8.696	0.993	0.383	0.614	79.0	0.063	15.873	0.998	0.312	0.394
30.0	0.113	8.850	0.994	0.380	0.605	80.0	0.063	15.873	0.998	0.311	0.391
31.0	0.110	9.091	0.994	0.377	0.596	81.0	0.062	16.129	0.998	0.310	0.389
32.0	0.108	9.259	0.994	0.375	0.588	82.0	0.062	16.129	0.998	0.310	0.387
33.0	0.106	9.434	0.994	0.373	0.580	83.0	0.061	16.393	0.998	0.309	0.385
34.0	0.104	9.615	0.995	0.370	0.572	84.0	0.061	16.393	0.998	0.308	0.383
35.0	0.103	9.709	0.995	0.368	0.565	85.0	0.060	16.667	0.998	0.307	0.381
36.0	0.101	9.901	0.995	0.366	0.558	86.0	0.060	16.667	0.998	0.307	0.379
37.0	0.099	10.101	0.995	0.364	0.551	87.0	0.060	16.667	0.998	0.306	0.377
38.0	0.098	10.204	0.995	0.362	0.545	88.0	0.059	16.949	0.998	0.305	0.375
39.0	0.096	10.417	0.995	0.360	0.538	89.0	0.059	16.949	0.998	0.305	0.373
40.0	0.095	10.526	0.995	0.358	0.533	90.0	0.058	17.241	0.998	0.304	0.371
41.0	0.093	10.753	0.996	0.356	0.527	91.0	0.058	17.241	0.998	0.303	0.369
42.0	0.092	10.870	0.996	0.354	0.521	92.0	0.058	17.241	0.998	0.303	0.368
43.0	0.091	10.989	0.996	0.353	0.516	93.0	0.057	17.544	0.998	0.302	0.366
44.0	0.089	11.236	0.996	0.351	0.510	94.0	0.057	17.544	0.998	0.301	0.364
45.0	0.088	11.364	0.996	0.349	0.505	95.0	0.057	17.544	0.998	0.301	0.362
46.0	0.087	11.494	0.996	0.348	0.501	96.0	0.056	17.857	0.998	0.300	0.361
47.0	0.086	11.628	0.996	0.346	0.496	97.0	0.056	17.857	0.998	0.299	0.359
48.0	0.085	11.765	0.996	0.345	0.491	98.0	0.056	17.857	0.998	0.299	0.357
49.0	0.084	11.905	0.996	0.343	0.487	99.0	0.055	18.182	0.998	0.298	0.356
50.0	0.083	12.048	0.997	0.342	0.482	100.0	0.055	18.182	0.998	0.298	0.354

Tabela 4.1 – Factores para a solução do problema de HERTZ (continuação).

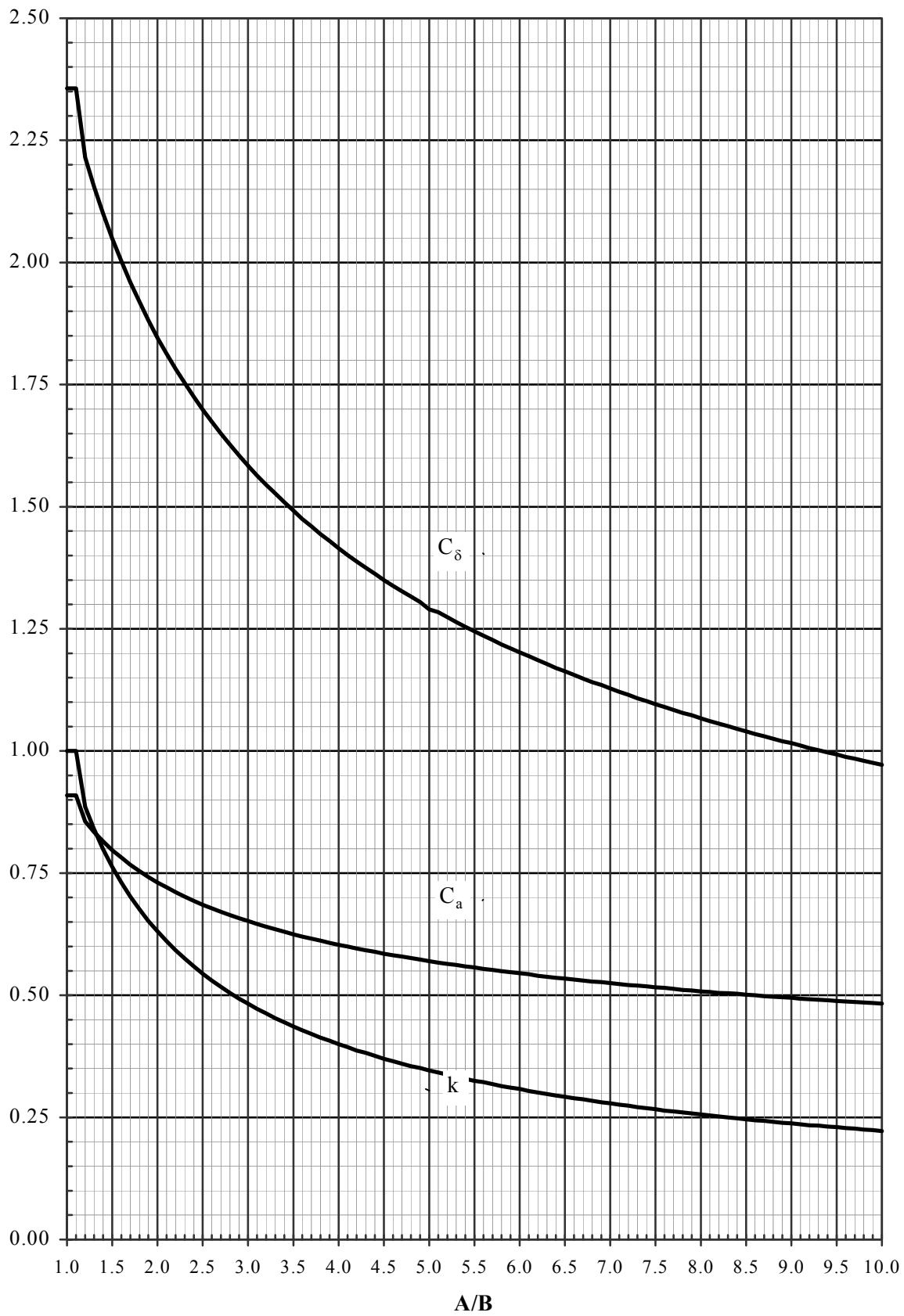


Figura 4.5 – Ábacos para a solução do problema de HERTZ .

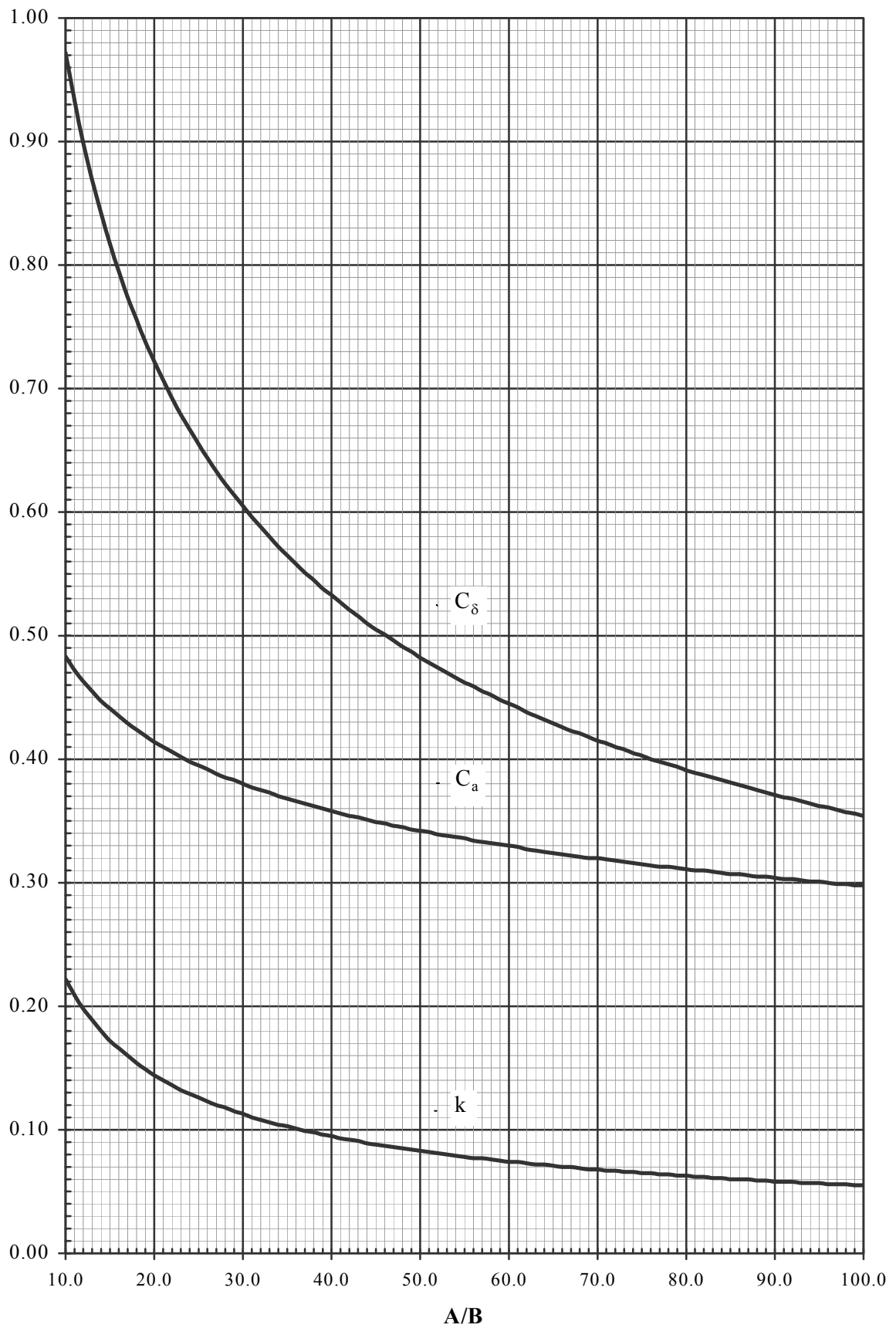


Figura 4.5 – Ábacos para a solução do problema de HERTZ (continuação).

A penetração δ , pode ser obtida a partir da expressão (4.36)

$$\delta = \frac{p_0}{E^*} a K(e) \quad , \quad p_0 = \frac{3}{2} \frac{F_n}{\pi a b}$$

$$\delta = \frac{\frac{3}{2} \frac{F_n}{\pi a b}}{E^*} a K(e) = \frac{3 F_n}{2 \pi a b E^*} a K(e) \quad , \quad b = \frac{a}{k}$$

$$\delta = \frac{3 F_n}{2 \pi \frac{a}{k} a E^*} a K(e) = \frac{F_n}{\pi a E^*} \frac{3 k K(e)}{2}$$

$$\boxed{\delta = C_\delta \frac{F_n}{\pi a E^*}}$$

$$\boxed{C_\delta = \frac{3 k K(e)}{2}}$$
(4.40)

Os valores de C_δ podem ser obtidos na tabela 4.1 ou no ábaco da figura 4.5, em função do valor de A/B .

4.4 Contacto pontual circular

No caso do contacto entre duas esferas, como se mostra na figura 4.6, os raios de curvatura de cada um dos sólidos são iguais entre si, pelo que $R_{x1} = R_{y1} = R_1$ e $R_{x2} = R_{y2} = R_2$.

A área de contacto é circular, o que corresponde a uma elipse de contacto em que o eixo maior e menor são iguais, isto é, $a = b$. Consequentemente, a elipticidade k é igual a 1 ($k = a/b$) e e é igual a 0 ($e^2 = 1 - k^2$).

Tendo em consideração as definições de A e B (4.15), verifica-se que,

$$\boxed{A = B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}$$
(4.41)

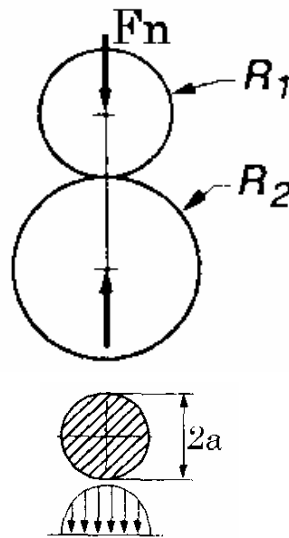


Figura 4.6 – Contacto entre duas esferas [4].

A distribuição de pressão é definida por (ver expressão 4.24)

$$p(r) = p_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \quad , \quad |r| \leq a \quad (4.42)$$

e a área de contacto pela expressão (ver 4.25),

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 - 1 = 0 \quad (4.43)$$

Recorrendo à solução geral do problema de Hertz, verifica-se que a pressão máxima de Hertz e pressão média são definidas, respectivamente, por (ver expressões 4.37)

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{3}{2} \frac{F_n}{\pi a^2} \\ p_m &= \frac{F_n}{\pi a^2} \end{aligned} \quad (4.44)$$

A dimensão a do raio da área de contacto Hertziana é definida pela expressão (4.39)

$$a = \sqrt[3]{\frac{3kE(e)}{2\pi}} \sqrt[3]{\frac{F_n}{(A+B)E^*}}$$

onde $k = 1$ e $e = 0$, e

$$E(e) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} \, d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

Logo o raio da área circular de contacto é definido por

$$a = b = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \frac{F_n}{(A + B)E^*}} = \frac{\pi}{2} \frac{p_0}{(A + B)E^*} \quad (4.45)$$

A penetração é definida no caso geral pela expressão (4.40),

$$\delta = \frac{3 k K(e)}{2} \frac{F_n}{\pi a E^*}$$

onde $k = 1$ e $e = 0$, e

$$K(e) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

Logo a penetração vem dada por

$$\delta = \frac{3}{4} \frac{F_n}{a E^*} = a^2 (A + B) = \frac{\pi}{2} \frac{a p_0}{E^*} \quad (4.46)$$

4.5 Contacto linear

No caso do contacto entre dois sólidos cilíndricos, inicialmente em contacto ao longo das respectivas geratrizes, as quais estão orientadas segundo a direcção Y , o problema torna-se bidimensional como se mostra na figura 4.7.

Quando submetidos a uma solicitação normal por unidade de comprimento W ($W = F_n / \ell$), os dois cilindros originam uma área de contacto rectangular, com a forma de uma banda muito estreita de largura $2a$, e um comprimento ℓ igual ao dos dois cilindros em contacto.

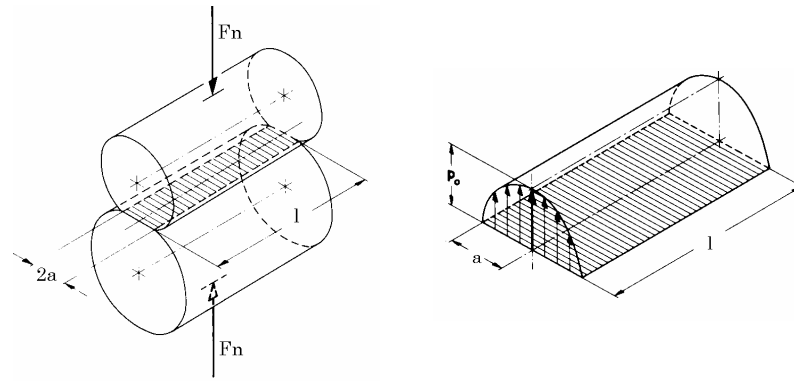


Figura 4.7 – Contato entre dois cilindros [5].

Hertz analisou este problema tratando-o como o limite de um contato elíptico, em que a dimensão b da elipse se tornou muito grande quando comparada com a ($b = \ell / 2 \gg a$). Neste caso a elipticidade K ($K = a/b$) tende no limite para 0 . Atendendo à definição do parâmetro M , dada pela expressão (3.52)

$$M = \frac{l}{2} \pi a b p_0 \int_0^\infty \frac{dw}{\left[(a^2 + w)^3 (b^2 + w) w \right]^{1/2}}$$

e às expressões (4.36), o parâmetro A é definido por

$$A = \frac{a b p_0}{2 E^*} \int_0^\infty \frac{dw}{\left[(a^2 + w)^3 (b^2 + w) w \right]^{1/2}}$$

Passando o parâmetro b para o denominador, e substituindo a variável w por u^2 e o diferencial dw por $(2 u du)$, obtém-se

$$A = \frac{a p_0}{2 E^*} \int_0^\infty \frac{dw}{\left[(a^2 + w)^3 \left(\frac{b^2 + w}{b^2} \right) w \right]^{1/2}}$$

$$A = \frac{a p_0}{E^*} \int_0^\infty \frac{u du}{\left[(a^2 + u^2)^3 \left(\frac{b^2 + u^2}{b^2} \right) u^2 \right]^{1/2}}$$

No limite quando $b \rightarrow \infty$, obtém-se

$$A = \frac{a p_0}{E^*} \int_0^{\infty} \frac{du}{(a^2 + u^2)^{3/2}}$$

$$A = \frac{p_0}{a E^*} \left[\frac{u}{(a^2 + u^2)^{1/2}} \right]_0^{\infty}$$

$$A = \frac{p_0}{a E^*}$$

isto é, a semi largura do contacto Hertziano é definida por

$$\boxed{a = \frac{p_0}{A E^*} = \frac{R_x p_0}{E^*}} \quad (4.47)$$

Num contacto linear a distribuição de pressão é definida pela expressão

$$\boxed{p(x) = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad |x| \leq a} \quad (4.48)$$

logo a solitação normal por unidade de comprimento F_n/ℓ deve igualar o integral da distribuição de pressão, isto é

$$\frac{F_n}{\ell} = \int_{-a}^{+a} p(x) dx = \int_{-a}^{+a} p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = \frac{p_0}{a} \int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$\frac{F_n}{\ell} = p_0 \frac{a}{2} \pi$$

Atendendo ao resultado de a , dado pela expressão (4.47), obtém-se que

$$\boxed{p_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{F_n}{\ell} A E^*} = \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{F_n}{\ell} \frac{E^*}{R_x}}} \quad (4.49)$$

e, consequentemente,

$$a = \sqrt{\frac{2 F_n}{\pi \ell} \frac{1}{A E^*}} = \sqrt{\frac{2 F_n}{\pi \ell} \frac{R_x}{E^*}} \quad (4.50)$$

A definição da penetração δ , também pode ser obtida recorrendo às expressões (3.52)

$$L = \frac{1}{2} \pi a b p_0 \int_0^\infty \frac{dw}{\left[(a^2 + w)(b^2 + w)w \right]^{1/2}}$$

e (4.36), pelo que

$$\delta = \frac{a b p_0}{2 E^*} \int_0^\infty \frac{dw}{\left[(a^2 + w)(b^2 + w)w \right]^{1/2}}$$

Passando o parâmetro b para o denominador, e substituindo a variável w por u^2 e o diferencial dw por $2 u du$, obtém-se

$$\delta = \frac{a p_0}{E^*} \int_0^\infty \frac{u du}{\left[(a^2 + u^2) \left(\frac{b^2 + u^2}{b^2} \right) u^2 \right]^{1/2}}$$

No limite quando $b \rightarrow \infty$, obtém-se

$$\delta = \frac{a p_0}{E^*} \int_0^\infty \frac{du}{(a^2 + u^2)^{1/2}}$$

isto é, a penetração é definida por

$$\delta = \frac{a p_0}{E^*} \left\{ \left[\ln \left(u + \sqrt{a^2 + u^2} \right) \right]_{u=\infty} - \ln a \right\} \quad (4.51)$$

Este resultado indica que, no caso de um contacto linear os deslocamentos elásticos dos pontos da superfície \bar{u}_{z1} e \bar{u}_{z2} , e portanto também $\delta = \bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2}$, dependem de uma referência localizada no infinito. A dependência em relação a essa referência no infinito já tinha sido demonstrado no parágrafo 2.3.

Bibliografia do Capítulo 4:

- [1] K. L. Johnson, “Contact Mechanics”, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1985. ISBN-0-521-25576-7
- [2] Timoshenko e Goodier, “Theory of Elasticity”, 3rd edition, McGraw-Hill, New York, USA, 1970. ISBN-0-07-085805-5
- [3] A. P. Boresi, e al. “Advanced Mechanics of Materials”, John Wiley & Sons, New York, USA, 1978. ISBN-0-471-08892-7
- [4] M. Aublin, e al. “Systèmes Mécaniques – Théorie et Dimensionnement”, 2^a Edição, Dunod, Paris, França. 1992. ISBN-2-10-001051-4
- [5] Eschman, Hasbargen e Weigand, “Ball and Roller Bearings – Theory, Design and Application”, 2nd Edition, John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1985. ISBN-0-471-26283-8

CAPÍTULO 5

TENSÕES NO INTERIOR DE SÓLIDOS EM CONTACTO

5.1 Tensões no interior de sólidos em contacto pontual

A teoria de Hertz, apresentada no Capítulo 4, está baseada em determinadas hipóteses, as quais determinam e condicionam o estado de tensão no interior de cada um dos sólidos em contacto. Convém pois recordar essas hipóteses de base:

- i) o material dos sólidos em contacto tem um comportamento homogéneo, isotrópico e linear elástico, de acordo com a lei de Hooke;
- ii) os sólidos são de revolução, as suas superfícies são contínuas e contraformais, sendo conhecidos os seus raios principais de curvatura na vizinhança do ponto inicial de contacto;
- iii) a solicitação aplicada é puramente normal, e as superfícies não transmitem tracções tangenciais (superfícies sem atrito);
- iv) as dimensões da área de contacto são pequenas quando comparadas com as dimensões de cada um dos sólidos em contacto;
- vi) as dimensões da área de contacto são pequenas quando comparadas com as dimensões dos raios de curvatura equivalentes;

- vii) os sólidos, para efeitos da determinação dos deslocamentos locais, podem ser considerados como semi-espacos elásticos, submetidos a uma solitação normal, aplicada sobre uma pequena área elíptica da sua superfície plana.

Partindo do pressuposto de que os sólidos em contacto se comportam como semi-espacos elásticos, como postulou Hertz, então a teoria de Boussinesq, anteriormente apresentada (capítulos 2 e 3), fornece a solução para o estado de tensão no interior dos sólidos em contacto.

No caso mais geral, a uma distribuição de pressão elipsoidal que actua sobre uma área de contacto elíptica (ver parágrafo 4.3.1), corresponde um estado de tensão muito complexo, e de difícil representação analítica. No entanto, é possível expressar essas tensões segundo determinadas direcções preferenciais, ao longo das quais as tensões atingem os seus valores mais representativos.

5.1.1 Tensões principais segundo *OZ*

No caso de um sólido submetido a um contacto do tipo Hertziano, as tensões ao longo do eixo *OZ* são tensões principais, em consequência da simetria geométrica e de solitação de contacto que ocorre segundo esse eixo. Tal implica também que ao longo do mesmo eixo as tensões de corte sejam nulas [1, 2, 3].

Essas tensões principais segundo *OZ* são definidas pelas seguintes expressões (ver equações 3.55 e 3.56):

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xx}}{p_0} &= \frac{2a}{e^2 b} (\Omega_x - \nu \Omega'_x) \\ \frac{\sigma_{yy}}{p_0} &= \frac{2a}{e^2 b} (\Omega_y - \nu \Omega'_y) \\ \frac{\sigma_{zz}}{p_0} &= -\frac{a}{e^2 b} \left(\frac{1 - T^2}{T} \right) \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde

$$\begin{aligned}
\Omega_x &= -\frac{1}{2} (1 - T) + \zeta [F(\phi, e) - E(\phi, e)] \\
\Omega'_x &= 1 - \left(\frac{b^2 T}{a^2} \right) + \zeta \left[\frac{b^2}{a^2} E(\phi, e) - F(\phi, e) \right] \\
\Omega_y &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2T} \right) - \left(\frac{b^2 T}{a^2} \right) + \zeta \left[\frac{b^2}{a^2} E(\phi, e) - F(\phi, e) \right] \\
\Omega'_y &= -1 + T + \zeta [F(\phi, e) - E(\phi, e)] \\
T &= \left(\frac{a^2 + z^2}{b^2 + z^2} \right)^{1/2} ; \quad \zeta = \frac{z}{b} = \cot \phi
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Na figura 5.1 está representada a distribuição das tensões principais ao longo do eixo OZ , para um contacto pontual Hertziano, onde a razão $A/B = 1.24$, e à qual corresponde uma elipticidade $k = a/b = 0.866$. As tensões principais são de compressão.

A análise da figura 5.1 mostra que as tensões principais, σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{zz} , atingem o seu valor máximo na superfície ($Z = 0$, e no centro da superfície de contacto), decrescendo, progressivamente de valor á medida que a profundidade z aumenta.

A tensão principal de maior intensidade é σ_{zz} , qualquer que seja a profundidade considerada, pelo que $\sigma_{zz} = \sigma_{m\acute{a}x}$.

$$\boxed{
\begin{aligned}
\sigma_{m\acute{a}x} &= p_0 = C_\sigma \sigma_{ref} \\
C_\sigma &= \frac{3}{2} \frac{k}{\pi} \frac{1}{C_a^3} \\
\sigma_{ref} &= a (A + B) E^*
\end{aligned}
} \tag{5.3}$$

Para o caso considerado ($A/B = 1.24$) obtém-se que $C_\sigma = 0.67$ e logo $\sigma_{m\acute{a}x} = 0.67 \sigma_{ref}$.

As tensões, σ_{xx} e σ_{yy} também atingem o seu valor máximo na superfície ($Z = 0$) sendo as suas intensidades sempre inferiores a σ_{zz} .

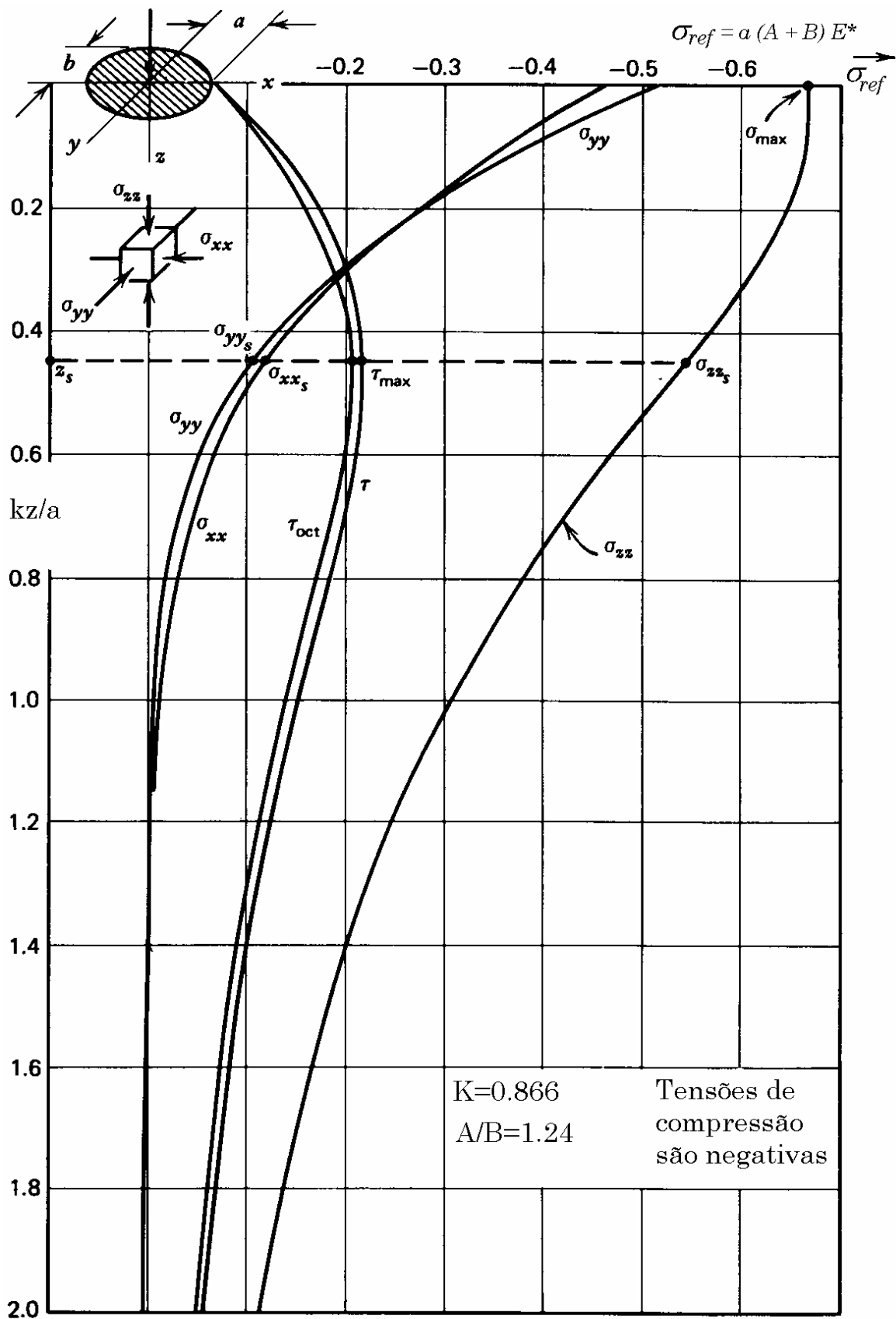


Figura 5.1 – Distribuição das tensões, no interior de um sólido em contacto, ao longo do eixo OZ ($\nu = 0.25$) [3].

5.1.2 Tensões de corte principais

A figura 5.1 mostra que as tensões σ_{xx} e σ_{yy} diminuem de intensidade com a profundidade z/a muito mais rapidamente do que σ_{zz} . Consequentemente, a tensão de corte máxima, definida de acordo com o Critério de Tresca

$$\tau = \frac{1}{2} (\sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{m\acute{i}n})$$

vai atingir o seu valor máximo a uma determinada profundidade Z_s abaixo da superfície, como representa a curva τ da figura 5.1. O valor máximo da tensão de corte máxima é, então, igual a $\frac{1}{2} (\sigma_{zz_s} - \sigma_{yy_s})$.

Para o exemplo apresentado, ao valor de $A/B = 1.24$ corresponde o valor de $\tau_{m\acute{a}x} = 0.22 \sigma_{ref}$ para uma profundidade $Z_s = 0.51 a$. No caso geral, o valor máximo da tensão de corte máxima pode ser definido por

$$\begin{aligned} \tau_{m\acute{a}x} &= C_\tau \sigma_{ref} \\ \tau_{m\acute{a}x} &= C_\tau a (A + B) E^* \end{aligned} \quad (5.4)$$

e a profundidade à qual ocorre essa tensão de corte máxima, Z_s , é definida por

$$Z_s = C_{Z_s} a \quad (5.5)$$

Os valores de C_τ e C_{Z_s} podem ser obtidos a partir dos ábacos representados nas figuras 5.2 e 5.3, uma vez determinado o valor de A/B para os dois sólidos em contacto.

Considerando o Critério de von-Mises, pode-se obter a tensão de corte octaédrica máxima definida por

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2}$$

a qual atinge o seu valor máximo para a mesma profundidade Z_s abaixo da superfície à qual actua a tensão de corte máxima, como mostra a curva τ_{oct} da figura 5.1.

Para o exemplo apresentado, ao valor de $A/B = 1.24$ corresponde o valor de $\tau_{oct} = 0.21 \sigma_{ref}$.
 No caso geral, o valor máximo da tensão de corte octaédrica pode ser definido por

$$\begin{aligned} \tau_{máx}^{oct} &= C_G \sigma_{ref} \\ \tau_{máx}^{oct} &= C_G a (A + B) E^* \end{aligned} \tag{5.6}$$

O valor de C_G pode também ser obtido a partir dos ábacos representados nas figuras 5.2 e 5.3, uma vez determinado o valor de A/B para os dois sólidos em contacto.

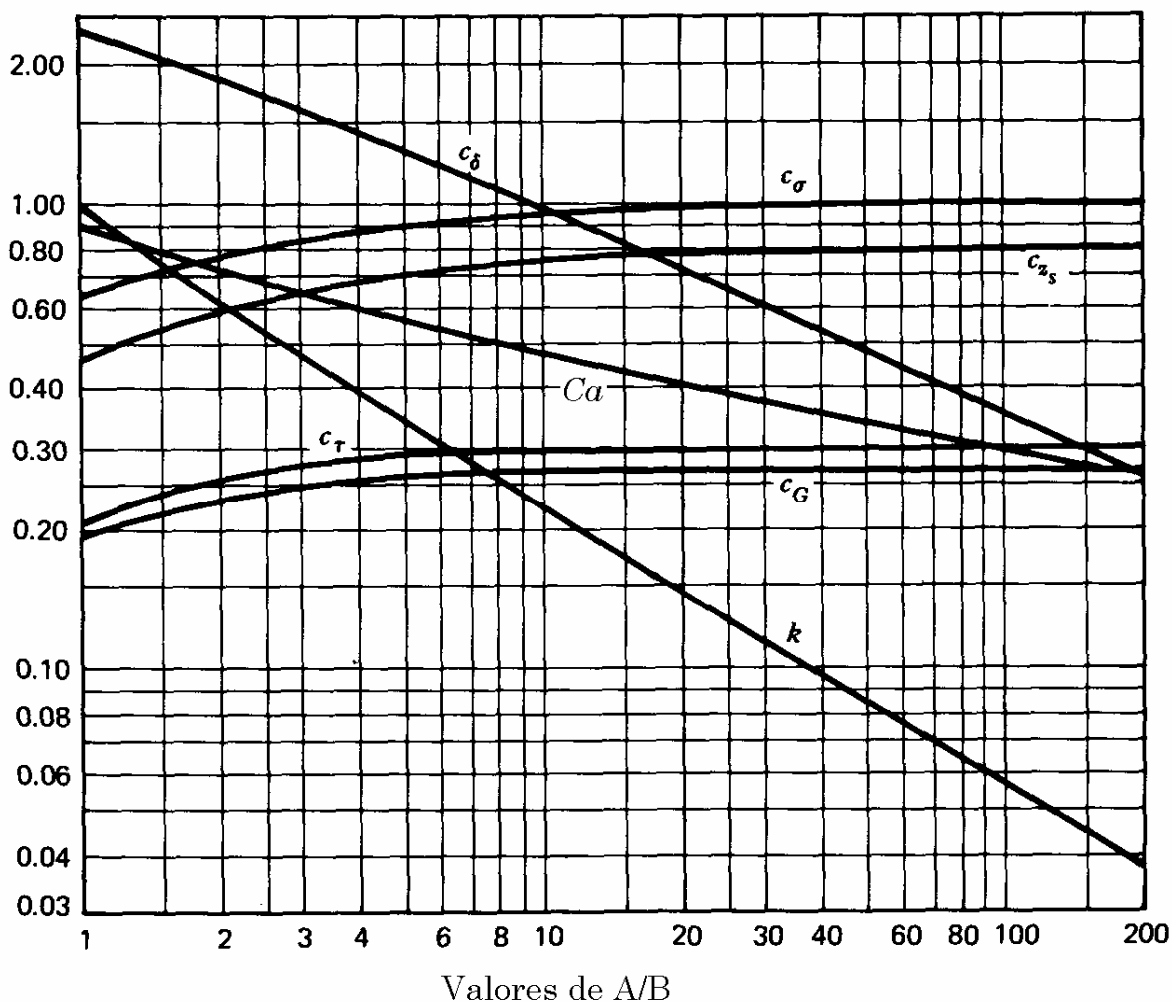


Figura 5.2 – Ábaco para a determinação dos coeficientes das deformações e das tensões para dois sólidos em contacto ($A/B < 200$) [3].

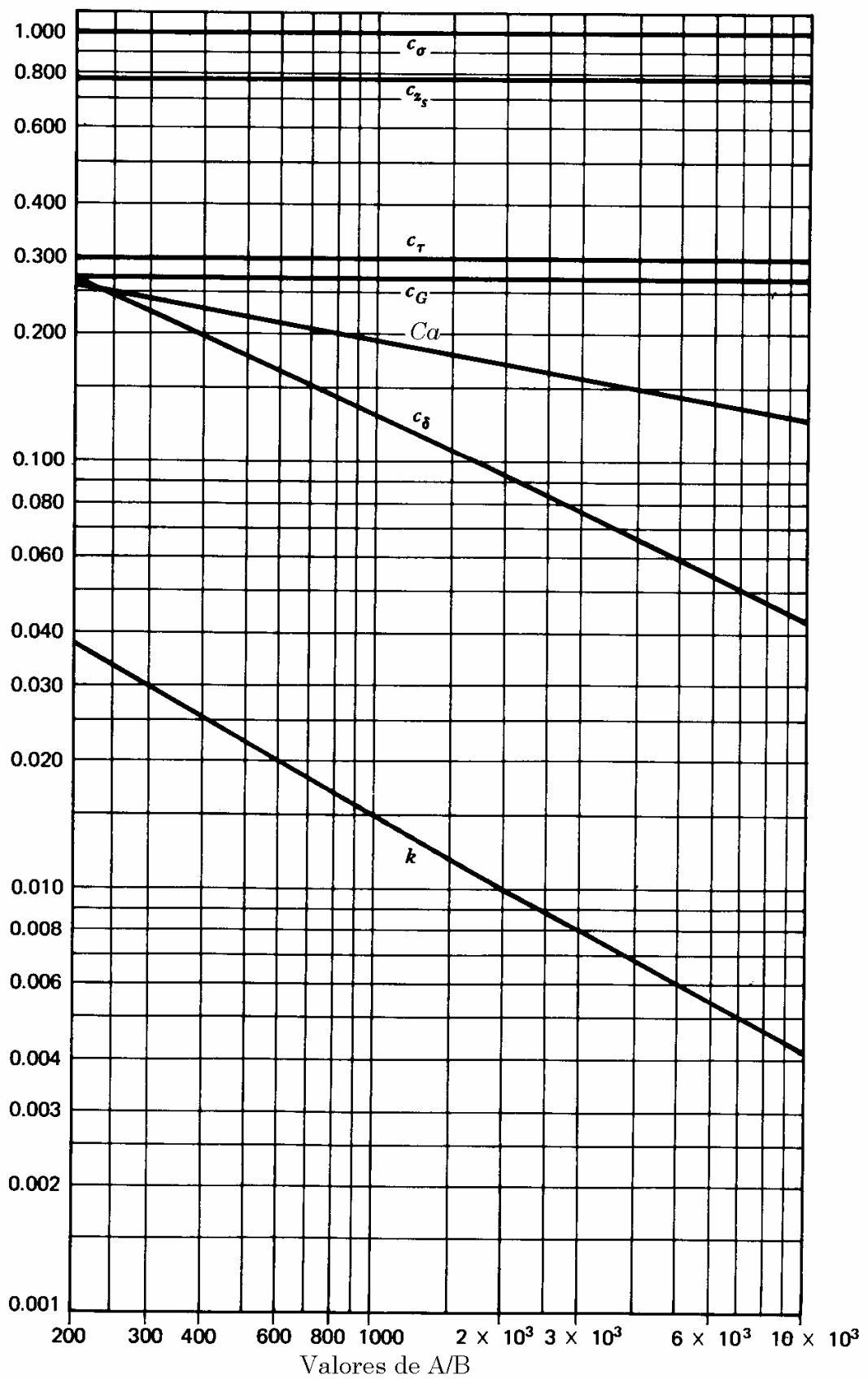


Figura 5.3 – Ábaco para a determinação dos coeficientes das deformações e das tensões para dois sólidos em contacto ($A/B > 200$) [3].

5.1.3 Tensão de corte ortogonal

Nos parágrafos anteriores apenas foi analisada a distribuição das tensões ao longo do eixo OZ ($x = 0$ e $y = 0$), tendo-se verificado que a tensão de corte máxima e a tensão de corte octaédrica máxima ocorrem no interior dos sólidos em contacto, em pontos equidistantes do plano tangente comum, e situados sobre uma linha perpendicular á superfície do contacto que passa pelo seu centro. Os valores destas tensões são significativos para os critérios de avaria ou falha associados à iniciação da deformação plástica do material.

No entanto, os valores significativos das tensões associados às avarias de fadiga em rolamentos, parecem estar associados a outros tipos de tensões tangenciais que actuam em planos perpendiculares e paralelos à superfície de contacto.

As tensões τ_{xz} e τ_{yz} actuam em planos perpendiculares ao eixo OZ , e são designadas por tensões de corte ortogonais, já que também actuam em planos que são ortogonais com a superfície de contacto, como se mostra na figura 5.4. As tensões de corte ortogonais têm valor nulo em qualquer ponto do eixo OZ , onde $\tau_{máx}$ ocorre.

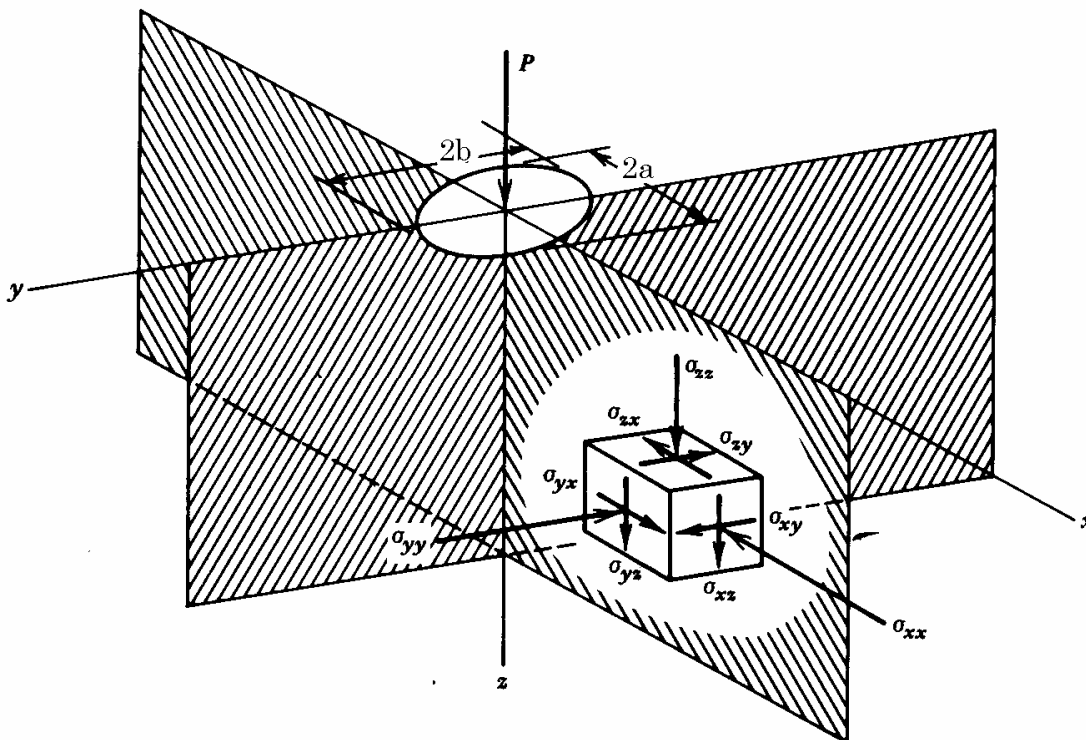


Figura 5.4 –Tensões de corte ortogonais τ_{xz} e τ_{yz} [3].

Considere-se o contacto entre os dois toroides representado na figura 5.5. Os dois sólidos rolam um sobre o outro, sendo OX a direcção de rolamento, e um dos eixos da elipse de contacto coincide com essa direcção de rolamento.

Na figura 5.5 está também representada a variação da tensão de corte ortogonal τ_{xz} correspondente a um ponto P , do interior de um dos sólidos em contacto, que durante o movimento de rolamento se aproxima da superfície de contacto, passa sob ela e se afasta. Durante esse movimento de rolamento a tensão τ_{xz} em P vai aumentando até atingir um valor máximo positivo (para $x_P \approx a$), começa a decrescer tendo valor nulo no centro do contacto, continua a decrescer atingindo um valor máximo negativo (para $x_P \approx -a$), e finalmente aumenta rapidamente tendendo para 0. Logo,

$$\tau_{xz}^{\max} = \tau_0, \quad \text{para } x_P \cong a;$$

$$\tau_{xz} = 0, \quad \text{para } x_P = 0;$$

$$\tau_{xz}^{\min} = -\tau_0, \quad \text{para } x_P \cong -a.$$

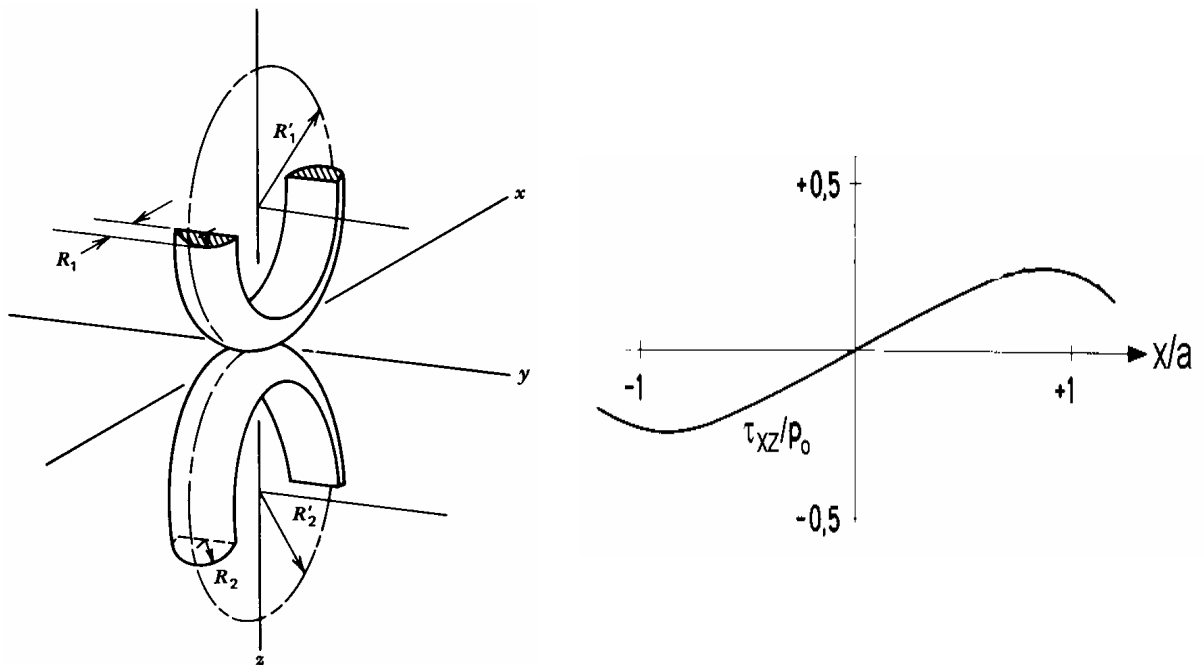


Figura 5.5 – Variação da tensão de corte ortogonal τ_{xz} ao longo da direcção de rolamento no contacto entre dois toroides [3, 4].

Embora τ_0 seja sempre inferior a $\tau_{m\acute{a}x}$, a gama de variação da tensão de corte ortogonal, para um determinado ponto do interior de um dos sólidos em contacto,   igual a $2\tau_0$, o que na maioria das aplicações correntes   superior   gama de variação de $\tau_{m\acute{a}x}$.

Refira-se ainda que $\tau_{yz}^{m\acute{a}x}$ pode ser superior a τ_0 , contudo não muda de sinal durante o movimento de rolamento e portanto a gama de variação de τ_{yz}   igual a $\tau_{yz}^{m\acute{a}x}$. A gama de variação da tensão de corte ortogonal   considerada muito importante para a fadiga por contacto de rolamento.

As tensões de corte ortogonais podem ser determinadas a partir das seguintes expressões:

$$\tau_{xz} = -\frac{3F_n Q}{2\pi b^2} = -a(A+B)E^* \frac{kQ}{E(e)} = -\sigma_{ref} \frac{kQ}{E(e)}$$

$$\tau_{yz} = -\frac{3F_n R}{2\pi a^2} = -a(A+B)E^* \frac{R}{kE(e)} = -\sigma_{ref} \frac{R}{kE(e)}$$

onde

$$Q = \frac{\left(\frac{x}{b}\right)\left(\frac{z}{b}\right)\left[\left(1 + \frac{c^2}{b^2}\right)\frac{c^2}{b^2}\right]^{-3/2}\left(k^2 + \frac{c^2}{b^2}\right)^{-1/2}}{\left[\left(\frac{bx}{b^2 + c^2}\right)^2 + \left(\frac{by}{a^2 + c^2}\right)^2 + \left(\frac{bz}{c^2}\right)^2\right]}$$

$$R = \frac{\left(\frac{y}{a}\right)\left(\frac{z}{a}\right)\left[\left(1 + \frac{c^2}{a^2}\right)\frac{c^2}{a^2}\right]^{-3/2}\left(\frac{1}{k^2} + \frac{c^2}{a^2}\right)^{-1/2}}{\left[\left(\frac{ax}{b^2 + c^2}\right)^2 + \left(\frac{ay}{a^2 + c^2}\right)^2 + \left(\frac{az}{c^2}\right)^2\right]}$$

e c^2   a raiz positiva da equação

$$\frac{x^2}{b^2 + c^2} + \frac{y^2}{a^2 + c^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Os valores máximos de τ_{xz} e τ_{yz} ocorrem nos planos de simetria $Y = 0$ e $X = 0$. Para o plano $Y = 0$, obtém-se

$$\tau_{xz} = -a(A+B)E^* \frac{kQ(y=0)}{E(e)}$$

$$\tau_{yz} = 0$$

e para o plano $X = 0$ obtém-se

$$\tau_{xz} = 0$$

$$\tau_{yz} = -a(A+B)E^* \frac{R(x=0)}{kE(e)}$$

A determinação da localização do ponto P , em particular da profundidade em relação à superfície de contacto onde ocorre τ_0 , e da intensidade de τ_0 , dependem de vários factores, em particular da elipticidade e da orientação da elipse de contacto em relação à direcção de rolamento, isto é, em função do parâmetro k'

$$k' = \frac{\text{dimensão da elipse de contacto segundo a direcção de rolamento}}{\text{dimensão da elipse de contacto segundo a perpendicular à direcção de rolamento}}$$

A variação da intensidade da tensão de corte ortogonal máxima τ_0 com k' é representada pelo parâmetro $C\tau_0$ da figura 5.6, e a variação da profundidade z_0 , à qual ocorre a tensão de corte ortogonal máxima, com k' , é representada pelo parâmetro Cz_0 da figura 5.7. Os valores de τ_0 e z_0 são definidos pelas seguintes expressões (onde $a < b$):

$$\begin{array}{l} 2\tau_0 = C_{\tau_0} a(A+B)E^*, \quad k' < 1 \text{ (se } a \equiv \text{ direcção de rolamento);} \\ 2\tau_0 = C_{\tau_0} b(A+B)E^*, \quad k' > 1 \text{ (se } b \equiv \text{ direcção de rolamento).} \end{array} \quad (5.7)$$

$$\begin{array}{l} Z_0 = C_{z_0} a, \quad k' < 1 \text{ (se } a \equiv \text{ direcção de rolamento);} \\ Z_0 = C_{z_0} b, \quad k' > 1 \text{ (se } b \equiv \text{ direcção de rolamento).} \end{array} \quad (5.8)$$

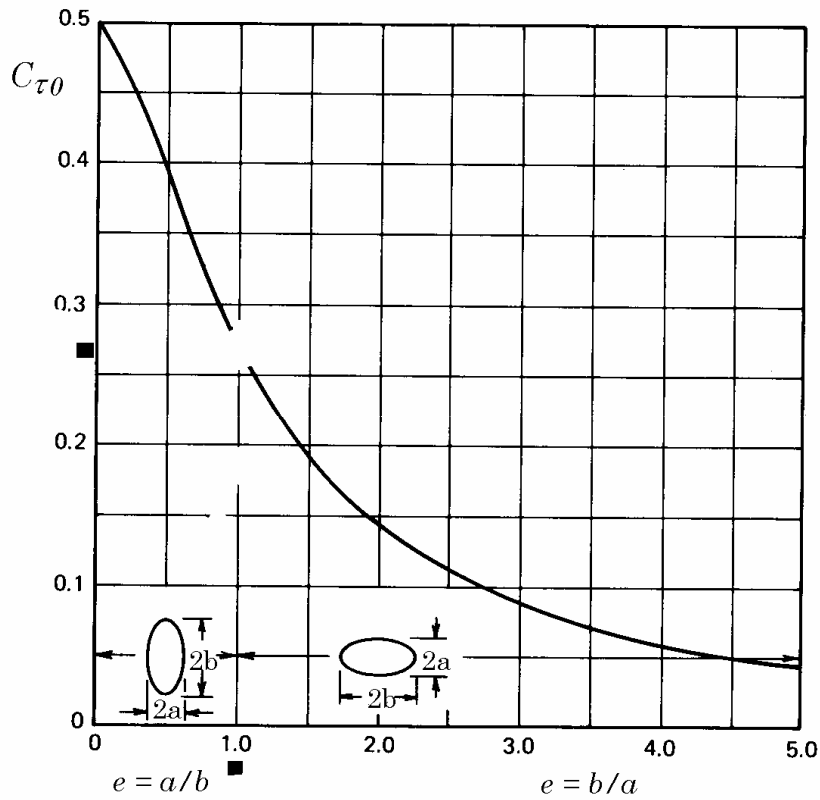


Figura 5.6 – Coeficiente C_{τ_0} para a determinação da tensão de corte ortogonal máxima [3].

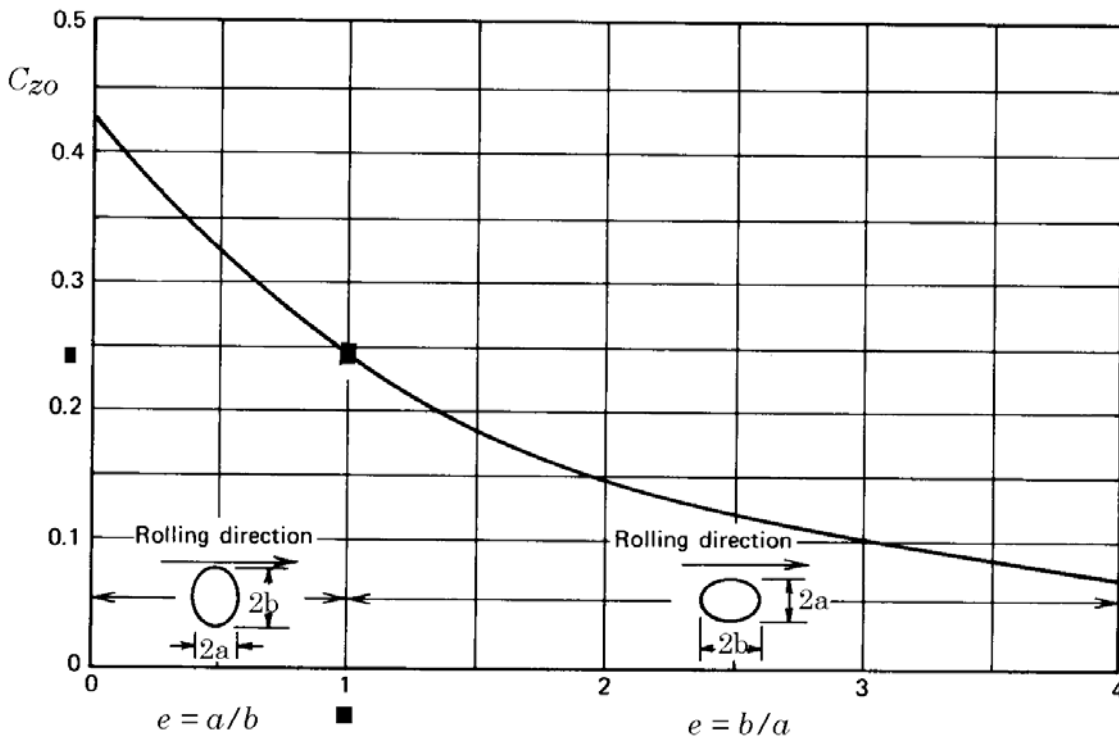


Figura 5.7 – Coeficiente C_{z_0} para a determinação da profundidade para a qual ocorre a tensão de corte ortogonal máxima [3].

As avarias de fadiga, em sólidos submetidos a solicitações de contacto de rolamento, dependem da gama de variação da tensão de corte ortogonal máxima, $2\tau_0$. Contudo, o valor de $2\tau_0$ necessário para atingir a fadiga de rolamento num determinado número de ciclos não é igual ao valor da tensão de corte máxima necessário para atingir a fadiga, no mesmo número de ciclos, em provetes de torção alternada, os quais são frequentemente utilizados para avaliar as propriedades de fadiga de um dado material.

De facto, o contacto de rolamento, produz um campo hidrostático de tensões compressivas muito elevadas, que favorecem a resistência do material contra a avaria de fadiga superficial. Usualmente, determina-se o valor de $2\tau_0$ necessário para atingir a fadiga de rolamento num determinado número de ciclos, para uma determinada orientação da elipse de contacto e para um determinado valor da elipticidade $k = a/b$ (portanto um determinado valor de k'), assumindo que num outro problema de fadiga de rolamento, com diferente valor de k' , a fadiga ocorrerá para o mesmo número de ciclos quando $2\tau_0$ tiver a mesma intensidade.

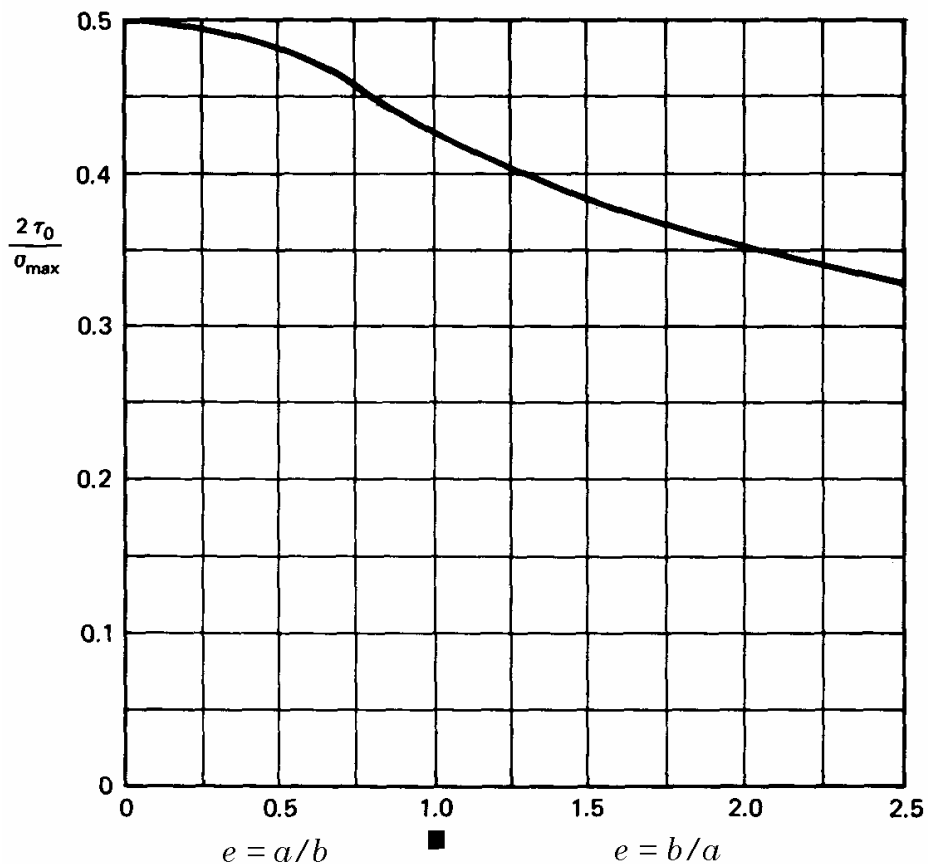


Figura 5.8 – Razão $2\tau_0/\sigma_{\max}$ em função de k' [3].

Uma vez que o valor de $\sigma_{m\acute{a}x} = p_0$ é normalmente calculado em todos os problemas de contacto, não é necessário determinar τ_0 , se a razão $2\tau_0/\sigma_{m\acute{a}x} = 2\tau_0/p_0$ for conhecida em função do parâmetro k' , como se representa na figura 5.8, para um valor de $\nu = 0.25$.

Para ilustrar o significado e utilidade da figura 5.8, analise-se o contacto entre dois cilindros que rolam um sobre o outro, sem escorregar, até surgir uma avaria de fadiga de contacto. Num contacto linear como o considerado, o eixo maior da elipse de contacto b , é muito grande quando comparado com o eixo menor a , podendo-se considerar que $k' = 0$. Segundo a figura 5.8 obtém-se que $2\tau_0/\sigma_{m\acute{a}x1} = 0.5$.

Supondo que os toroides representados na figura 5.5 são feitos do mesmo material que os cilindros anteriormente referidos, e que os seus raios de curvatura são tais que $k' = 1.3$, obtém-se através da figura 5.8 que $2\tau_0/\sigma_{m\acute{a}x2} = 0.4$.

Se os números de ciclos, ao fim dos quais os cilindros em contacto e os toroides atingem uma avaria de fadiga, forem iguais, então a variação da tensão de corte ortogonal máxima $2\tau_0$ a que estão submetidos também é idêntica, pelo que $\sigma_{m\acute{a}x2} = 1.25 \sigma_{m\acute{a}x1}$.

Este resultado supõe que a resistência à fadiga do material é a mesma para os dois tipos de contacto e de solicitação. Na realidade tal não é totalmente verdadeiro por causa do efeito de escala ou de volume. No caso do contacto entre os dois cilindros o volume de material sob tensão é muito maior que no caso do contacto entre os dois toroides, e portanto a sua resistência à fadiga deverá ser bastante superior. Logo, a intensidade de $2\tau_0$ para os toroides deve ser maior que a dos cilindros para que a fadiga de contacto ocorra no mesmo número de ciclos. O resultado obtido, $\sigma_{m\acute{a}x2} = 1.25 \sigma_{m\acute{a}x1}$, é portanto um valor conservador.

5.2 Tensões no interior de sólidos em contacto linear

No capítulo 4 (parágrafo 4.5) foi analisado o contacto entre dois cilindros, cujos eixos são paralelos entre si, e que originam, após solicitação, uma superfície de contacto rectangular, com a forma de uma banda muito estreita de largura $2a$ e um comprimento λ igual ao dos cilindros.

Considerando as hipóteses de Hertz referidas anteriormente, e em particular que os sólidos, para efeitos da determinação dos deslocamentos locais, podem ser considerados como semi-espacos elásticos, submetidos a uma solicitação normal, aplicada sobre uma pequena banda infinitamente longa, então a teoria de Boussinesq, anteriormente apresentada (capítulos 2), fornece a solução para o estado de tensão no interior dos sólidos em contacto. Em qualquer do interior de um dos sólidos em contacto as tensões aplicadas são definidas por

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -a A E^* \frac{1}{\pi} \left[z \left(\frac{a^2 + 2z^2 + 2x^2}{a} \phi_1 - \frac{2\pi}{a} - 3x\phi_2 \right) \right] \\ \sigma_{yy} &= -a A E^* \frac{2\nu}{\pi} \left[z \left(\frac{a^2 + z^2 + x^2}{a} \phi_1 - \frac{\pi}{a} - 2x\phi_2 \right) \right] \\ \sigma_{zz} &= -a A E^* \frac{1}{\pi} [z (a \phi_1 - x \phi_2)] \\ \tau_{xz} &= -a A E^* \frac{1}{\pi} (z^2 \phi_2) \qquad \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0\end{aligned}\tag{5.9}$$

onde

$$\phi_1 = \frac{\pi(M+N)}{MN\sqrt{2MN+2x^2+2z^2-2a^2}}$$

$$\phi_2 = \frac{\pi(M-N)}{MN\sqrt{2MN+2x^2+2z^2-2a^2}}$$

$$M = \sqrt{(a+x)^2 + z^2} \qquad N = \sqrt{(a-x)^2 + z^2}$$

Embora menos complexa do que no caso de um contacto pontual, a distribuição de tensões no interior de um sólido em contacto linear, ainda não é de interpretação simples. Em seguida são apresentadas as distribuições de tensões segundo determinadas direcções preferenciais.

5.2.1 Tensões principais segundo OZ

As tensões ao longo do eixo OZ são tensões principais, em consequência da simetria geométrica e de solicitação de contacto que ocorre segundo esse eixo, como no caso do contacto pontual, e logo as tensões de corte também são nulas ao longo do mesmo eixo. Então, segundo o eixo OZ

$$M = N = \sqrt{a^2 + z^2}$$

$$\phi_1 = \frac{\pi}{a z} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2}} \quad \phi_2 = 0$$

e as tensões principais vêm definidas pelas seguintes expressões

$$\sigma_{xx} = -a A E^* \left[\frac{\left(\sqrt{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2} - \frac{z}{a} \right)^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2}} \right]$$

$$\sigma_{yy} = -a A E^* 2\nu \left(\sqrt{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2} - \frac{z}{a} \right)$$

$$\sigma_{zz} = -a A E^* \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2}}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$$
(5.10)

Na figura 5.9 mostra-se a variação das tensões principais ao longo do eixo OZ , para o caso de um contacto linear submetido a um estado plano de deformação ($\epsilon_{yy} = 0$). Verifica-se novamente que as tensões σ_{xx} e σ_{yy} diminuem de intensidade com a profundidade mais rapidamente do que σ_{zz} .

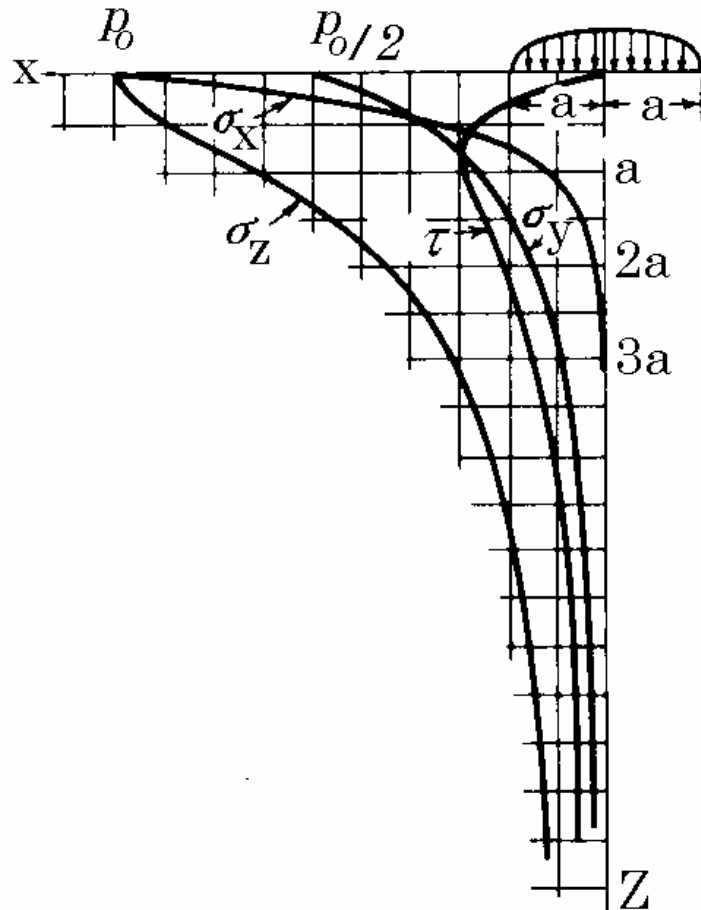


Figura 5.9 – Tensões principais ao longo do eixo OZ , para um contacto linear [2].

Tal como no caso de um contacto pontual, é possível calcular os valores máximos das tensões principais ao longo do eixo OZ , assim como da tensão de corte máxima e da tensão de corte octaédrica máxima, e a profundidade à qual ocorrem.

5.2.2 Valores máximos das tensões segundo OZ

A análise das expressões 5.10 e da figura 5.9, mostra que as tensões principais segundo o eixo OZ atingem os seus valores mais elevados (de compressão) na superfície de contacto ($z = 0$), tendo os seguintes valores:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = - a A E^* \\ \sigma_{yy} = - 2 \nu a A E^* \\ \sigma_{zz} = - a A E^* \end{cases} \quad (5.11)$$

A tensão de corte, segundo o Critério de Tresca, é definida por $\tau = \frac{1}{2} (\sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{m\acute{i}n})$, a qual até uma determinada profundidade é dada por $\tau = \frac{1}{2} (\sigma_{zz} - \sigma_{yy})$ e partir daí por $\tau = \frac{1}{2} (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})$, e dependendo do valor de ν .

Substituindo os valores de σ_{zz} e σ_{xx} na expressão de Tresca, calculando a primeira derivada em ordem a z da expressão resultante e igualando a 0, obtém-se a profundidade para a qual a tensão de corte atinge o seu valor máximo.

Tal profundidade é definida por Z_s , sendo igual a:

$$Z_s = + 0.7861 a \quad (5.12)$$

A esta profundidade as tensões principais são definidas por

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = - 0.1856 a A E^* \\ \sigma_{yy} = - 0.9718 \nu a A E^* \\ \sigma_{zz} = - 0.7861 a A E^* \end{cases}$$

pelo que a tensão de corte máxima toma o seguinte valor

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{1}{2} (\sigma_{zz} - \sigma_{xx}) = 0.300 a A E^* = 0.3 p_0 \quad (5.13)$$

Considerando o Critério de von-Mises, em alternativa ao critério de Tresca, obtém-se a tensão de corte octaédrica máxima, a qual toma o seguinte valor

$$\tau_{m\acute{a}x}^{oct} = 0.270 a A E^* = 0.27 p_0 \quad (5.14)$$

e actua à mesma profundidade Z_s que a tensão de corte máxima.

A tensão de corte máxima pode ser calculada em qualquer ponto do interior dos sólidos, usando as expressões (5.9). A figura 5.10 mostra as “isobáricas” dos pontos do interior de um sólido em contacto, submetidos ao mesmo valor de tensão de corte máxima.

A análise da figura mostra que a tensão de corte máxima atinge o seu valor mais elevado sobre o eixo OZ e à profundidade Z_s anteriormente referida.

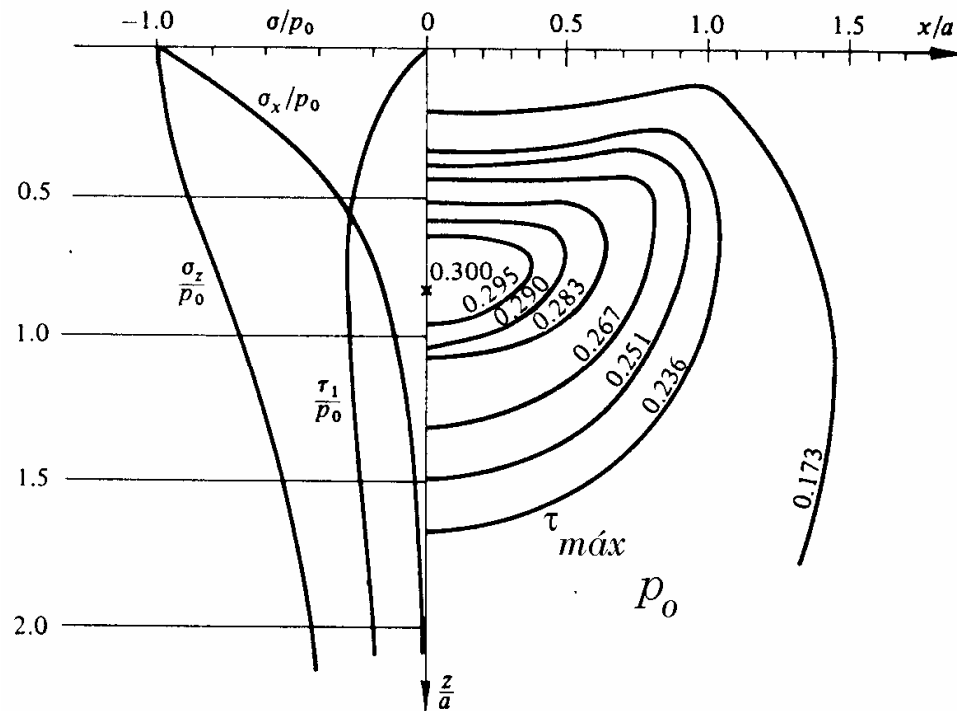


Figura 5.10 – Linhas “isobáricas” da tensão de corte máxima ($\tau_{máx}/p_0$) no interior de um sólido em contacto linear [1].

5.2.3 Tensão de corte ortogonal

As expressões (5.9) permitem também determinar o valor da tensão de corte ortogonal τ_{xz} , em qualquer ponto do interior dos sólidos, obtendo-se

$$\tau_{xz} = -a A E^* \frac{z^2 (M - N)}{M N \sqrt{(M + N)^2 - 4 a^2}} \quad (5.15)$$

$$M = \sqrt{(a+x)^2 + z^2} \quad ; \quad N = \sqrt{(a-x)^2 + z^2}$$

A figura 5.11 mostra as “isobáricas” dos pontos do interior de um sólido em contacto linear, submetidos ao mesmo valor de tensão de corte ortogonal. A análise da figura mostra que a tensão de corte ortogonal, tal como no caso de um contacto pontual, apresenta um máximo positivo e um máximo negativo designado por τ_0 os quais ocorrem nos pontos de coordenadas $|x_0| = 0.85 a$ e $z_0 = 0.42 a$, definidos do seguinte modo

$$\begin{array}{l}
 \tau_{xz}^{max} = \tau_0 = 0.250 a A E^* = 0.25 p_0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0/a = 0.85 \\ z_0/a = 0.42 \end{array} \right. \\
 e \\
 \tau_{xz}^{min} = -\tau_0 = -0.250 a A E^* = -0.25 p_0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0/a = -0.85 \\ z_0/a = 0.42 \end{array} \right.
 \end{array} \tag{5.16}$$

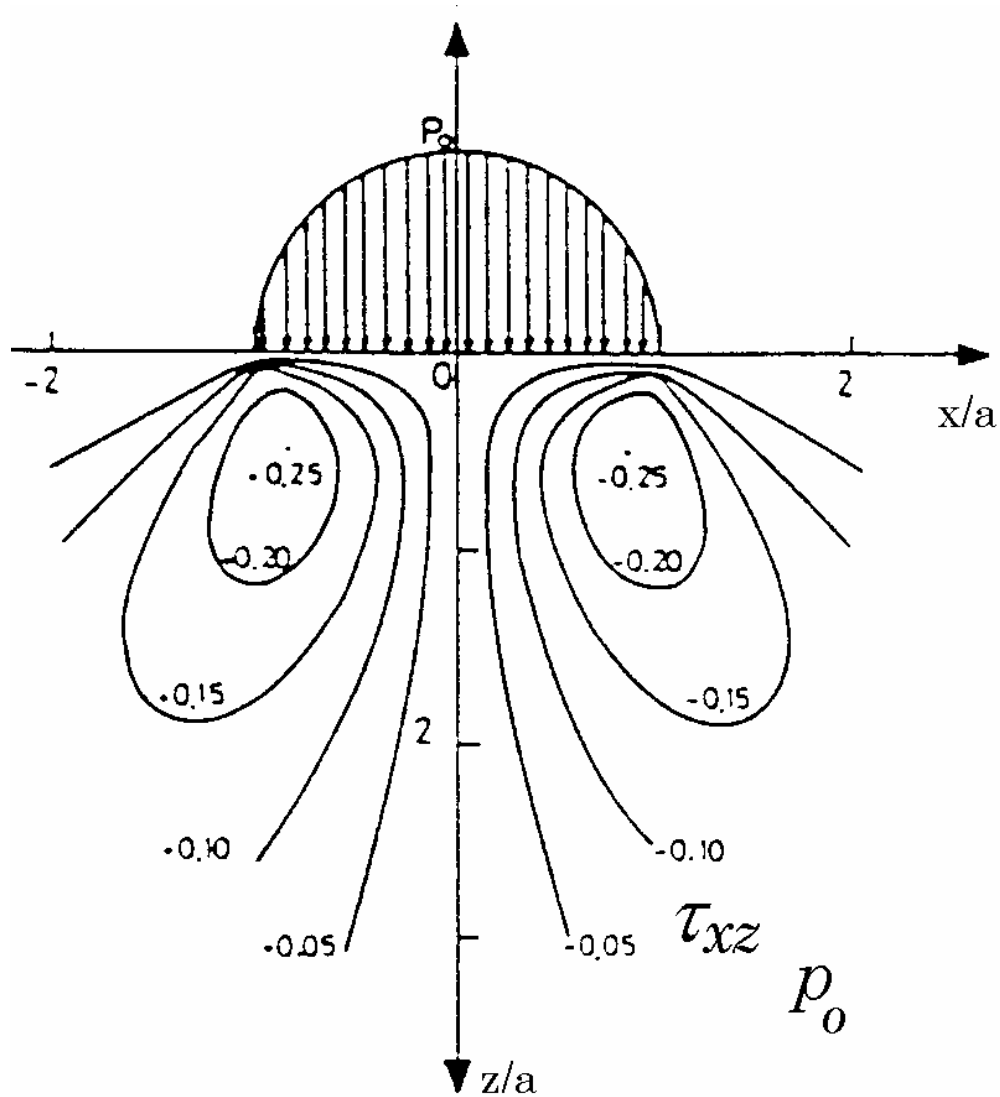


Figura 5.11 – Linhas “isobáricas” da tensão de corte ortogonal (τ_{xz}/p_0) no interior de um sólido em contacto linear [5].

5.2.4 Variação das tensões durante um ciclo de carga

A variação das tensões num mesmo ponto durante um ciclo de carga, é muito relevante para a determinação das solicitações variáveis a que o sólido em contacto está submetido, e para o seu dimensionamento em termos de resistência à fadiga.

A figura 5.12 mostra a variação das tensões mais relevantes durante um ciclo de carga, de um ponto do interior de um sólido em contacto linear, situado à profundidade $z/a = 0.5$. As variações mais importantes são as seguintes:

$$\Delta\sigma_{xx} = 0.35 a A E^* = 0.35 p_0 \quad (\text{compressão})$$

$$\Delta\sigma_{zz} = 0.9 a A E^* = 0.9 p_0 \quad (\text{compressão})$$

$$\Delta\tau = 0.3 a A E^* = 0.3 p_0$$

$$\Delta\tau_{xz}^{\text{máx}} = 0.45 a A E^* = 0.45 p_0$$

sendo evidente a importância da variação da tensão de corte ortogonal.

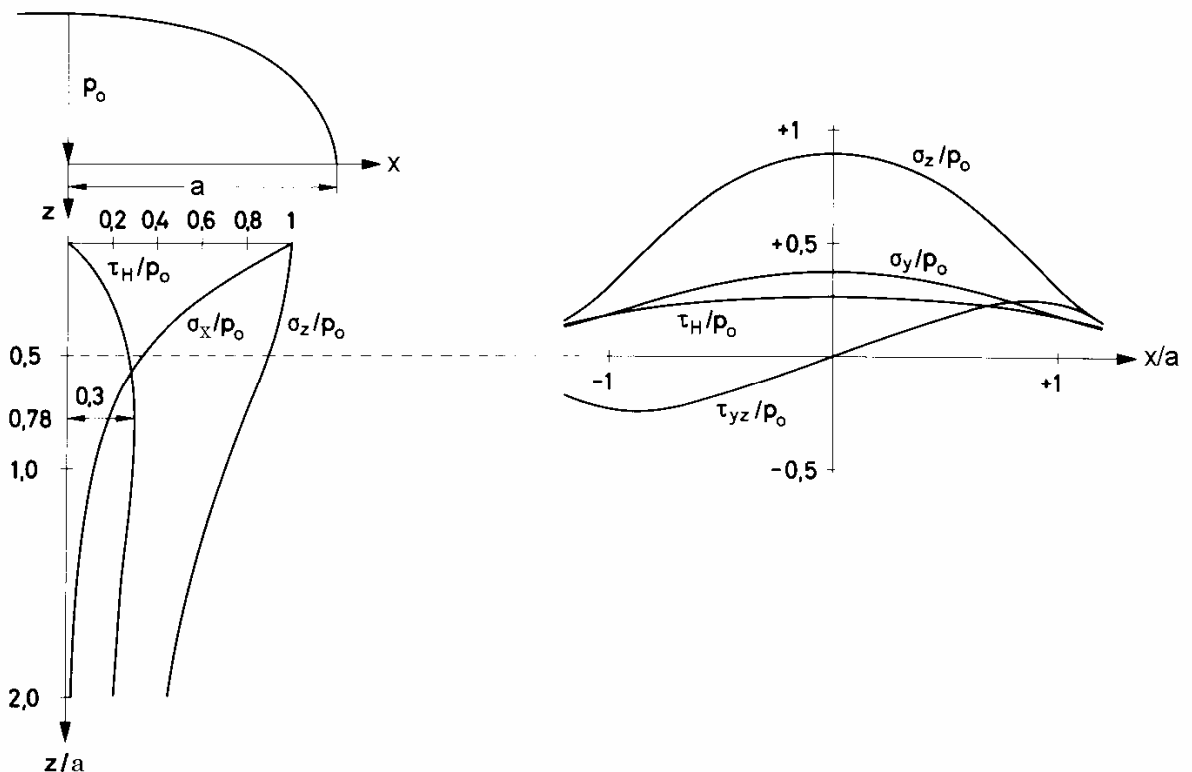


Figura 5.12 – Variação das tensões durante um ciclo de carga, de um ponto do interior de um sólido em contacto linear, situado à profundidade $z/a = 0.5$ [4].

5.3 Tensões no interior de sólidos em contacto linear – solicitações normal e tangencial

Nos parágrafos precedentes analisou-se o estado de tensão no interior de sólidos em contacto quando submetidos a solicitações puramente normais à superfície de contacto. No entanto, a força normal é frequentemente acompanhada de solicitações tangenciais (de atrito) que resultam da cinemática relativa das superfícies dos sólidos em contacto, como, por exemplo, no caso do contacto entre os dentes de uma engrenagem cilíndrica de dentado recto.

A solicitação tangencial, ou de atrito, desenvolvida actua no plano da superfície de contacto e é perpendicular à solicitação normal, como exemplificado na figura 5.13.

A presença da solicitação tangencial, introduz alterações significativas no estado de tensão no interior dos sólidos em contacto, que se traduzem numa modificação da intensidade das tensões, da natureza (compressão / tracção) das tensões em presença, e da localização dos pontos de tensão máxima.

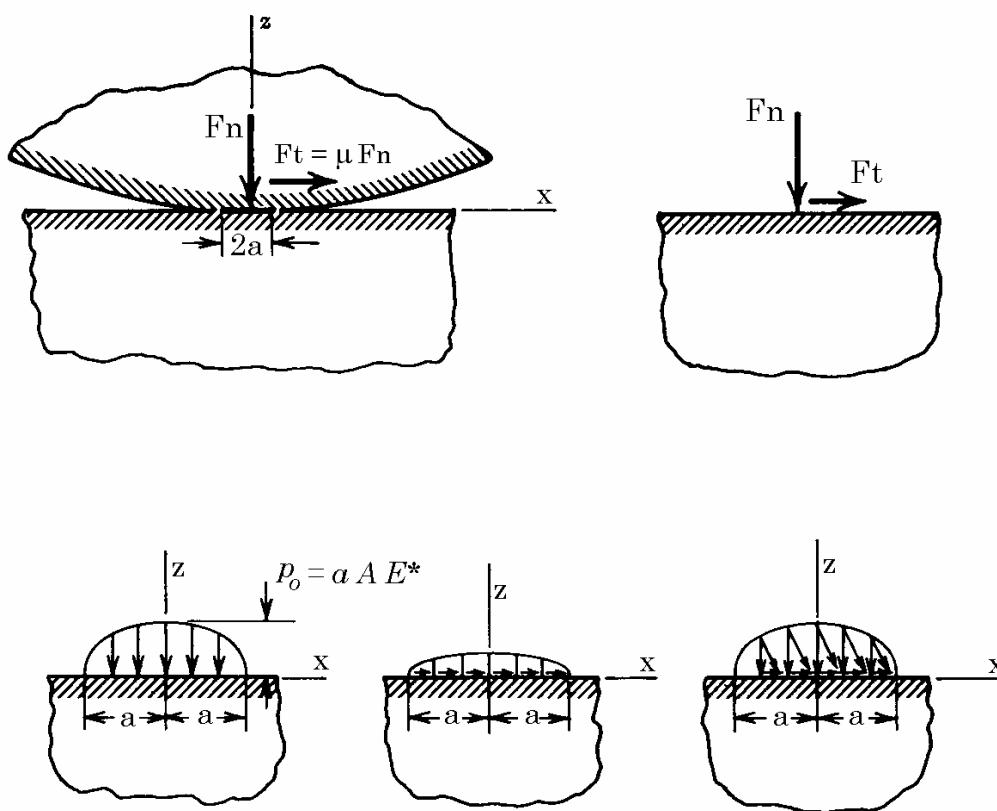


Figura 5.13 – Contacto linear entre dois sólidos submetidos a solicitações normal e tangencial [3].

A presença da força de atrito, provoca um aumento significativo dos valores máximos das tensões instaladas, aumento esse que está directamente relacionado com a razão entre a força de atrito e a força normal, isto é o designado coeficiente de atrito.

A força de atrito altera a natureza das tensões que deixam de ser exclusivamente de compressão passando a tensões de compressão e tracção. Essas tensões de tracção embora pequenas, como no caso de um contacto bem lubrificado, podem tornar-se suficientemente grandes devido à concentração de tensões resultante das irregularidades superficiais ou das pequenas fendas microscópicas normalmente presentes numa superfície real. Estas tensões de tracção, quando analisadas em conjunto com muitos outros factores envolvidos (desgaste, não homogeneidade do material, tipo de lubrificação, ...) ajudam a explicar porque razão uma fenda ou fissura se pode desenvolver até atingir a superfície de contacto, como se observa nas superfícies dos dentes de engrenagens e de pistas de rolamentos.

Finalmente, a força de atrito também é responsável por alterar a localização do ponto onde actua a tensão de corte máxima, o qual se move do interior do sólido em contacto, para a respectiva superfície de contacto. De facto quando o coeficiente de atrito é maior ou igual a 0.1, este ponto está localizado na superfície de contacto.

Tendo em consideração a figura 5.13, verifica-se que a distribuição das tensões no inteiro de cada sólido em contacto, na presença de uma solicitação com componentes normal F_n , e tangencial F_t ($F_t = \mu F_n$), é definida pelas expressões (5.17) onde μ representa o coeficiente de atrito.

5.3.1 Tensões principais segundo OZ

A tensão σ_{yy} é uma tensão principal, já que o estado de tensão a que estão submetidos os sólidos em contacto, pode ser considerado como um estado plano de deformação (frequentemente) ou um estado plano de tensão. Consequentemente, τ_{xy} e τ_{yz} são tensões nulas. Designe-se σ_{yy} por σ_3 .

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= -aAE^* \frac{I}{\pi} \left\{ z \left(\frac{a^2 + 2z^2 + 2x^2}{a} \phi_1 - \frac{2\pi}{a} - 3x\phi_2 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \mu \left[(2x^2 - 2a^2 - 2z^2) \phi_2 + \frac{2\pi x}{a} + \frac{2x}{a} (a^2 - x^2 - z^2) \phi_1 \right] \right\} \\
\sigma_{yy} &= -aAE^* \frac{2\nu}{\pi} \left\{ z \left(\frac{a^2 + z^2 + x^2}{a} \phi_1 - \frac{\pi}{a} - 2x\phi_2 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \mu \left[(x^2 - a^2 - z^2) \phi_2 + \frac{\pi x}{a} + \frac{x}{a} (a^2 - x^2 - z^2) \phi_1 \right] \right\} \\
\sigma_{zz} &= -aAE^* \frac{I}{\pi} \left[z (a\phi_1 - x\phi_2) + \mu z^2 \phi_2 \right] \\
\tau_{xz} &= -aAE^* \frac{I}{\pi} \left\{ z^2 \phi_2 + \mu \left[(a^2 + 2z^2 + 2x^2) \frac{z}{a} \phi_1 - 2\pi \frac{z}{a} - 3xz\phi_2 \right] \right\} \\
\tau_{xy} &= \tau_{yz} = 0
\end{aligned} \tag{5.17}$$

onde

$$\phi_1 = \frac{\pi(M+N)}{MN \sqrt{2MN + 2x^2 + 2z^2 - 2a^2}}$$

$$\phi_2 = \frac{\pi(M-N)}{MN \sqrt{2MN + 2x^2 + 2z^2 - 2a^2}}$$

$$M = \sqrt{(a+x)^2 + z^2} \quad N = \sqrt{(a-x)^2 + z^2}$$

No entanto as tensões σ_{xx} e σ_{zz} não são tensões principais devido à presença da tensão de corte ortogonal τ_{xz} . Designem-se as restantes tensões principais por σ_1 e σ_2 , as quais podem ser determinadas a partir do conhecimento de σ_{xx} , σ_{zz} e τ_{xz} em cada ponto da sub-superfície de um sólido em contacto.

Na figura 5.14 mostram-se as distribuições das tensões principais σ_1 , σ_2 e σ_3 , segundo a direcção x , para pontos da superfície do sólido e pontos situados à profundidade $z = a/4$, calculadas considerando um coeficiente de atrito igual a $1/3 = 0.333$.

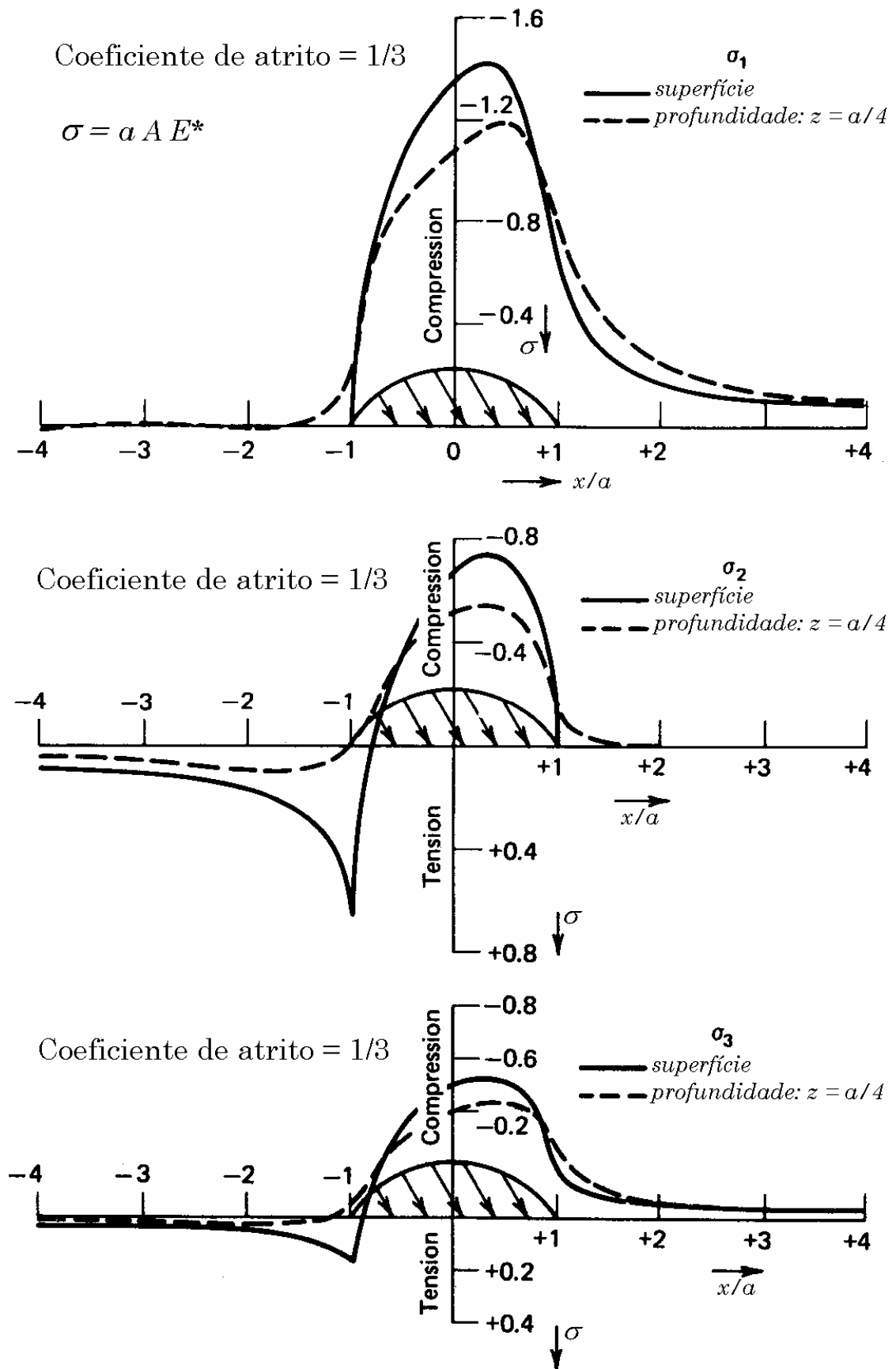


Figura 5.14 – Efeito da força tangencial sobre as tensões principais no interior do sólido [3].

Cada uma das tensões principais apresenta o seu máximo na superfície do sólido em contacto, a uma distância aproximadamente igual a $a/3$ do centro do contacto, no sentido da força de atrito. Os valores máximos correspondentes são

$$\begin{cases} \sigma_1 = -1.40 a A E^* \\ \sigma_2 = -0.72 a A E^* \\ \sigma_3 = -0.53 a A E^* \end{cases} \quad (5.18)$$

Verifica-se assim que a força de atrito correspondente a um coeficiente de atrito de $1/3$ provoca um aumento da tensão principal máxima de compressão de 40 por cento.

A figura 5.14 mostra também que as tensões principais σ_2 e σ_3 são de tracção junto ao limite da área de contacto no sentido oposto ao da força de atrito, isto é, para $x/a = -1$. Os valores máximos destas tensões de tracção ocorrem na superfície, sendo respectivamente iguais a

$$\begin{cases} \sigma_1 = 0.000 \\ \sigma_2 = 0.667 a A E^* \\ \sigma_3 = 0.167 a A E^* \end{cases} \quad (5.19)$$

A presença de tensões de tracção junto à superfície ajuda a compreender a ocorrência de avarias superficiais de fadiga por “pitting”, por exemplo nas pistas dos rolamentos e nos flancos activos dos dentes de engrenagens, provocadas pelas solicitações cíclicas a que estão submetidos.

5.3.2 Tensão de corte máxima

Uma vez determinadas as tensões principais em qualquer ponto da superfície de contacto do sólido, a tensão de corte máxima pode ser definida por

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) = -0.43 a A E^* \quad (5.20)$$

De modo a determinar se este valor é ou não o valor máximo da tensão de corte é necessário calcular as tensões de corte em todos os outros pontos, em particular nos pontos da subcamada Hertziana, imediatamente abaixo da superfície de contacto. Em cada ponto do sólido podem-se determinar 3 valores extremos da tensão de corte

$$\begin{cases} \tau_1 = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \\ \tau_2 = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \\ \tau_3 = \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3) \end{cases} \quad (5.21)$$

Na figura 5.15 mostram-se as distribuições das tensões de corte τ_1 , τ_2 e τ_3 , segundo a direcção x , para pontos da superfície do sólido e pontos situados à profundidade $z = a/4$, calculadas considerando um coeficiente de atrito igual a $1/3 = 0.333$.

A análise da figura 5.15 mostra que as tensões de corte à superfície são sempre superiores às correspondentes tensões à profundidade $z = a/4$. No entanto no caso da tensão de corte τ_2 , o valor máximo ocorre para a profundidade $z = a/4$, sendo $\tau_2 = 0.36 a A E^*$.

5.3.3 Tensão de corte octaédrica máxima

Na figura 5.16 está representada a distribuição da tensão de corte octaédrica τ_{oct} segundo a direcção x , para pontos da superfície do sólido e pontos situados à profundidade $z = a/4$, calculadas considerando um coeficiente de atrito igual a $1/3$.

O valor máximo da tensão de corte octaédrica ocorre na superfície, no mesmo ponto onde se observam a tensão principal máxima e a tensão de corte máxima, sendo o seu valor

$$\tau_{m\acute{a}x}^{oct} = 0.37 a A E^* \quad (5.22)$$

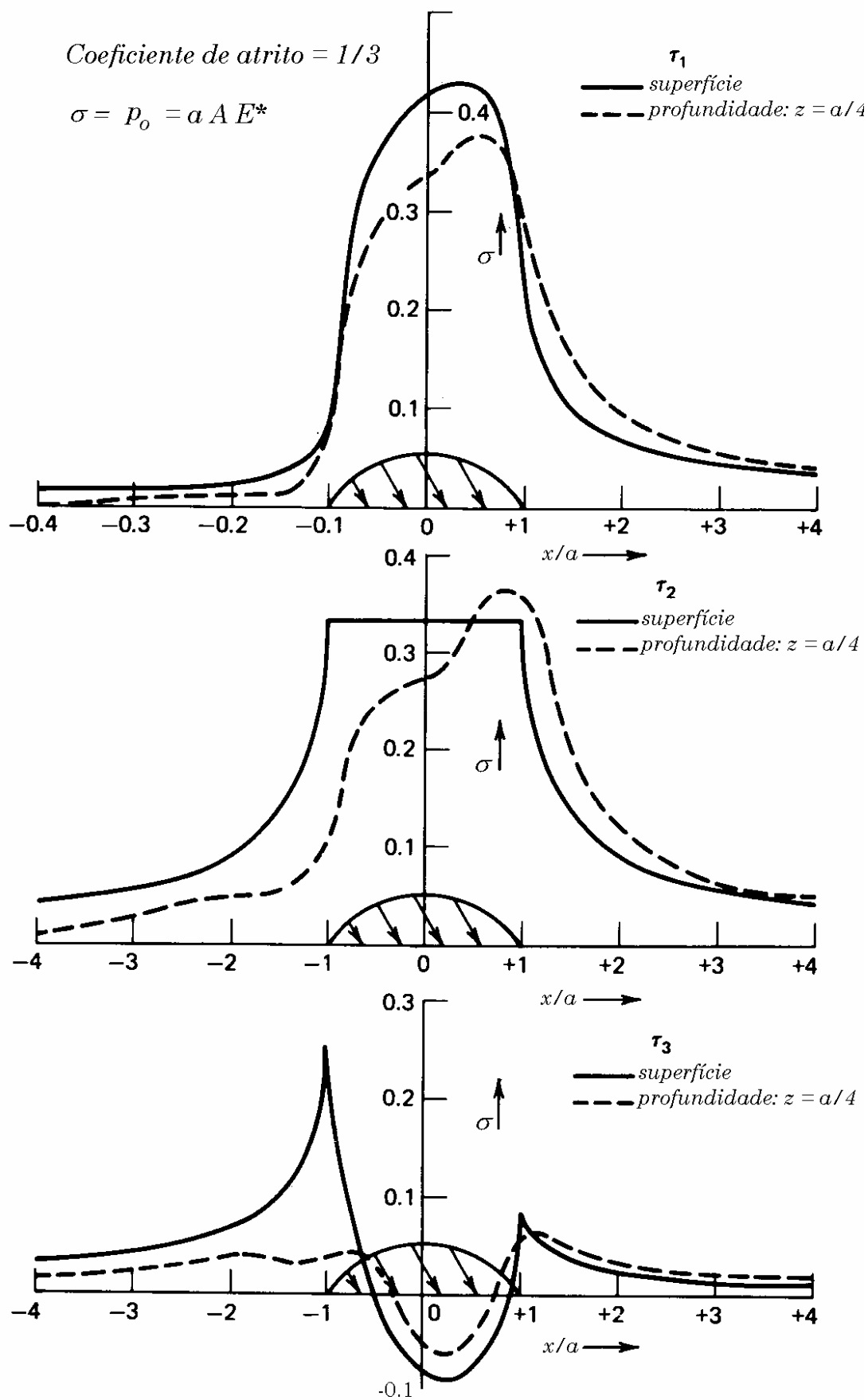


Figura 5.15 – Efeito da força tangencial sobre as tensões de corte no interior do sólido [3].

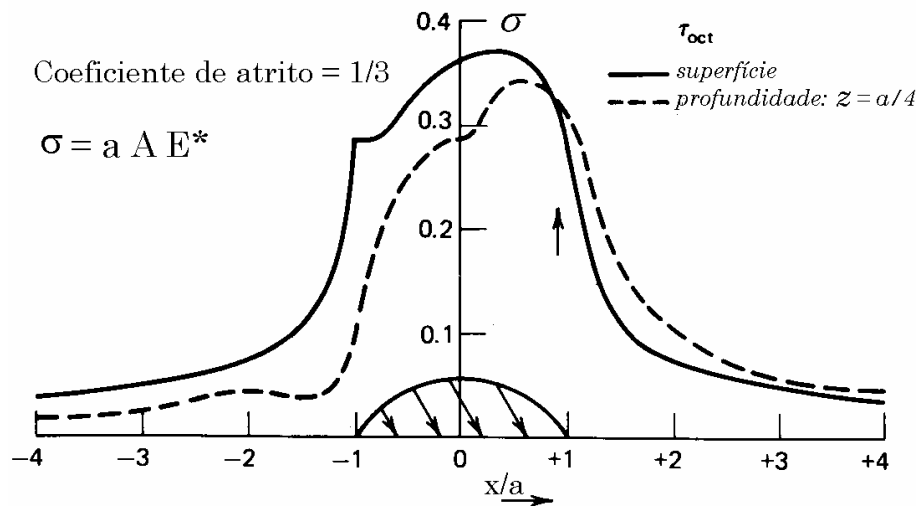


Figura 5.16 – Influência da força tangencial sobre a tensão de corte octaédrica no interior do sólido [3].

5.3.4 Influência do coeficiente de atrito

O valor do coeficiente de atrito determina o valor da força tangencial ou de atrito, para uma determinada força normal aplicada ao contacto entre os dois sólidos. Consequentemente, os valores da tensão principal máxima e da tensão corte máxima também vão depender do coeficiente de atrito.

A influência do coeficiente de atrito sobre as tensões mais importantes está representada na tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Influência do coeficiente de atrito sobre o valor das tensões no interior de um sólido em contacto linear [3].

Coeficiente de atrito - μ		0	1/12	1/9	1/6	1/3
Tipo de tensão	Localização	Valor das tensões / tensão de referência*				
Tensão de tracção principal máxima	$x/a = -1$	0	2/12	2/9	2/6	2/3
Tensão de compressão principal máxima	$0 < x/a < 0.3$	-1	-1.09	-1.13	-1.19	-1.40
Tensão de corte máxima	/	0.300	0.308	0.310	0.339	0.435
Tensão de corte octaédrica máxima	/	0.272	0.265	0.255	0.277	0.368

tensão de referência: $\sigma_{ref} = p_0 = a A E^$

A tensão de corte ortogonal é pouco influenciada pelo coeficiente de atrito. A figura 5.16 mostra a variação da tensão de corte ortogonal segundo x , para um valor do coeficiente de Poisson de 0.285 e para a profundidade $z/a = 0.435$.

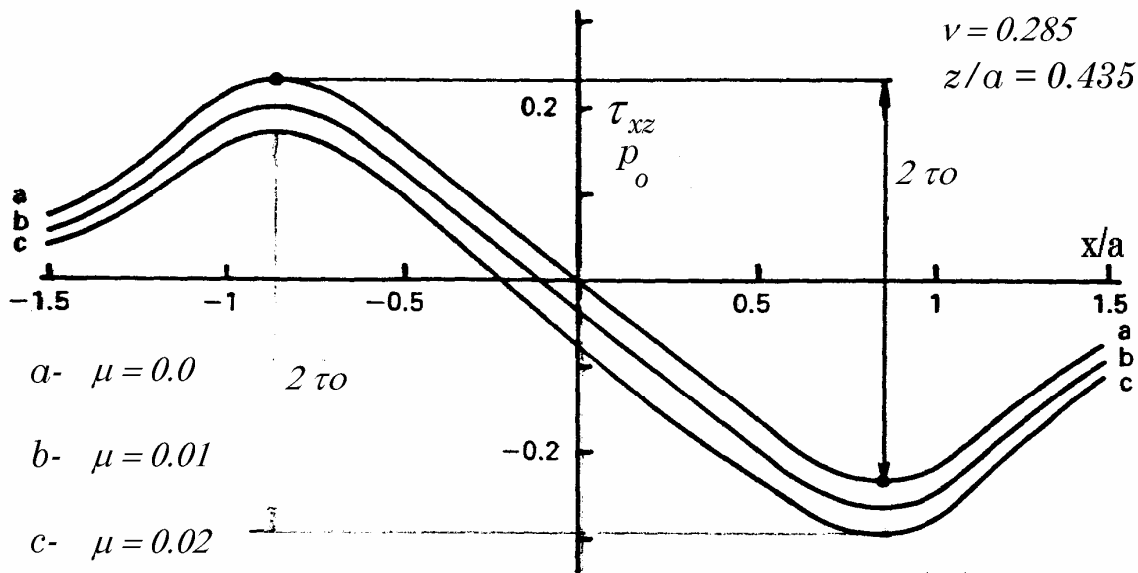


Figura 5.17 – Influência do coeficiente de atrito sobre a tensão de corte ortogonal no interior do sólido [6].

Verifica-se que os valores dos máximos positivo e negativo da tensão de corte ortogonal são ligeiramente alterados por influência do coeficiente de atrito, mas que a máxima variação dessa tensão de corte ortogonal permanece constante, isto é

$$\begin{aligned}
 \tau_{xz}^{m\acute{a}x} &= \tau_0 > 0.25 p_0 \\
 \tau_{xz}^{m\grave{i}n} &= -\tau_0 < -0.25 p_0 \\
 \Delta\tau_{xz} &= 0.50 p_0
 \end{aligned}
 \tag{5.23}$$

5.3.5 Variação da tensão de corte durante um ciclo de carga

Na análise do comportamento à fadiga de dois sólidos em contacto, é importante conhecer a gama de variação da tensão de corte segundo um determinado plano e numa dada direcção. Na ausência de atrito a variação da tensão de corte ortogonal máxima é $\Delta\tau_{xz}^{máx} = 0.50 p_0$. Esta gama é superior à da tensão de corte máxima a $\Delta\tau_{máx} = 0.30 p_0$ e à da tensão de corte octaédrica máxima $\Delta\tau_{máx}^{oct} = 0.27 p_0$.

Verificou-se no parágrafo anterior que o coeficiente de atrito não influencia a variação da tensão de corte ortogonal máxima, mas afecta muito significativamente as gamas de variação da tensão de corte máxima e da tensão de corte octaédrica máxima.

A figura 5.18 mostra os valores das tensões principais e respectivas direcções principais, num ponto O da superfície de um sólido em contacto linear, que se aproxima da superfície de contacto, passa sob ela e se afasta, considerando um coeficiente de atrito de $1/3$.

Os valores máximos da tensão de corte e da tensão de corte octaédrica ocorrem para a localização do ponto O definida pela figura 5.18.D, onde $\tau_{máx} = 0.43 p_0$, para uma direcção principal que faz um ângulo de 36° com a vertical. Em relação a esse plano principal de corte as variações da tensão de corte máxima e da tensão de corte octaédrica máxima são respectivamente iguais a $\Delta\tau_{máx} = 0.63 p_0$ e $\Delta\tau_{máx}^{oct} = 0.53 p_0$.

No entanto, analisando a variação da tensão de corte máxima entre as posições B e H constata-se que essa variação é igual a $\Delta\tau_{máx} = 0.63 p_0$, sendo, portanto, superior ao que se passa no plano inclinado a 36° referido anteriormente.

A principal conclusão é pois que a actuação de uma força tangencial ou de atrito sobre a superfície de contacto, aumenta a probabilidade de ocorrência de uma avaria de fadiga, em particular se o valor do coeficiente de atrito for importante.

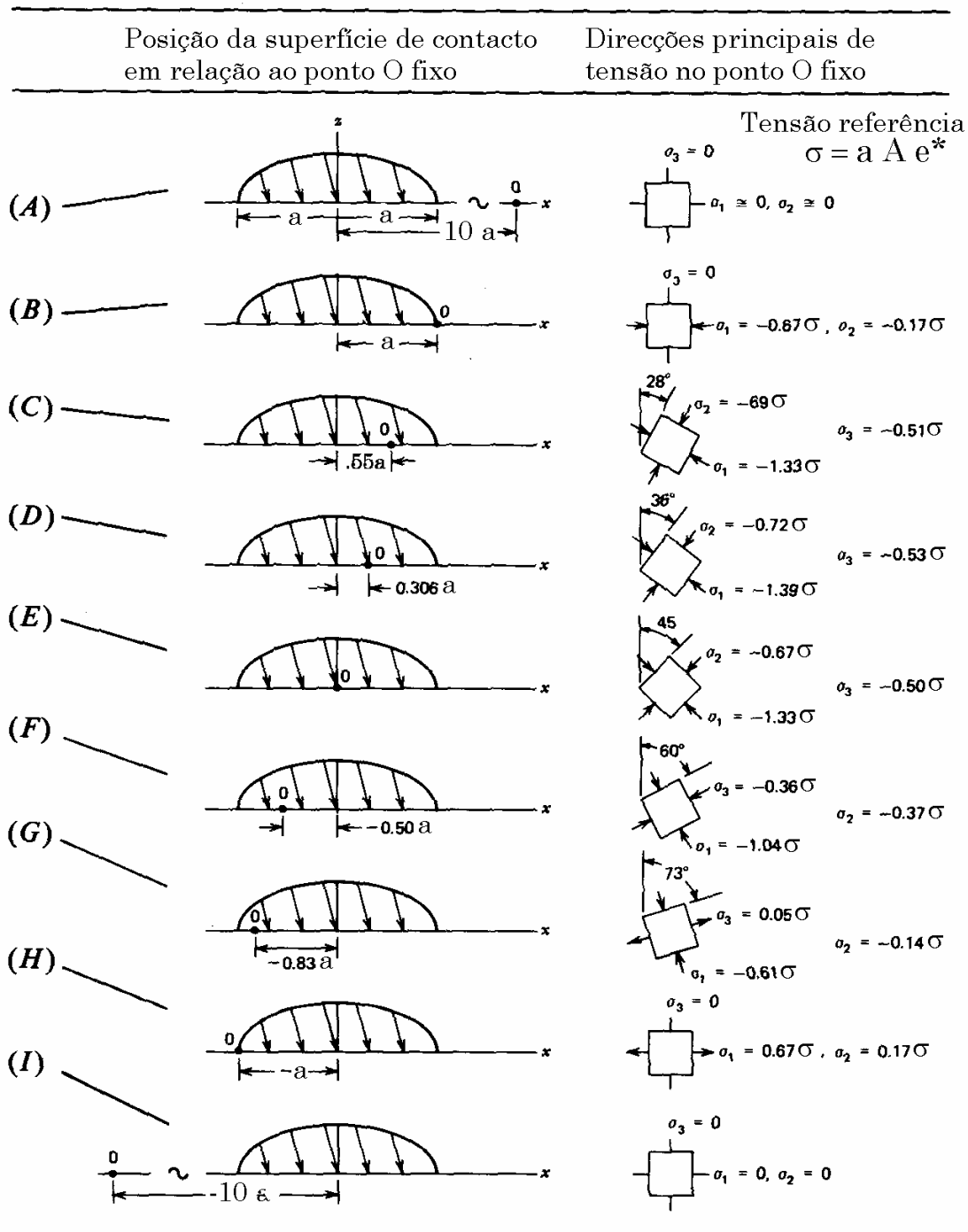


Figura 5.18 – Valores das tensões principais e respectivas direcções principais, de uma superfície de contacto que se move em relação a um ponto O fixo [3].

Bibliografia do Capítulo 5:

- [1] K. L. Johnson, "Contact Mechanics", Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1985. ISBN-0-521-25576-7
- [2] Timoshenko e Goodier, "Theory of Elasticity", 3rd edition, McGraw-Hill, New York, USA, 1970. ISBN-0-07-085805-5
- [3] A. P. Boresi, e al. "Advanced Mechanics of Materials" John Wiley & Sons, New York, USA, 1978. ISBN-0-471-08892-7
- [4] Eschmann, Hasbargen e Weigand, "Ball and Roller Bearings – Theory, Design and Application", 2nd Edition, John Wiley and Sons, Chichester, UK, 1985. ISBN-0-471-26283-8
- [5] B. Michau, D. Berthe e M. Godet, "Influence of Pressure Modulation in Line Hertzian Contact on the Internal Stress Field", WEAR, vol. 28 (1974), 187-195.
- [6] J. W. Kannel e J. L. Tevaarwerk, "Subsurface Stress Evaluations under Rolling/Sliding Contact", Transactions of ASME, Journal of Lubrication Technology, vol. 106, 1984.

CAPÍTULO 6

INFLUÊNCIA DA RUGOSIDADE DAS SUPERFÍCIES EM CONTACTO

6.1 Rugosidade das superfícies

Nos capítulos precedentes admitiu-se que os sólidos em contacto são de revolução, e as suas superfícies contínuas e contraformais, sendo conhecidos os seus raios principais de curvatura na vizinhança do ponto inicial de contacto. Admitiu-se também que as superfícies dos sólidos são perfeitamente lisas.

Estas abstracções teóricas permitiram determinar as dimensões da área de contacto, a distribuição de pressão sobre essa área de contacto e a penetração entre os centros dos dois sólidos em contacto. Com base nestes resultados é ainda possível determinar os campos de deslocamentos e tensões a que cada um dos sólidos está submetido, o que é fundamental para o dimensionamento de qualquer problema de contacto do tipo Hertziano.

No entanto, as superfícies reais dos sólidos em contacto, que se encontram nas aplicações reais, não são perfeitamente lisas, sendo possível medir e caracterizar a sua rugosidade e/ou a sua ondulação. A determinação da influência dessa rugosidade das superfícies sobre o desempenho do contacto implica a reformulação teórica do problema de contacto, não sendo

mais possível obter as correspondentes soluções analíticas. É pois necessário recorrer a soluções numéricas e meios de cálculo poderosos e sofisticados.

Neste capítulo não são apresentadas nem uma teoria de contacto mais genérica nem os métodos numéricos aplicados, mas apenas os resultados mais significativos que permitam avaliar, qualitativa e quantitativamente, de que forma e com que intensidade a rugosidade/ondulação das superfícies modifica a superfície e as pressões de contacto, a penetração e as tensões no interior dos sólidos [1, 2].

6.2 Influência da rugosidade sobre a distribuição de pressão e a área de contacto

6.2.1 Contacto entre um cilindro de geratriz sinusoidal e um plano

Neste exemplo, representado esquematicamente na figura 6.1, analisa-se o contacto normal Hertziano entre um cilindro infinitamente longo, de geratriz sinusoidal, e um plano liso. A ondulação do cilindro é portanto sinusoidal, podendo ser caracterizada pelo comprimento de onda λ e amplitude amp .

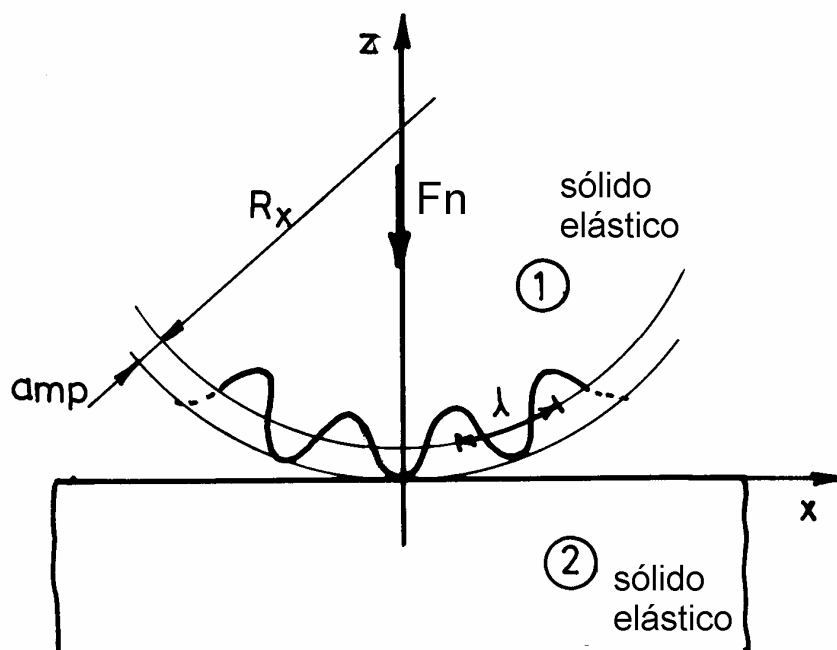


Figura 6.1 – Contacto entre um cilindro ondulado e um plano [1].

São considerados vários valores do comprimento de onda e da amplitude da ondulação, e também vários valores da semi-largura de Hertz (a qual é proporcional à pressão máxima de Hertz, p_0 ou $p_H^{máx}$, e à raiz quadrada da solitação aplicada, F_n). com base nos quais se definiram os seguintes parâmetros adimensionais característicos da ondulação da superfície, da geometria do contacto e da carga aplicada:

- a) Geometria da ondulação (parâmetro geometria) $\rightarrow \frac{amp}{\lambda}$;
- b) Número de períodos contidos na semi-largura de Hertz
(parâmetro ondulação) $\rightarrow \frac{a}{\lambda}$;
- c) Carga aplicada ao contacto (parâmetro carga) $\rightarrow \frac{R}{a} = \frac{1}{2\pi} \frac{E^*}{p_0}$.

A análise realizada permitiu caracterizar a influência destes parâmetros sobre a distribuição de pressão e sobre as dimensões da área de contacto, e quantificar dois parâmetros:

- i) a sobrepressão relativa $\rightarrow \Delta p_r = \frac{p_{máx} - p_0}{p_0}$;
- ii) a variação relativa da superfície de contacto $\rightarrow \Delta S_r = \frac{S - S_0}{S_0}$.

Na figura 6.1 mostram-se a distribuição de pressão e a área de contacto correspondentes ao contacto entre um cilindro ondulado de geratriz sinusoidal do tipo coseno e um plano, nas seguintes condições particulares:

Raio do disco, $R = 0.01 \text{ m}$;

Força normal por unidade de comprimento, $F_n/\ell = 277 \times 10^3 \text{ N/m}$;

Comprimento de onda, $\lambda = 0.0883 \times 10^{-3} \text{ m}$;

Amplitude, $amp = 0.3532 \times 10^{-6} \text{ m}$;

Módulos de Young, $E_1 = E_2 = 205.8 \text{ Gpa}$;

Coefficientes de Poisson, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$;

Semi-largura de Hertz, $a = 0.1766 \times 10^{-3} \text{ m}$.

Os parâmetros adimensionais referidos tomam os seguintes valores:

$$\text{Parâmetro geometria} \rightarrow \frac{amp}{\lambda} = 0.004 \ ;$$

$$\text{Parâmetro ondulação} \rightarrow \frac{a}{\lambda} = 2.0 \ ;$$

$$\text{Parâmetro carga} \rightarrow \frac{R}{a} = \frac{1}{2\pi} \frac{E^*}{p_0} = 56.625 \ ;$$

$$\text{Parâmetro geometria-carga} \rightarrow \frac{amp}{\lambda} \cdot \frac{R}{a} = 0.226 \ ;$$

A análise da figura 6.2, mostra que as diferenças em relação ao contacto Hertziano são muito significativas. A distribuição de pressão apresenta vários valores máximos, todos superiores à pressão máxima de Hertz p_0 , sendo a sobrepressão relativa de $\Delta p_r = \frac{P_{m\acute{a}x} - p_0}{p_0} = 1.3$.

A superfície de contacto global é composta por várias pequenas superfícies de contacto sendo a diminuição relativa da área de contacto de $\Delta S_r = \frac{S - S_0}{S_0} = -0.4$, o que significa que a ondulação das superfícies provocou uma diminuição da área de contacto de 40%.

A figura 6.3 mostra, novamente, as distribuições de pressão e as áreas de contacto correspondentes ao contacto entre um cilindro ondulado de geratriz sinusoidal e um plano. Foram consideradas duas geratrizes, uma do tipo coseno e outra do tipo seno, e o comprimento de onda é o dobro do caso anterior, $\lambda = 0.1776 \times 10^{-3} \text{ m}$. Os restantes parâmetros permanecem inalterados.

Os parâmetros adimensionais têm agora os seguintes valores:

$$\text{Parâmetro geometria} \rightarrow \frac{amp}{\lambda} = 0.002 \ ;$$

$$\text{Parâmetro ondulação} \rightarrow \frac{a}{\lambda} = 2.0 \ ;$$

$$\text{Parâmetro carga} \rightarrow \frac{R}{a} = \frac{1}{2\pi} \frac{E^*}{p_0} = 56.625 \ ;$$

$$\text{Parâmetro geometria-carga} \rightarrow \frac{amp}{\lambda} \cdot \frac{R}{a} = 0.113 \ ;$$

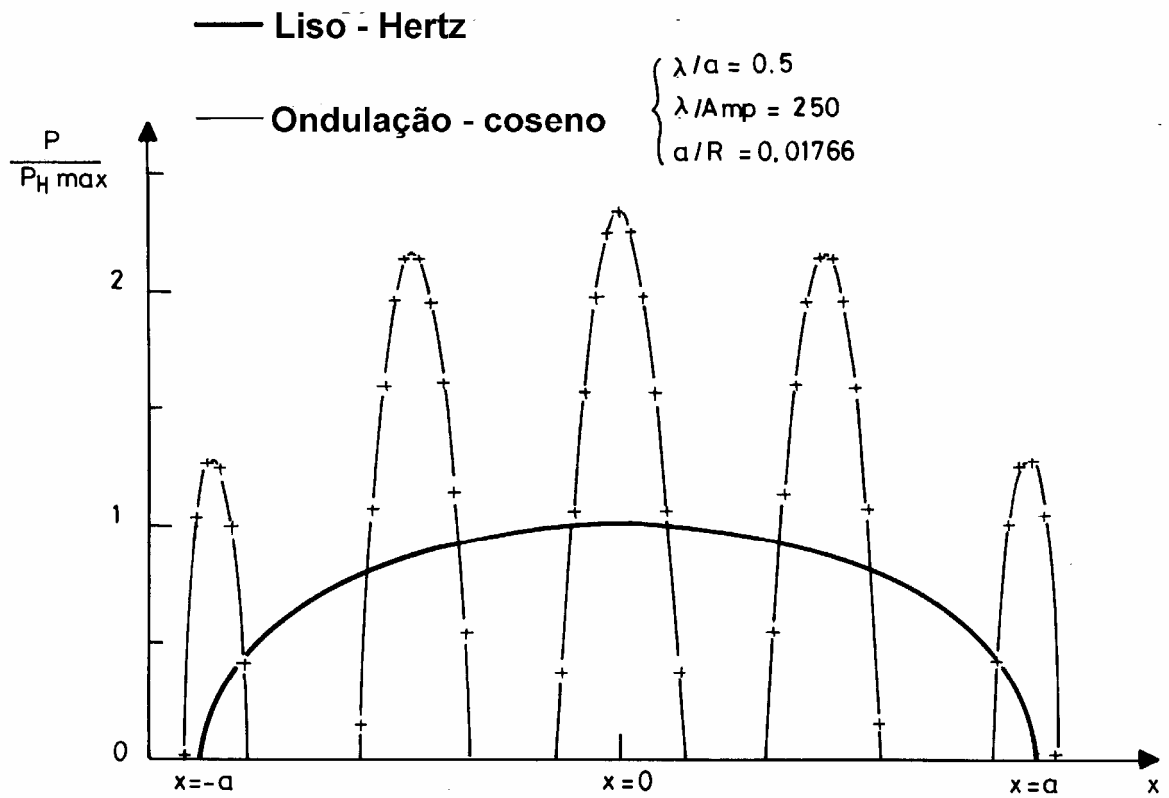


Figura 6.2 – Distribuição de pressão num contacto entre um cilindro ondulado de geratriz sinusoidal do tipo coseno e um plano [1].

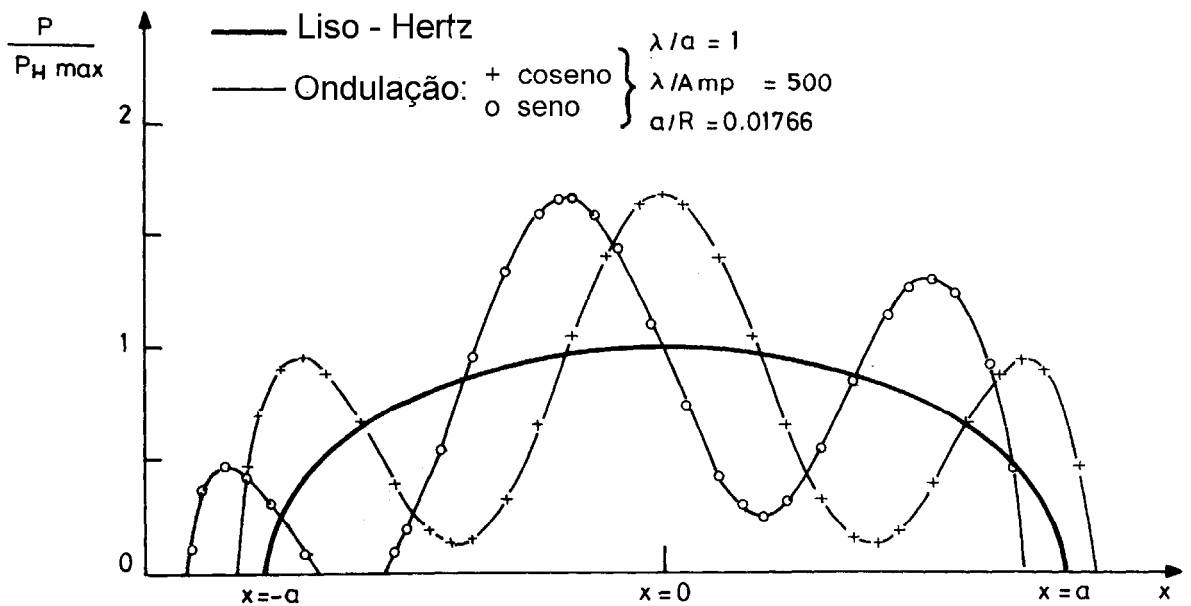


Figura 6.3 – Distribuições de pressão nos contactos entre um cilindro ondulado de geratrizes sinusoidais do tipo coseno e seno e um plano [1].

Neste caso, ambas as distribuições de pressão também apresentam vários valores máximos, sendo a sobrepressão relativa $\Delta p_r = \frac{P_{m\acute{a}x} - P_0}{P_0} = 0.7$, e igual para as geratrizes coseno e seno, o que parece indicar que a diferença de fase tem uma importância pouco significativa.

A superfície de contacto global é única no caso da geratriz coseno e dividida em duas partes no caso da geratriz seno. A variação relativa da área de contacto $\Delta S_r = \frac{S - S_0}{S_0} = 0.06$, o que significa que a ondulação das superfícies provocou um ligeiro aumento da área de contacto.

Nesta análise foram considerados um número muito significativo de casos, 240 no total, para os quais os parâmetros adimensionais $\frac{amp}{\lambda}$, $\frac{a}{\lambda}$ e $\frac{R}{a}$ foram sempre diferentes. A análise dos resultados mostra que, para um número de ondulações no interior da área de contacto constante, a um mesmo valor do parâmetro geometria-carga corresponde sempre o mesmo valor da sobrepressão relativa e o mesmo valor da diminuição relativa da área de contacto, isto é,

$$\frac{amp}{\lambda} \cdot \frac{R}{a} = C.te \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta p_r = \frac{P_{m\acute{a}x} - P_0}{P_0} = C.te \\ \Delta S_r = \frac{S - S_0}{S_0} = C.te \end{array} \right\} \quad se \quad \frac{a}{\lambda} = C.te$$

o que mostra a importância do parâmetro adimensional “*geometria da ondulação x carga aplicada*”.

A figura 6.4 mostra a variação da sobrepressão relativa com o parâmetro geometria-carga, para vários valores do parâmetro ondulação. O aumento do parâmetro geometria-carga provoca o aumento da sobrepressão relativa, sendo a correspondente variação quase linear. Portanto, o aumento da amplitude, e a diminuição do comprimento de onda ou da carga ($R/a \Leftrightarrow E^*/2\pi p_0$), tem como consequência o aumento da sobrepressão relativa.

A influência do parâmetro ondulação, isto é, do número de ondulações no interior do contacto Hertziano, é pequena, e é tanto mais pequena quanto menor é o parâmetro geometria-carga, como mostra a figura 6.4.

A aproximação dos resultados obtidos para a sobrepressão relativa, pelo método dos mínimos quadrados, permitiu obter a seguinte expressão

$$\Delta p_r = \frac{p_{\text{máx}} - p_0}{p_0} = 5.172 \left(\frac{amp}{\lambda} \cdot \frac{R}{a} \right)^{0.931} \quad (6.1)$$

com um coeficiente de correlação de 0.994.

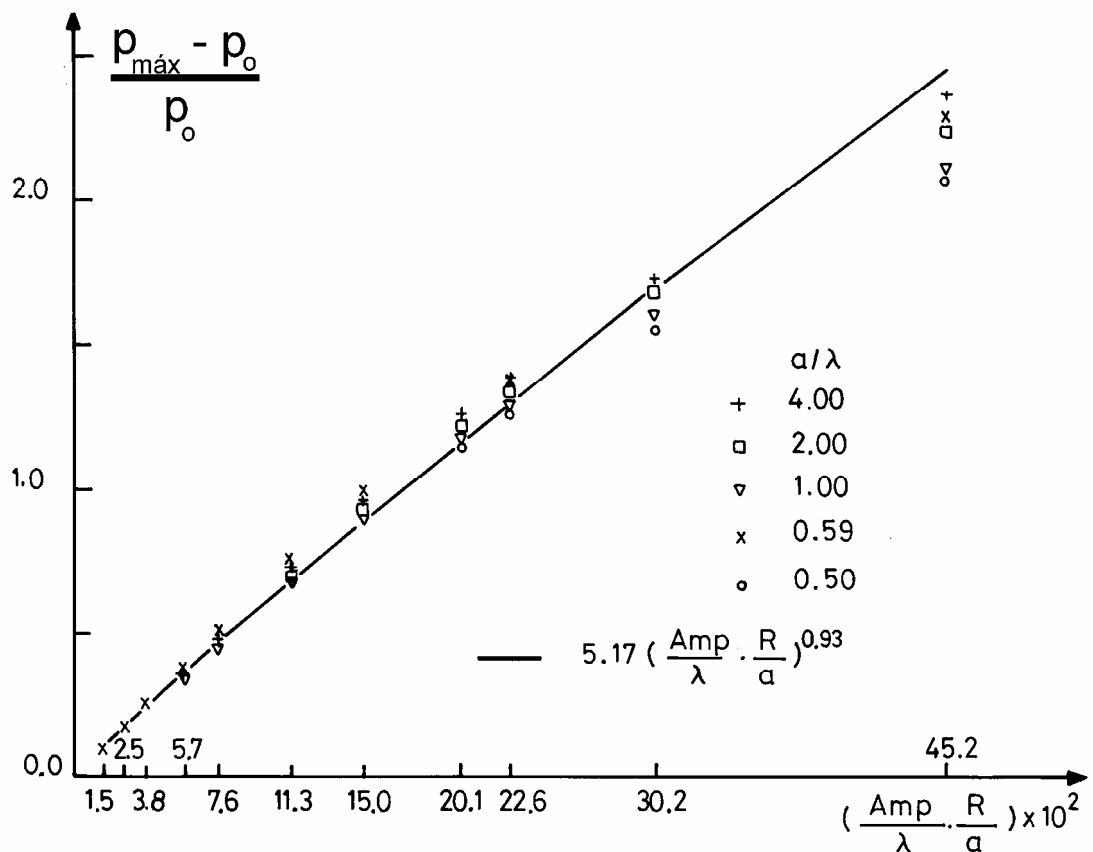


Figura 6.4 – Variação da sobrepressão relativa com o parâmetro geometria-carga [1].

A figura 6.5 mostra a variação relativa da superfície de contacto com o parâmetro geometria-carga, para vários valores do número de ondulações no interior da área de contacto.

O aumento do parâmetro geometria-carga provoca uma diminuição de ΔS_r , e portanto uma diminuição da área de contacto real. Se a amplitude da ondulação aumenta, ΔS_r diminui, e se o comprimento de onda da ondulação, ou a carga, aumentam ΔS_r também aumenta.

A análise da figura 6.5 mostra ainda que o número de ondulações no interior da área de contacto, definido pelo parâmetro a/λ , tem uma influência muito significativa sobre a área de contacto real, sobretudo para pequenos valores de a/λ .

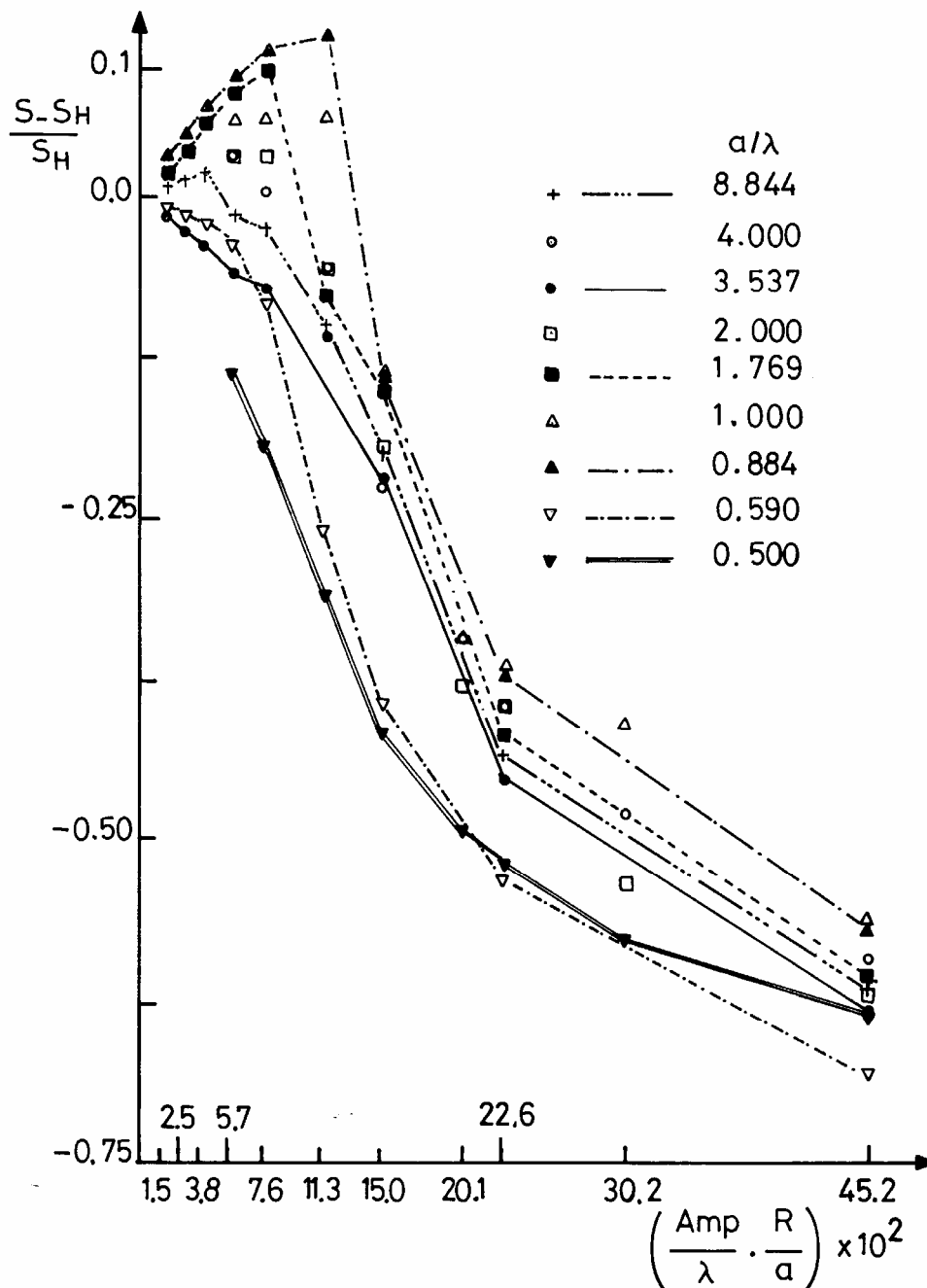


Figura 6.5 – Variação relativa da área de contacto com o parâmetro geometria-carga [1].

A influência da ondulação da superfície de um cilindro em contacto com um plano, apresenta as seguintes características:

- a) Modificação da distribuição de pressão no contacto, com o aparecimento de vários picos de pressão de intensidade muito superior à pressão máxima de Hertz;
- b) A área de contacto real é, em geral, mais pequena que a área de contacto hertziana, e frequentemente formada por várias pequenas áreas de contacto.
- c) Os parâmetros mais significativos são:

A geometria da ondulação, amp/λ ;

A carga aplicada ao contacto $R/a = \frac{I}{2\pi} \frac{E^*}{p_0}$;

O número de períodos contidos na semi-largura de Hertz a/λ .

- d) A sobrepressão relativa e a variação relativa da área de contacto dependem, essencialmente, do parâmetro geometria carga definido por $amp/\lambda \cdot R/a$.

6.2.2 *Contacto entre um cilindro e uma superfície plana rugosa*

De modo a concretizar a influência da rugosidade sobre o comportamento de um contacto Hertziano, apresenta-se em seguida o caso do contacto entre um cilindro liso e uma superfície plana rugosa.

Utilizando um rugosímetro, foram medidos e tratados numericamente (filtrados), os perfis de uma superfície rugosa após fabrico e após rodagem durante alguns milhares de ciclos. Os dois perfis, assim obtidos, estão representados na figura 6.6.

Uma primeira análise, ainda que simplista, permite verificar que o perfil de rugosidade após rodagem é mais “suave” que o correspondente perfil após fabrico, apresentando um menor valor de R_t .

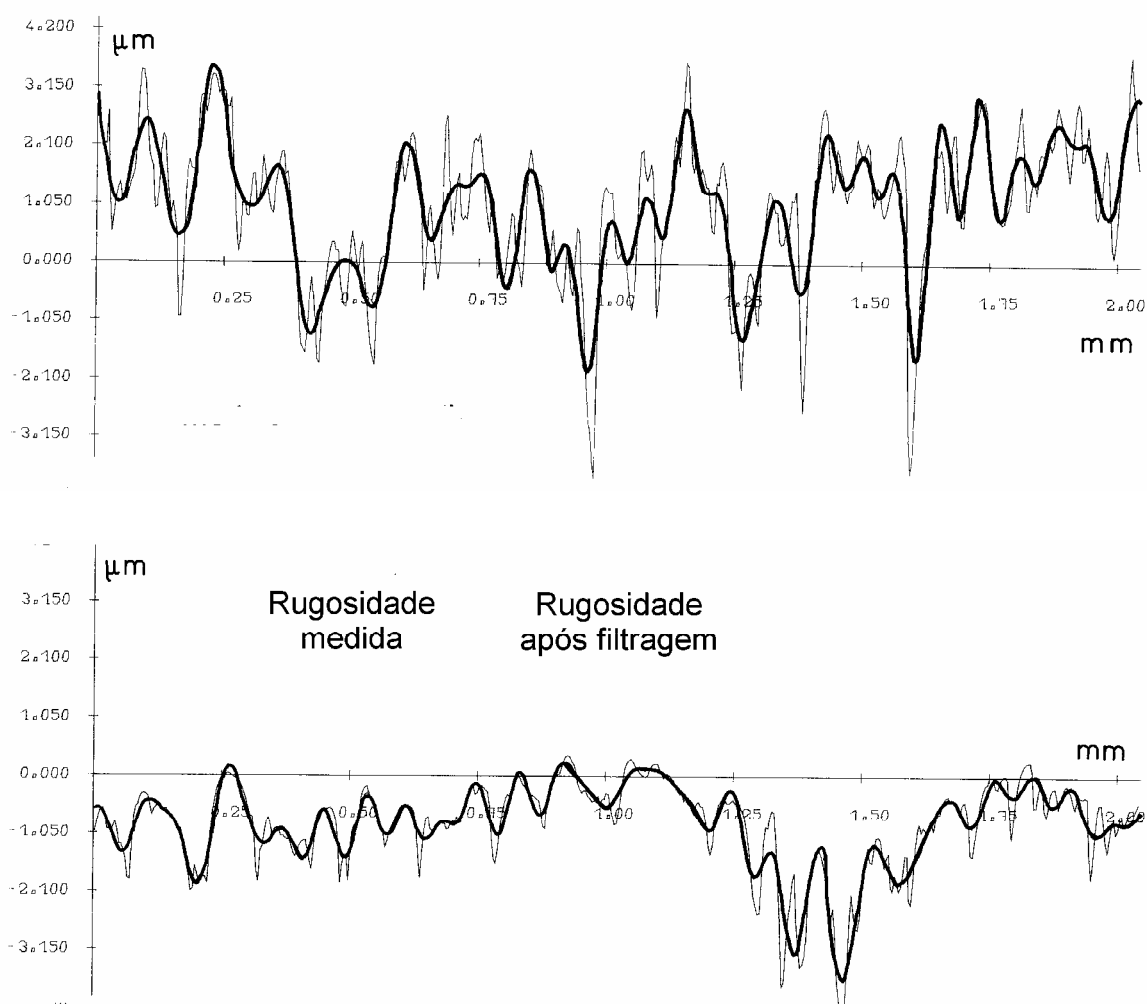


Figura 6.6 – Perfis (medidos e filtrados) de uma superfície rugosa, após fabrico e após rodagem durante alguns milhares de ciclos [1].

As características das duas superfícies em termos de contacto, foram analisadas considerando o contacto entre um cilindro e esses perfis de rugosidade, para vários valores da carga normal aplicada.

A figura 6.7 mostra as correspondentes distribuições de pressão e áreas de contacto reais, para cada um dos perfis de rugosidade e para o mesmo valor da carga normal. Ambas as distribuições de pressão exibem vários picos de muito elevada intensidade (quando comparados com a respectiva pressão máxima de Hertz) e as áreas de contacto globais são formadas por várias pequenas porções.

As sobrepressões relativas Δp_r são muito elevadas, e as áreas de contacto reais são significativamente mais pequenas que a área de contacto Hertziana.

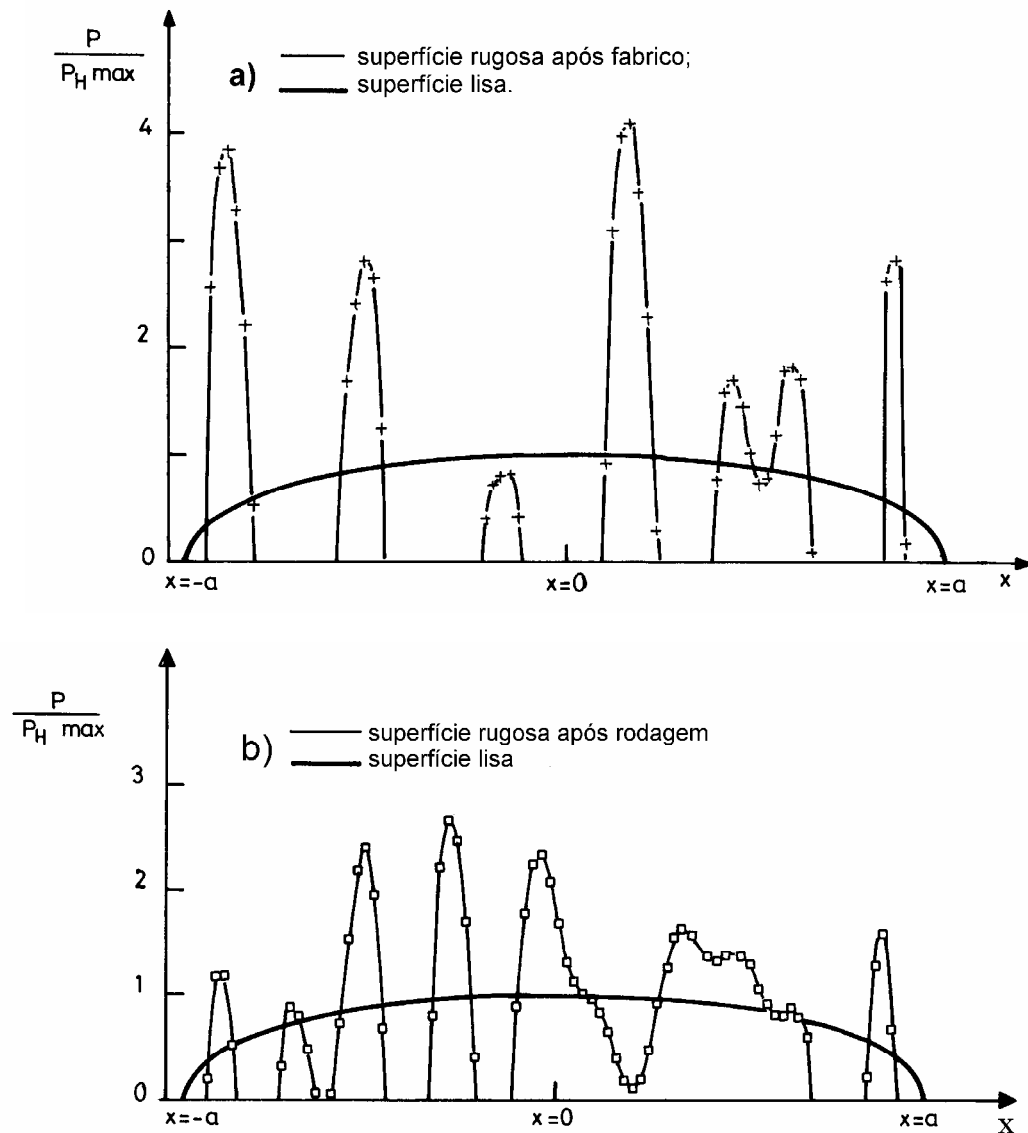


Figura 6.7 – Distribuição de pressão e área de contacto entre um cilindro liso e uma superfície plana rugosa: a) rugosidade após fabrico; b) rugosidade após rodagem [1].

Constata-se, ainda, comparando as duas distribuições de pressão e de superfície de contacto, que a influência do período de rodagem se traduz por uma diminuição substancial das sobrepressões e um aumento da área de contacto real, o que fisicamente está de acordo com a diminuição das amplitudes das ondulações induzidas no perfil de rugosidade pelo próprio período de rodagem.

Nas figura 6.8 e 6.9 estão representados os valores dos parâmetros p_{\max}/p_0 e S/S_0 , para vários valores da carga normal aplicada ao contacto e para cada um dos perfis de rugosidade considerados.

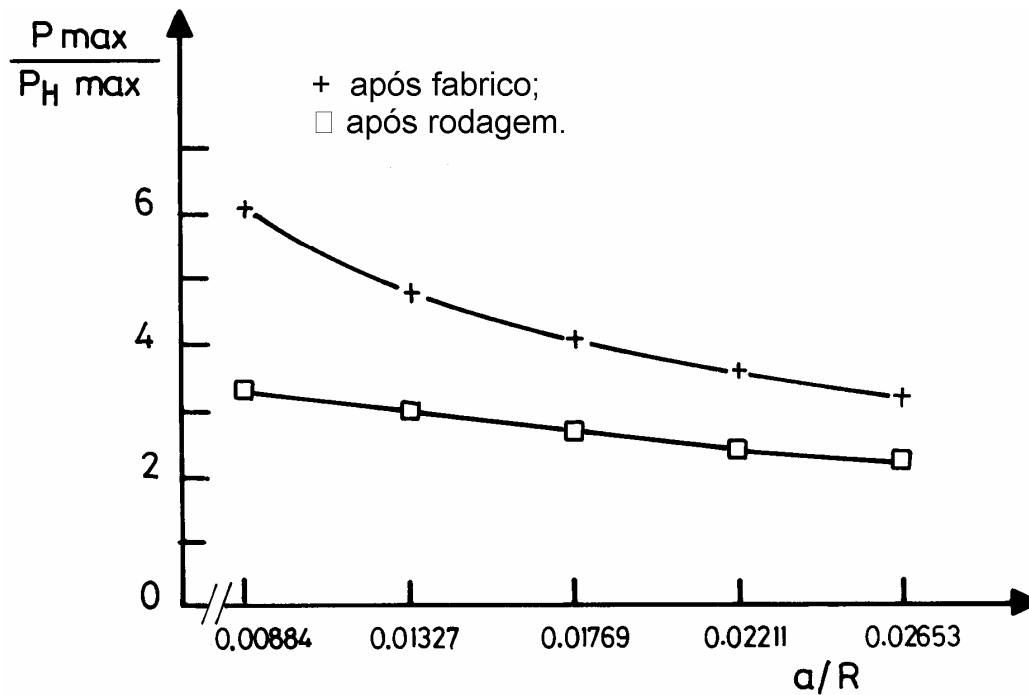


Figura 6.8 – Variação do parâmetro p_{\max}/p_0 , para vários valores da carga normal aplicada ao contacto e para cada um dos perfis de rugosidade considerados [1].

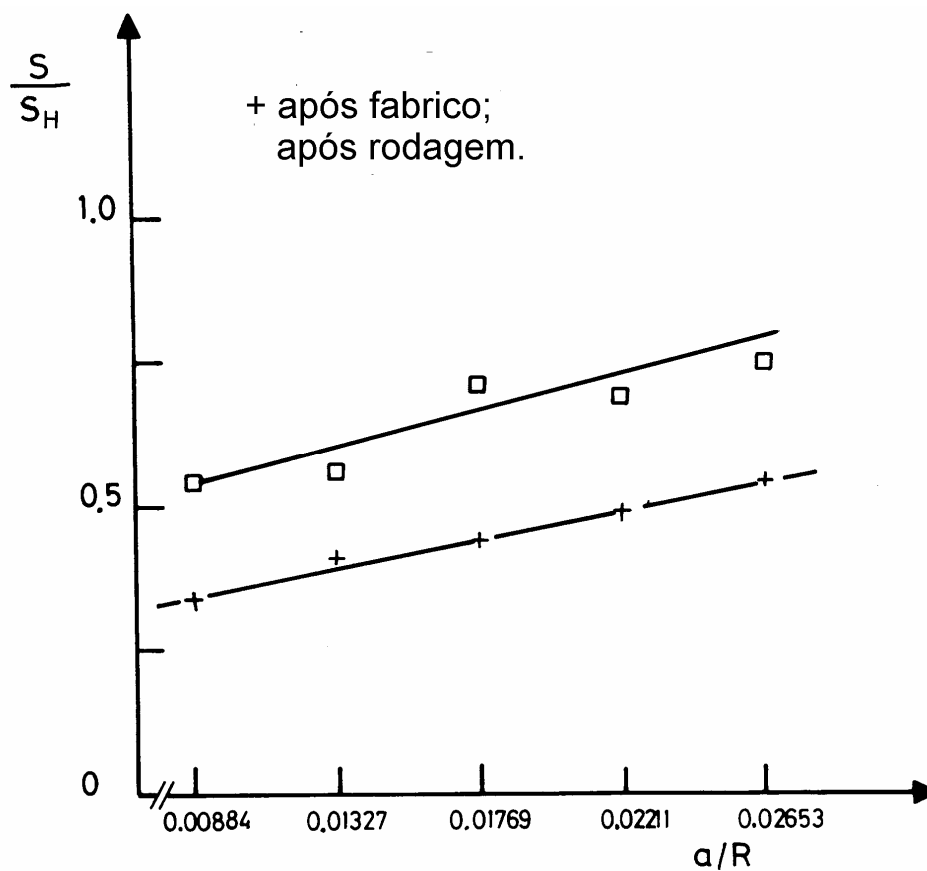


Figura 6.9 – Variação do parâmetro S/S_0 , para vários valores da carga normal aplicada ao contacto e para cada um dos perfis de rugosidade considerados [1].

Constata-se, a partir da análise da figura 6.8, uma nítida diminuição da razão $p_{m\acute{a}x}/p_0$ com a diminuição das amplitudes, isto é, com a rodagem. Como se verificou no parágrafo anterior, aquando da análise da ondulação sinusoidal das superfícies, a razão $p_{m\acute{a}x}/p_0$ depende directamente de amp/λ , e a fase de rodagem tem como principal consequência a diminuição desse parâmetro. Verifica-se, ainda, uma diminuição da razão $p_{m\acute{a}x}/p_0$, tal como foi observado para o caso das superfícies onduladas.

A figura 6.9 põe de novo em evidência o papel da rodagem sobre o comportamento do contacto. Verifica-se um aumento significativo da área de contacto real, e da razão S/S_0 , quando se passa da superfície após fabrico para a superfície após rodagem.

No entanto, convém notar que mesmo no caso do perfil de rugosidade após rodagem, as sobrepressões relativas são sempre superiores a 100%, isto é, as pressões de contacto máximas atingidas, são no mínimo o dobro da pressão máxima de Hertz. E de modo análogo, as diminuições relativas de superfície de contacto real são sempre superiores a 25%.

Resultam desta análise duas importantes conclusões:

- 1- O comportamento de uma superfície rugosa é, qualitativamente análogo ao de uma superfície sinusoidal teórica;
- 2- Quer a ondulação quer a rugosidade das superfícies provocam alterações muito significativas das pressões e da superfície de contacto, as quais vão no sentido de severizar o próprio contacto.

6.2.3 *Contacto entre um elipsóide e uma superfície plana de geratriz sinusoidal*

Os dois casos tratados anteriormente envolviam contactos do tipo linear, em que as ondulações consideradas estavam orientadas transversalmente em relação ao eixo menor da área de contacto.

A análise apresentada em seguida aborda o problema de contacto entre um elipsóide (em forma de barril) e uma superfície ondulada, cuja ondulação está orientada longitudinalmente em relação ao eixo menor da elipse de contacto.

Tal como no parágrafo 6.2, a ondulação das superfícies é caracterizada pela seu comprimento de onda λ e pela sua amplitude amp . Os raios de curvatura principais do elipsóide são respectivamente R_x e R_y ($R_x < R_y$), como se mostra na figura 6.10; a e b ($a < b$) são as dimensões dos semi-eixos da correspondente elipse de contacto, respectivamente segundo as direcções x e y . As estrias da rugosidade são paralelas à direcção x (orientação longitudinal).

A razão de raios de curvatura R_x/R_y é de 30.531 e o material dos dois sólidos é idêntico (aço, $E_1 = E_2 = 205.8 \text{ Gpa}$ e $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$).

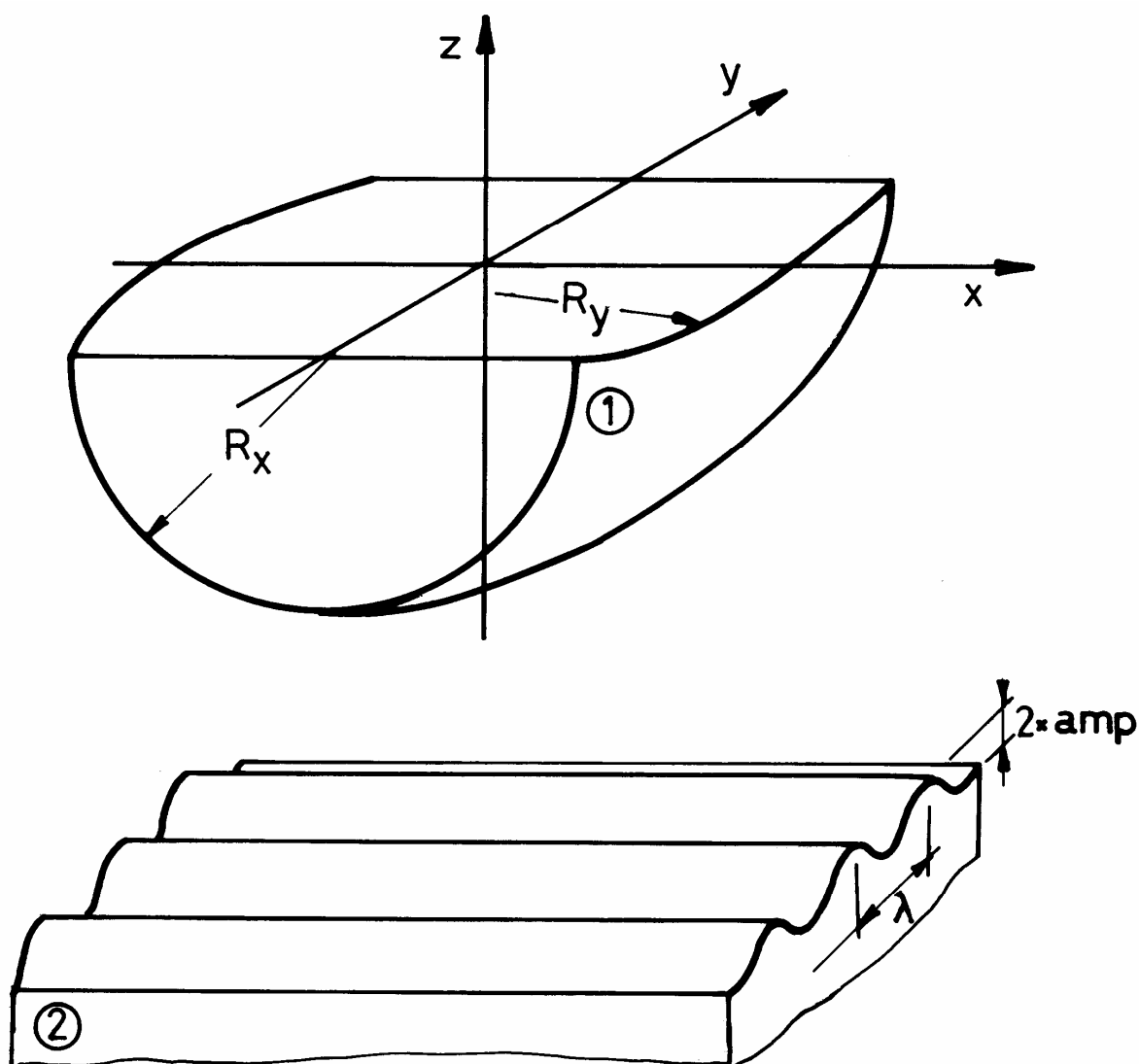


Figura 6.10 – Contacto entre um elipsóide e uma superfície sinusoidal [1].

O estudo realizado analisa a influência dos parâmetros comprimento de onda λ e amplitude amp da ondulação sobre a distribuição de pressão e a superfície de contacto. Os parâmetros considerados são idênticos aos anteriormente usados, sendo neste caso o parâmetro carga definido por $\frac{R_x R_y}{a b}$.

A figura 6.11 mostra-se a distribuição de pressão e a área de contacto correspondentes ao contacto entre um elipsóide e uma superfície plana, onde os parâmetros adimensionais tomam os seguintes valores:

$$\text{Parâmetro geometria} \rightarrow \frac{amp}{\lambda} = 0.002 ;$$

$$\text{Parâmetro ondulação} \rightarrow \frac{a}{\lambda} = 4.483 ;$$

$$\text{Parâmetro carga} \rightarrow \frac{R_x R_y}{a b} = 11171.4 ;$$

$$\text{Parâmetro geometria-carga} \rightarrow \frac{amp}{\lambda} \frac{R_x R_y}{a b} = 22.343 ;$$

As características da distribuição de pressão e da superfície de contacto são idênticas às obtidas para o caso de um contacto linear. Por uma lado a ocorrência de vários picos de pressão de intensidade superior à pressão máxima de Hertz, sendo neste caso a sobrepressão relativa de $\Delta p_r = 0.7$. Por outro lado uma área de contacto real inferior à área de contacto Hertziana, sendo neste caso a diminuição relativa de $\Delta S_r = 0.09$.

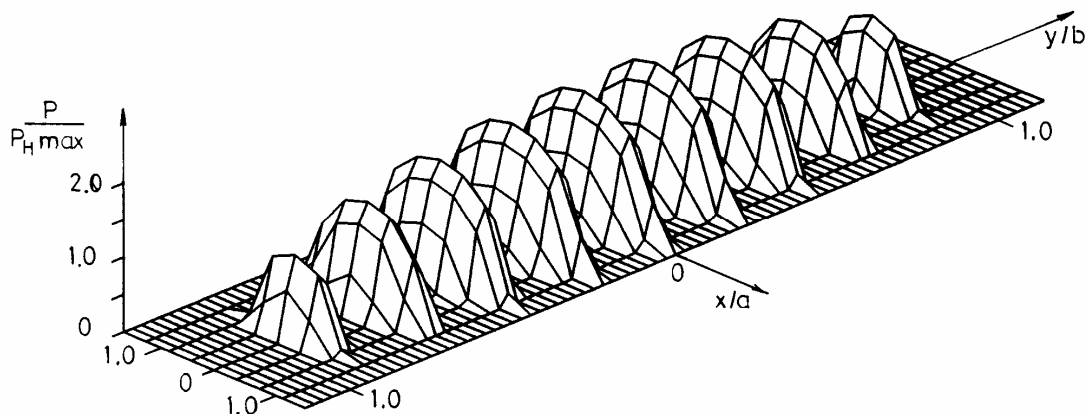


Figura 6.11 – Distribuição de pressão e área de contacto entre um elipsóide e uma superfície ondulada [1].

A figura 6.12 mostra a variação da sobrepressão relativa com o parâmetro geometria-carga, para vários valores do parâmetro ondulação. O aumento do parâmetro geometria-carga provoca o aumento da sobrepressão relativa, embora essa variação não seja linear, e vincando novamente a importância deste parâmetro sobre a sobrepressão relativa.

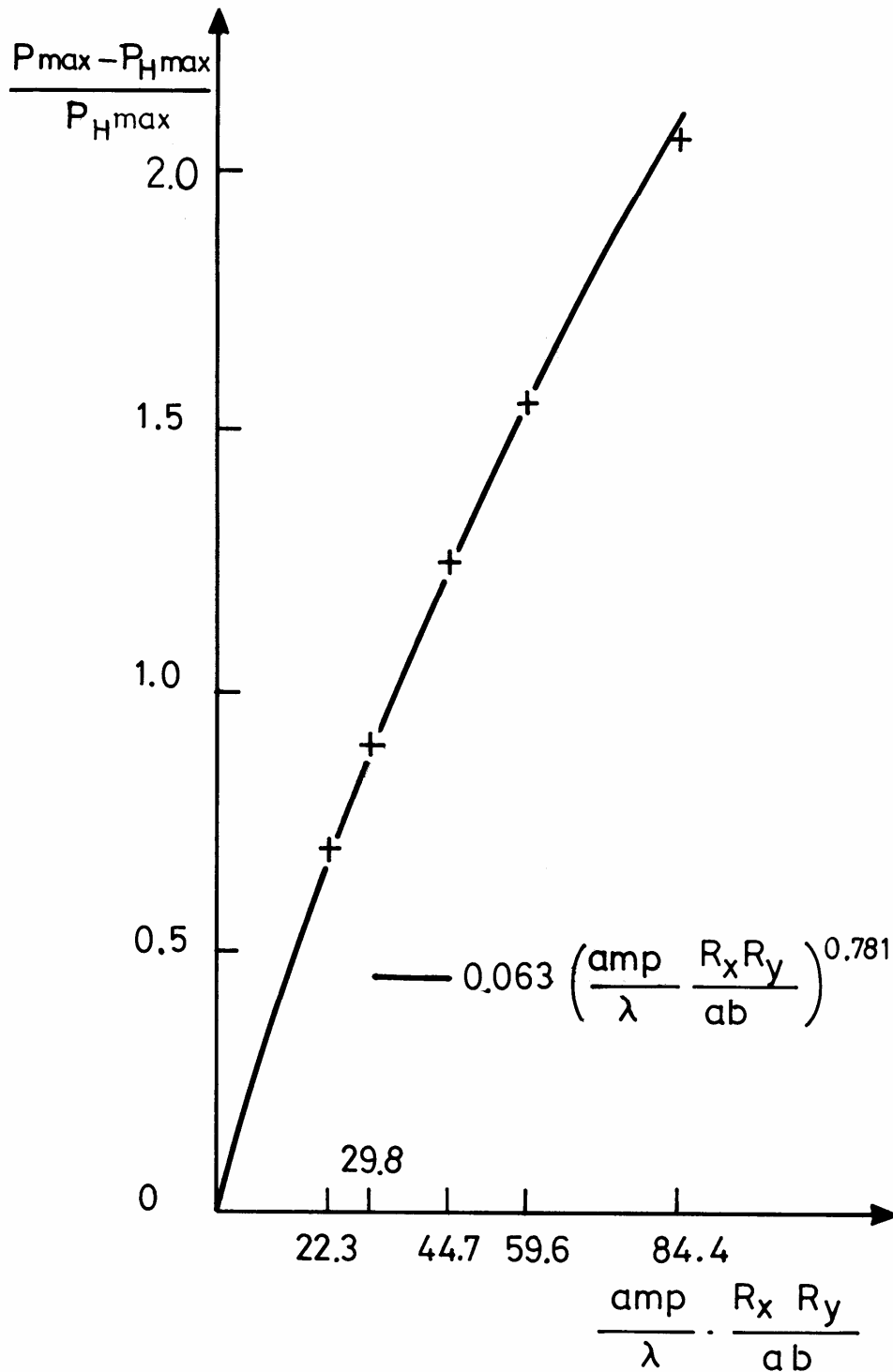


Figura 6.12 – Variação da sobrepressão relativa com o parâmetro geometria-carga [1].

Portanto, o aumento da amplitude, e a diminuição do comprimento de onda ou da carga, tem como consequência o aumento da sobrepressão relativa. A influência do parâmetro ondulação, isto é, do número de ondulações no interior do contacto Hertziano, não foi analisada.

A aproximação dos resultados obtidos para a sobrepressão relativa, pelo método dos mínimos quadrados, permitiu obter a seguinte expressão

$$\Delta p_r = \frac{P_{m\acute{a}x} - P_0}{P_0} = 0.063 \left(\frac{amp}{\lambda} \cdot \frac{R_x R_y}{a b} \right)^{0.781} \quad (6.2)$$

com um coeficiente de correlação de 0.996.

A figura 6.13 apresenta a evolução da variação relativa da superfície de contacto ΔS_r , com o parâmetro geometria-carga. Tal como nos casos precedentes, a variação relativa da área de diminui com o parâmetro geometria carga, isto é, a superfície real de contacto diminui quando aumenta a amplitude da ondulação e aumenta quando aumentam o comprimento de onda e a carga normal aplicada.

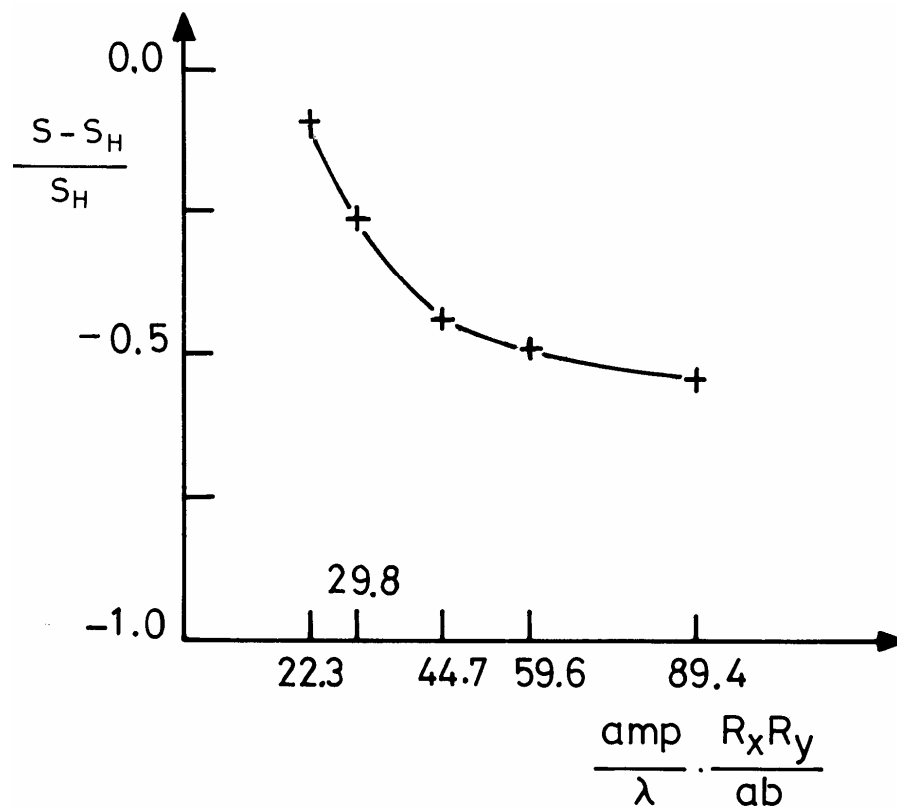


Figura 6.13 – Variação da área de contacto relativa com o parâmetro geometria-carga [1].

Constata-se, ainda, que um aumento da amplitude provoca um aumento do número de pequenas áreas de contacto que formam a superfície de contacto no seu todo, acompanhado de um aumento da pressão em cada uma dessas pequenas áreas de contacto.

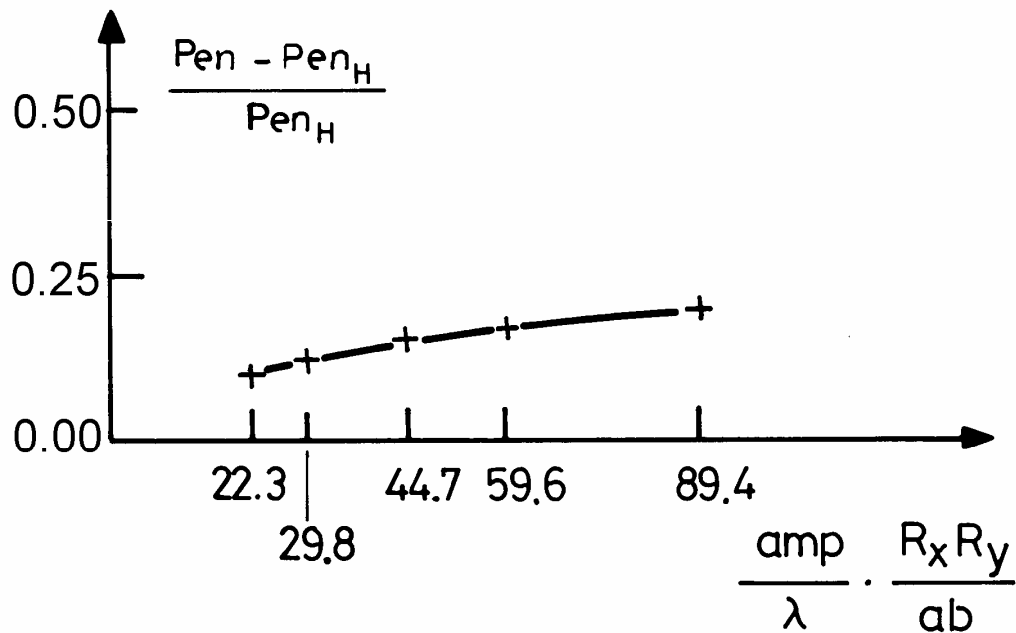


Figura 6.14 – Variação da penetração relativa com o parâmetro geometria-carga [1].

A figura 6.14 mostra a variação da penetração entre as duas superfícies em contacto, pen , com o parâmetro geometria-carga. Quando o parâmetro geometria carga aumenta a penetração também aumenta, o que implica uma diminuição da rigidez do contacto, se essa rigidez for entendida como a razão entre a carga aplicada e a penetração correspondente, isto é, $K_c = F_n / pen$.

Tal significa que o aumento da amplitude, ou a diminuição do comprimento de onda, implicam uma maior penetração para que a mesma carga possa ser suportada elasticamente.

6.3 Influência da rugosidade sobre a distribuição de tensões no interior de um sólido em contacto

No parágrafo anterior ficou devidamente justificada a necessidade de estudar em detalhe o comportamento dos contactos Hertzianos entre superfícies onduladas ou rugosas.

As perturbações a que são submetidas a distribuição de pressão, a área de contacto e a penetração, por efeito da ondulação ou rugosidade superficial, provocam alterações muito significativas sobre o campo de tensões no interior dos sólidos em contacto, como mostraram Michaud [3] e Castro [4] nos seus trabalhos. Tais perturbações são consideradas como as principais causas das avarias de fadiga superficial que ocorrem nas pistas dos rolamentos e nos flancos activos dos dentes de engrenagens.

No capítulo anterior, o campo de tensões no interior de um sólido em contacto Hertziano foi analisado em detalhe. Em seguida são apresentadas as principais perturbações a que tal campo de tensões é submetido quando a distribuição de pressão no contacto é perturbada pela presença das ondulações e rugosidades superficiais.

As distribuições de tensões em seguida apresentadas são baseadas num modelo teórico que admite que a ondulação das superfícies provoca uma distribuição de pressões também ondulada representada por um determinado número de picos e de vales de pressão como se mostra na figura 6.15.

Os resultados são apresentados em função da sobrepressão relativa considerada, isto é, em

função de $\Delta p_r = \frac{P_{máx} - P_0}{P_0}$ e do número de picos e de vales considerados.

As figuras 6.15 e 6.16, mostram as curvas de isotensão no interior dos sólidos em contacto, respectivamente, para a tensão de corte máxima e para a tensão de corte ortogonal máxima, considerando uma ondulação das pressões de contacto representada por 25 bandas (13 picos e 12 vales) e um valor de $\Delta p_r = 0.75$.

A análise das figuras 6.15 e 6.16 mostra, de imediato, que as tensões no interior dos sólidos não são perturbadas pela ondulação da pressão de contacto para pontos situados a uma profundidade superior a $0.5 a$.

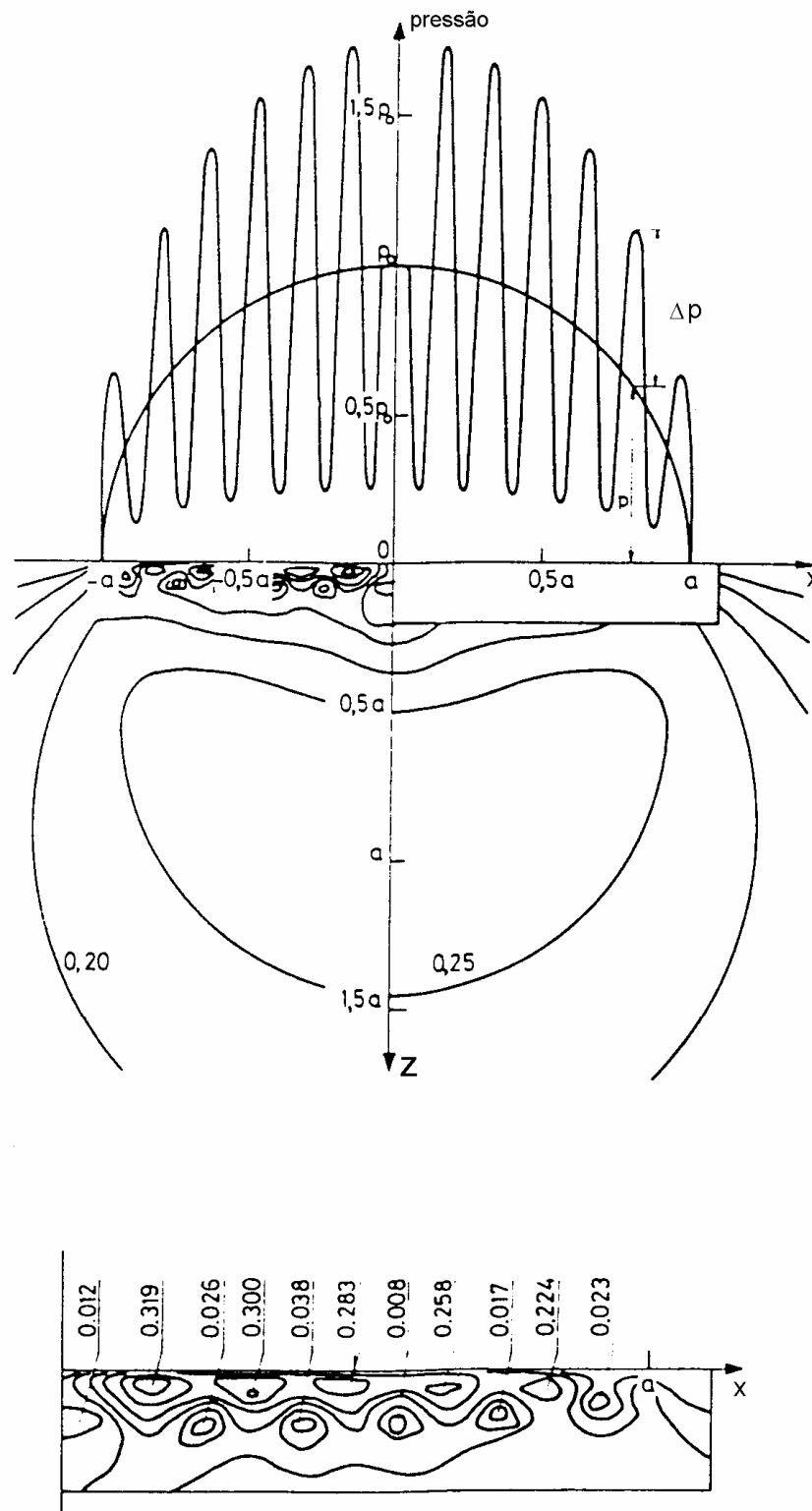


Figura 6.15 – Curvas de isotensão da tensão de corte máxima no interior dos sólidos em [3].

Verifica-se que a tensão de corte máxima apresenta vários máximos secundários junto à superfície ($z = 0.03 a$), e quatro desses máximos tem uma intensidade superior ao máximo primário $\tau_{máx} = 0.3 p_0$. No caso da tensão de corte ortogonal (figura 6.16) são 10 os máximos secundários junto à superfície ($z = 0.025 a$) cuja intensidade é superior ao máximo correspondente $(\tau_{xy})_{máx} = 0.25 p_0$.

A influência da sobrepressão relativa também é importante. Se Δp_r variar entre 0 e 1, os valores dos máximos secundários das tensões de corte τ e τ_{xy} , crescem proporcionalmente com Δp_r :

Se $\Delta p_r = 0.5$, os máximos secundários são todos inferiores aos máximos primários.

Se $\Delta p_r = 0.75$, apenas alguns máximos secundários são superiores aos máximos primários.

Se $\Delta p_r = 1.0$, quase todos os máximos secundários são superiores aos máximos primários.

O número de picos e de vales não influencia muito significativamente a intensidade dos máximos secundários. Se o número de bandas aumenta, o número de valores máximos e mínimos aumenta, a profundidade à qual ocorrem diminui, mas a sua intensidade mantém-se.

A intensidade dos valores máximos e mínimos só depende do valor da sobrepressão relativa Δp_r , embora não seja possível traduzi-la por uma expressão matemática simples. Uma estimativa grosseira permite dizer que a intensidade do máximo secundário é aproximadamente igual a $0.2 \Delta p$, onde Δp representa a diferença de pressão entre o pico e o vale situados por cima desse máximo secundário.

A profundidade à qual actuam os máximos secundários diminui com o aumento do número de bandas (picos e vales). Essa profundidade pode ser determinada de um modo aproximado supondo que cada pico de pressão corresponde à distribuição de pressão Hertziana. Assim, para 25 bandas, teremos que a largura de contacto de cada pico (a^*) é, aproximadamente, igual a: $a^* = a/25 = 0.04 a$.

Sabendo que o máximo primário da tensão de corte máxima actua a uma profundidade igual a $z_s = 0.78 a$ obtém-se que a profundidade z_s^* à qual actua o máximo secundário é igual a: $z_s^* = 0.031 a$. Para o caso dos máximos secundários da tensão de corte ortogonal máxima, obtém-se, pelo mesmo raciocínio, que $z_0^* = 0.025 a$.

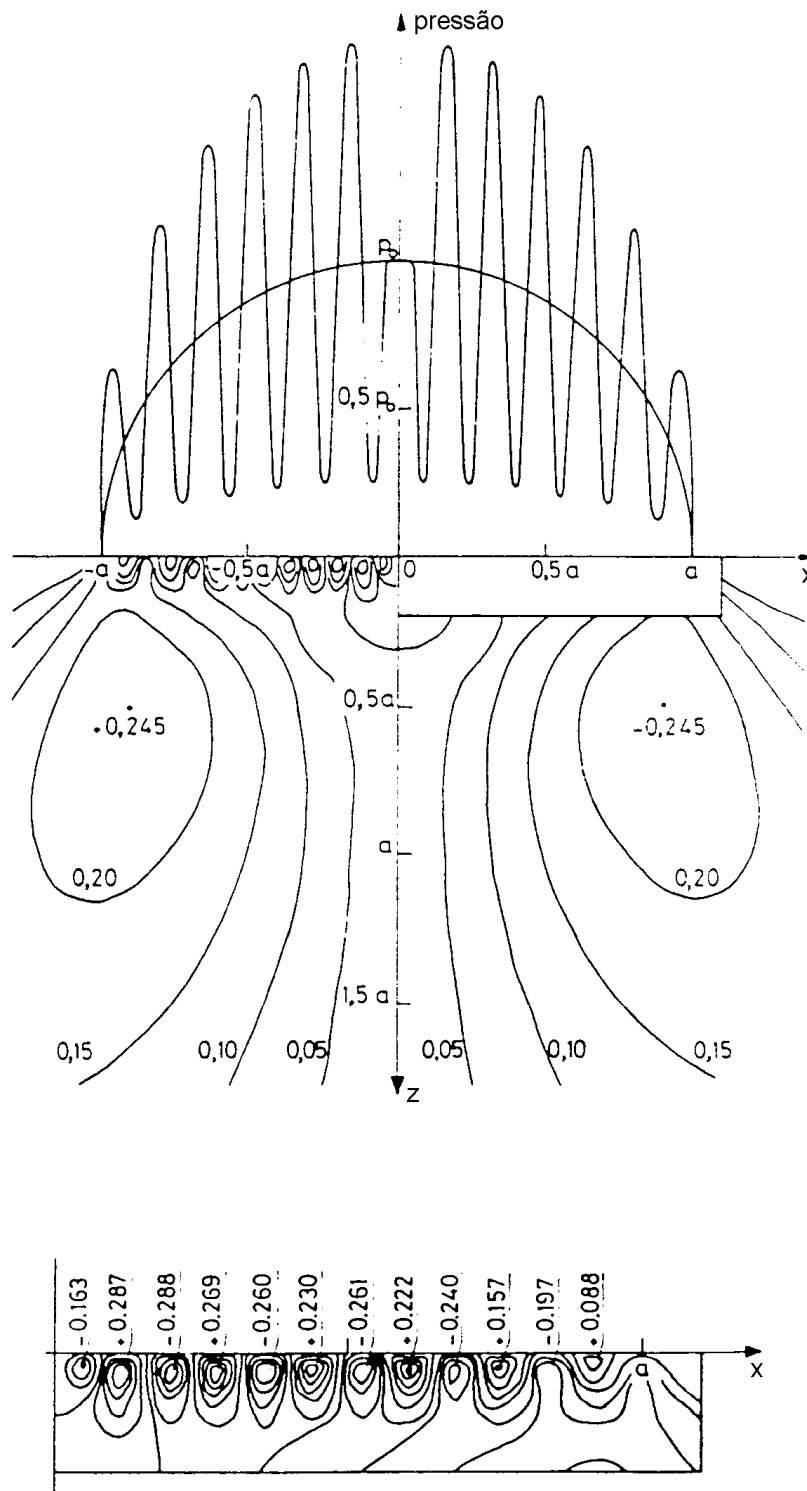


Figura 6.16 – Curvas de isotensão da tensão de corte ortogonal máxima no interior dos sólidos em [3].

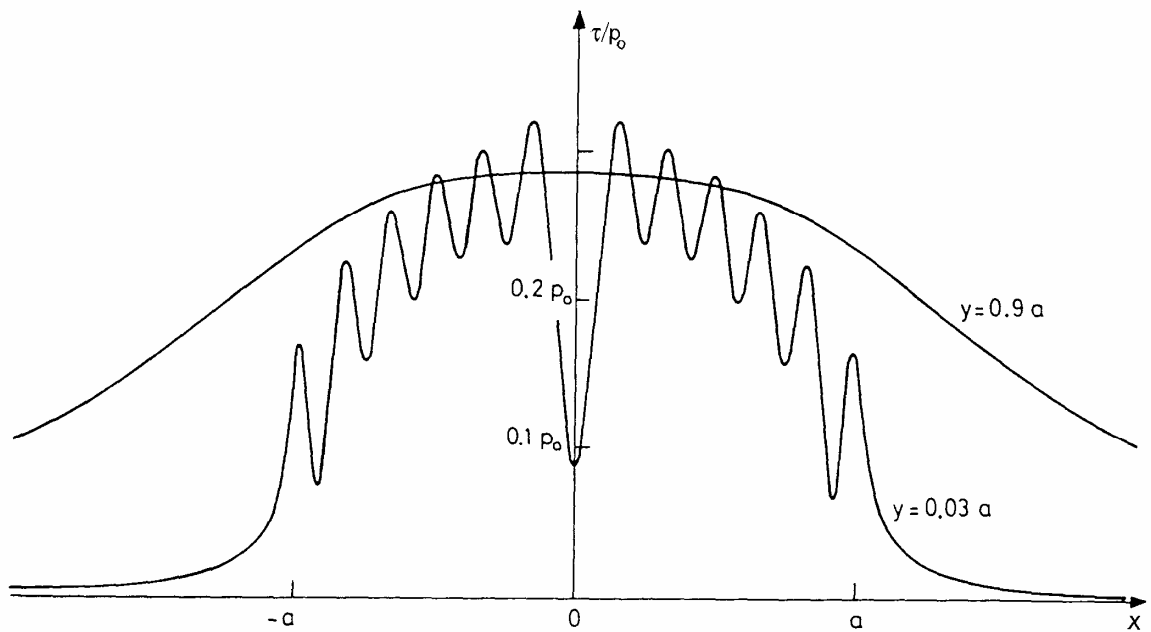


Figura 6.17 – Andamento da tensão de corte máxima segundo a largura do contacto [3].

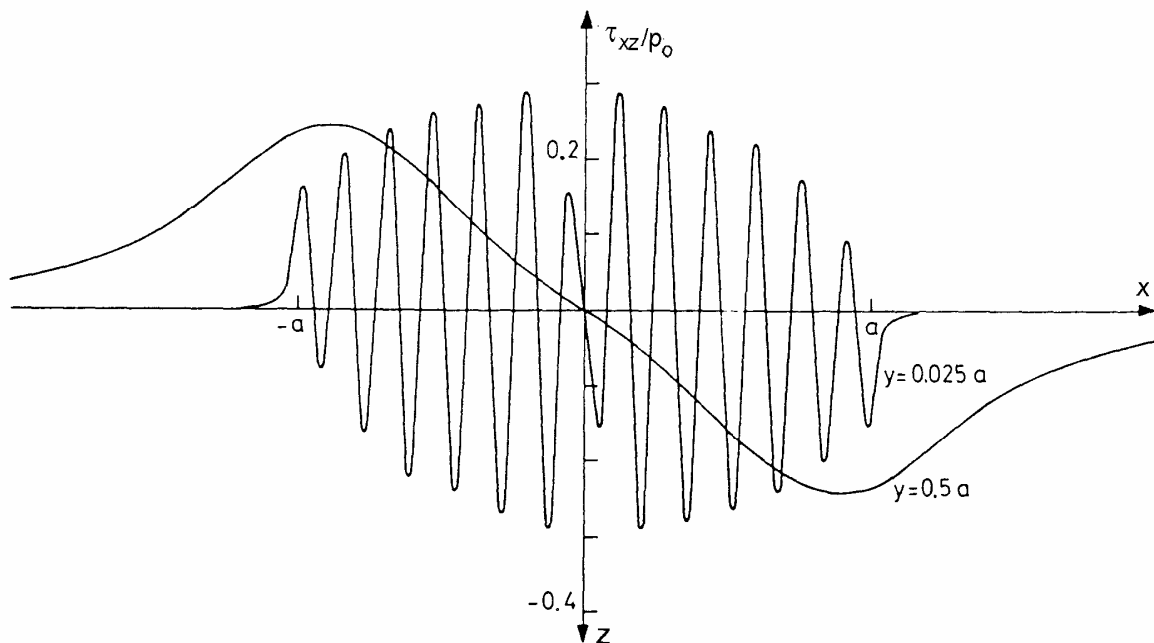


Figura 6.18 – Andamento da tensão de corte ortogonal segundo a largura do contacto [3].

As figuras 6.17 e 6.18 mostram o andamento da tensão de corte e da tensão de corte ortogonal, ao longo da largura do contacto, junto à superfície (onde actuam os máximos secundários) e em profundidade (onde actuam os máximos primários), verificando-se a forte modulação a que estas tensões são submetidas (25 bandas de pressão de contacto e uma sobrepressão relativa Δp_r de 0.75).

A influência da ondulação das superfícies, e a conseqüente ondulação da distribuição de pressões de contacto, produz as seguintes alterações no campo de tensões instaladas no interior de um sólido em contacto:

- Não modifica as tensões em pontos situados a uma profundidade superior a $0.5 a$;
- Introduz máximos secundários da mesma ordem de grandeza dos máximos primários em pontos situados a uma profundidade inferior a $0.1 a$;
- As intensidades dos máximos secundários dependem da amplitude e do comprimento de onda das ondulações da geometria e conseqüentes ondulações das distribuições de pressão de contacto.

Bibliografia do Capítulo 6:

- [1] J. Seabra, “Influence de l’Ondulation des Surfaces sur le Comportement des Contacts Hertzians Secs ou Lubrifiés”. Dissertação para obter o grau de “Docteur en Mécanique”, pelo “Laboratoire de Mécanique de Contacts” do “Institut national des Sciences Appliquées” de Lyon, France, 1988 (nº 8 INSAL 0018), 215 páginas.
- [2] J. Seabra e D. Berthe, “Influence of Surface Waviness and Roughness on the Normal Pressure Distribution in the Hertzian Contact”. Transactions of the ASME, Journal of Lubrication Technology, Vol. 109, July 1987, 462-470.
- [3] B. Michau, D. Berthe e M. Godet, “Influence of Pressure Modulation in Line Hertzian Contact on the Internal Stress Field”, WEAR, vol. 28 (1974), 187-195.
- [4] J. Castro, “Análise Numérica de Tensões em Semi-Espaços Elásticos Submetidos a Tensões de Contacto”. Trabalho desenvolvido na disciplina de Laboratório de Computação, do Curso de Mestrado em Engenharia Estrutural, da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1994, 82 páginas.



Universidade do Porto

Faculdade de Engenharia

FEUP