

# Introdução às Medidas em Física

4300152

4<sup>a</sup> Aula (14/04/2023)

Licenciatura IME – Turma 42

*Ricardo Andrade Terini*

[rterini@if.usp.br](mailto:rterini@if.usp.br)

Bloco F – Conjunto Alessandro Volta – sl. 105

Agradecimentos aos profs. Nemitala Added e Elisabeth M. Yoshimura por cederem as apresentações que serviram de base para esta.

---

# Experiência II - 2

## Densidade de Sólidos

- Resumo dos principais pontos da aula anterior

- **Conceitos:**


Instrumentos de medida

Paquímetro e Micrômetro

Noções de estatística:

Propagação de Incertezas

Compatibilidade entre medidas



Avançando no  
tratamento de  
incertezas

- **Experiência 2.2: Densidade de Sólidos**

- Realizar medidas de dimensões de diferentes objetos com paquímetro e micrômetro.

- Identificar os tipos de plásticos através da comparação de valores de densidade (+incertezas) com valores tabelados.

---

# Referências para a aula de hoje:

- [Apostila do curso](#) (página principal do *Moodle*):
  - Capítulo 3: Instrumentos de Medidas
  - Experiência II (Aulas 03 e 04): Densidade de Sólidos.
- [Conceitos Básicos da Teoria de Erros](#) (texto, aba Material Didático / arquivos 2023)
  - Capítulo 2: Propagação de Erros e Incertezas

relembrando

# Como avaliar a incerteza de uma medida

## Tipos de incerteza

- **Instrumental**

*Aquela associada à **precisão do instrumento** utilizado para realizar a medida direta de uma grandeza*

- **Estatística**

*Incerteza associada à **flutuação no resultado** de uma mesma medida*

- **Sistemática** (erro sistemático)

*Aquela onde a medida é desviada em uma única direção, tornando os resultados viciados.*

**Devem ser corrigidas!**

relembrando

# Medidas, Incertezas e ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS

- **Algarismos Significativos:** Algarismos *certos* (lidos) + 1 algarismo *duvidoso* (incerto, estimado) (trazem significado ao resultado de uma medida)
- **Medida direta – incerteza instrumental:**
  - ❖ *Conjunto de algarismos significativos avaliados na medição  $\pm$  incerteza (instrumento analógico / digital).*
- **Medida direta – incertezas estatísticas:**

Erro padrão, média e incerteza são calculados e escritos com:

  - ❖ *somente 1 alg. duvidoso na média e somente 1 alg. significativo na incerteza (*média  $\pm$  incerteza*)*
  - ❖ *o mesmo número de casas decimais*

# Como avaliar (*obter*) incertezas

- **Incertezas:** expressas com **1 alg. significativo** (em geral)
- **Medida direta – incerteza instrumental:**
  - verificar **resolução** do instrumento
  - avaliar a **incerteza** nas condições de medida
- ❖ *Condição ideal – metade da menor divisão da escala analógica OU o menor valor mensurável em escalas digitais (ou ainda indicação do manual).*



- ❖ *A incerteza instrumental pode, cf. as condições da medição, ser **maior do que a precisão** do instrumento de medida.*

# Como avaliar as incertezas

- **Medida direta – incertezas estatísticas:**
  - avaliar a **incerteza** por repetição da medida
    - ❖ *Obter **média e desvio padrão** (dispersão de medidas em torno da média)*
    - ❖ *Calcular o **desvio padrão da média** – essa é a **incerteza estatística da média***

Calcular a *incerteza final da média*, ou **erro padrão** (*incerteza combinada*, composição quadrática das incertezas instrumental e estatística) :

$$\sigma_{L_{final}} = \sqrt{\sigma_{L_{instr}}^2 + \sigma_{L_{método}}^2} = \sqrt{\sigma_{L_{instr}}^2 + \sigma_{L_{estatístico}}^2}$$

# Como anotar o resultado

## Tirado dos guias 1.2 – outras turmas...

Média (s)	Incerteza da média (s)	Média $\pm$ incerteza (s)	CORRETO??
25,12	0,05289	25,12 $\pm$ 0,05	
24,85	5 . 10 <sup>-2</sup>	24,85 $\pm$ 5 . 10 <sup>-2</sup>	
24,81	0,05	24,81 $\pm$ 0,05	
24,862	0,05863	24,86 $\pm$ 0,06	
25,13	0,04	25,13 $\pm$ 0,01	
25,01	0,115	25,01 $\pm$ 0,11	
2,519	0,05	2,519 $\pm$ 0,05	
25,13	0,01	25,13 $\pm$ 0,01	



Na aula passada

# Como avaliar (*estimar*) incertezas

- **Medida INdireta - PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS:**

- ❖ **Uma variável** – incerteza é transferida (propagada) para a grandeza calculada; em *1ª. aproximação*:

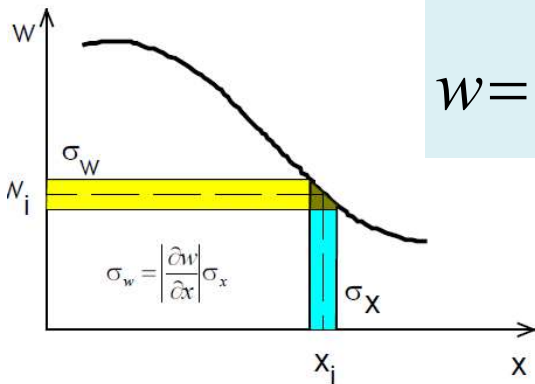
$$x \pm \sigma_x$$

$$w = w(x) \Rightarrow \sigma_w = \frac{1}{2} |w(x + \sigma_x) - w(x - \sigma_x)|$$

- ❖ **Várias variáveis** – incerteza total, em *1ª. aproximação* (exagerada):

$$x \pm \sigma_x; y \pm \sigma_y$$

$$w = w(x, y) \Rightarrow \sigma_{wx} = \frac{1}{2} |w(x + \sigma_x, y + / - \sigma_y) - w(x - \sigma_x, y + / - \sigma_y)|$$



o que maximizar  $w$

o que minimizar  $w$

# Como determinar incertezas

## Medida INdireta - PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS:

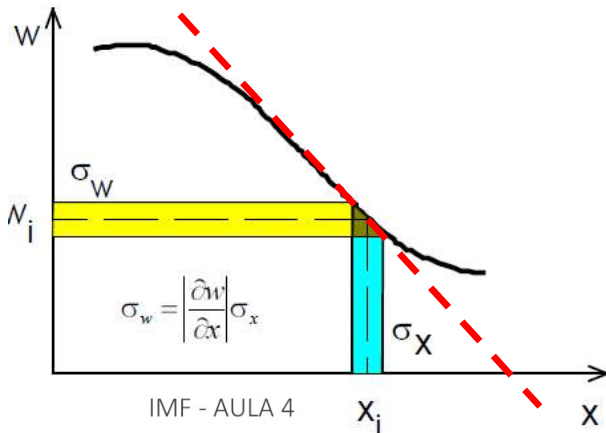
- ❖ **Uma variável** – Incerteza transferida (propagada) para a grandeza calculada  $\equiv$  **DERIVADA** em relação à variável de medida direta, multiplicada pela sua incerteza:

**Derivada** = coef. angular da reta tangente à curva  
 $w = w(x)$

$$x \pm \sigma_x$$

$$w = w(x) \Rightarrow \sigma_w = \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cdot \sigma_x$$

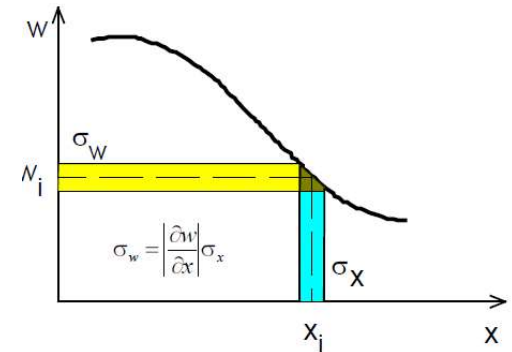
- ❖ **Várias variáveis** – incerteza total é soma quadrática das contribuições de cada variável (p/ independentes):



$w = w(x, y, \dots); \dots x \pm \sigma_x; y \pm \sigma_y$  etc. Independentes

$$\sigma_w = \sqrt{\left( \frac{\partial w}{\partial x} \sigma_x \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \sigma_y \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \sigma_z \right)^2 + \dots}$$

# Propagação de incertezas: resultados - incertezas relativas



- Se a dependência da variável é por **MULTIPLICAÇÃO** ou **DIVISÃO**, é fácil deduzir como as incertezas relativas se propagam:

Multiplicação e divisão :  $w = k \frac{x}{y} \cdot z$ , etc

Incerteza relativa de  $w$

$$\sigma_w = w \cdot \frac{\sigma_w}{w} = w \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_z}{z}\right)^2 + \dots}$$

- Para o caso de **divisões/multiplicações com POTÊNCIAS**:

Multiplicação, divisão, potência :  $w = k \frac{x^m}{y^n} \cdot z$ , etc

$$\sigma_w = w \cdot \frac{\sigma_w}{w} = w \cdot \sqrt{\left(m \frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(n \frac{\sigma_y}{y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_z}{z}\right)^2 + \dots}$$

# Propagação de incertezas:

## Experiência II - Densidade de Sólidos

A densidade é dada por:

$$d = \frac{m}{V}$$

onde, o volume  $V$  é:

$$V = \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot h = \pi \cdot \frac{D^2}{4} \cdot h$$

e  $m$ ,  $h$  e  $D$  são, respectivamente, a massa, a altura e o diâmetro do cilindro **medidos diretamente**:

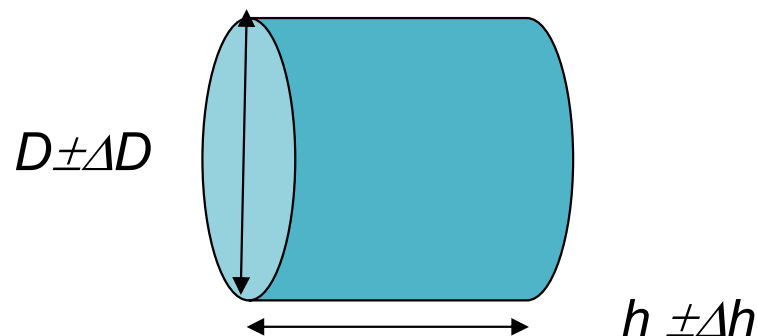
$$m \bar{\pm} \sigma_m ; D \bar{\pm} \sigma_D ; h \bar{\pm} \sigma_h$$

# Propagação de incertezas:

## Experiência II - Densidade de Sólidos

- Para o cálculo da incerteza do volume do cilindro ( $\sigma_V$ ) combinamos as duas **incertezas** ( $\sigma_{V(h)}$  e  $\sigma_{V(D)}$ ) por meio de uma *soma quadrática*.
- Fazemos isso assumindo que a incerteza devido ao diâmetro é independente da incerteza devido à altura:

$$\Delta V^2 = (\Delta V_{\text{devido a } \Delta D})^2 + (\Delta V_{\text{devido a } \Delta h})^2$$



$$\therefore \sigma_V = \sqrt{\sigma_{V(h)}^2 + \sigma_{V(D)}^2}$$

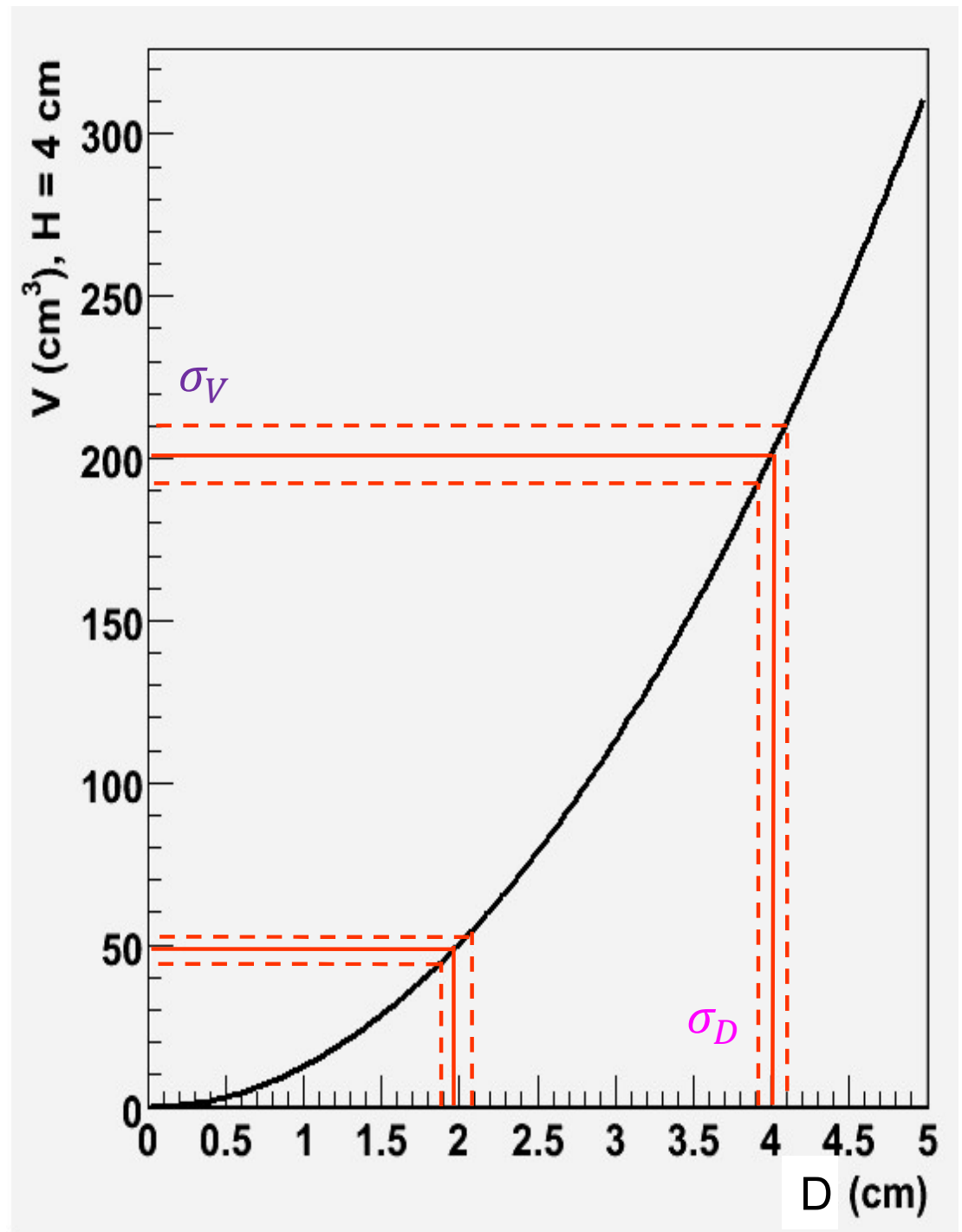
## Propagação de incertezas

Partindo da dependência do volume de um cilindro com o diâmetro:

$$V = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 h$$

Esta fórmula é razoável?

$$\sigma_{V(D)} = \frac{\partial V}{\partial D} \sigma_D$$



# Propagação de incertezas:

## Experiência II - Densidade de Sólidos

### Como calcular as derivadas

Suponha que todo o resto da expressão é uma constante:

$$\frac{\partial V}{\partial D} = \frac{\partial}{\partial D} \left( \frac{\pi}{4} D^2 h \right) = \frac{\pi}{4} h \frac{\partial(D^2)}{\partial D} = \frac{\pi}{4} h (2D) = \frac{\pi}{2} h D$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{\pi}{4} D^2 h \right) = \frac{\pi}{4} D^2 \frac{\partial(h)}{\partial h} = \frac{\pi}{4} D^2 (1) = \frac{\pi}{4} D^2$$

# Propagação de incertezas:

## Experiência II - Densidade de Sólidos

Volume

Como calcular cada derivada:

Suponha que todo o resto da expressão é uma constante....

$$V = \frac{\pi}{4} (D)^2 h$$

$$h \pm \sigma_h; D \pm \sigma_D; \quad V = \frac{\pi}{4} (D)^2 h$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi}{4} (D)^2 \Rightarrow \sigma_{V_h} = \left| \frac{\pi}{4} (D)^2 \sigma_h \right|$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial D} = \frac{\pi}{4} 2(D)^1 h \Rightarrow \sigma_{V_D} = \left| \frac{\pi}{4} 2(D)h \sigma_D \right|$$



# Propagação de incertezas: Experiência II - Densidade de Sólidos

Volume

$$V = \frac{\pi}{4} (D)^2 h$$

Incerteza  
relativas

$$\sigma_V = \sqrt{(\sigma_{V_h})^2 + (\sigma_{V_D})^2}$$

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4} (D)^2 \sigma_h\right)^2 + \left(\frac{\pi}{4} 2(D)h\sigma_D\right)^2}$$

$$\text{ou} \Rightarrow \frac{\sigma_V}{V} = \sqrt{\frac{1}{V^2} \left(\frac{\pi}{4} (D)^2 \sigma_h\right)^2 + \frac{1}{V^2} \left(\frac{\pi}{4} 2(D)h\sigma_D\right)^2}$$

$$\frac{\sigma_V}{V} = \sqrt{\frac{16}{\pi^2 D^4 h^2} \left(\frac{\pi}{4} (D)^2 \sigma_h\right)^2 + \frac{16}{\pi^2 D^4 h^2} \left(\frac{\pi}{4} 2(D)h\sigma_D\right)^2}$$

$$\frac{\sigma_V}{V} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_D}{D}\right)^2} \quad \text{ou} \quad \sigma_V = V \sqrt{\left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_D}{D}\right)^2}$$

# Propagação de incertezas:

## Experiência II - Densidade de Sólidos

Assim, para a densidade

$$d = \frac{m}{V} = \frac{4m}{\pi D^2 h}$$

...a propagação pode ser feita via  
incertezas relativas:

$$\frac{\sigma_d}{d} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\sigma_d}{d} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2}$$

# Cálculo direto da incerteza da densidade

$$d = \frac{m}{V} = \frac{4m}{\pi D^2 h}$$

$$\sigma_d = \sqrt{(\sigma_d^m)^2 + (\sigma_d^D)^2 + (\sigma_d^h)^2}$$

$$\sigma_d = \sqrt{\left(\frac{\partial d}{\partial m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial D}\right)^2 \sigma_D^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial h}\right)^2 \sigma_h^2}$$

$$\rightarrow \frac{\partial d}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{4m}{\pi D^2 h} \right) = \frac{4}{\pi D^2 h} \frac{\partial(m)}{\partial m} = \frac{4}{\pi D^2 h} (1) = \frac{4}{\pi D^2 h}$$

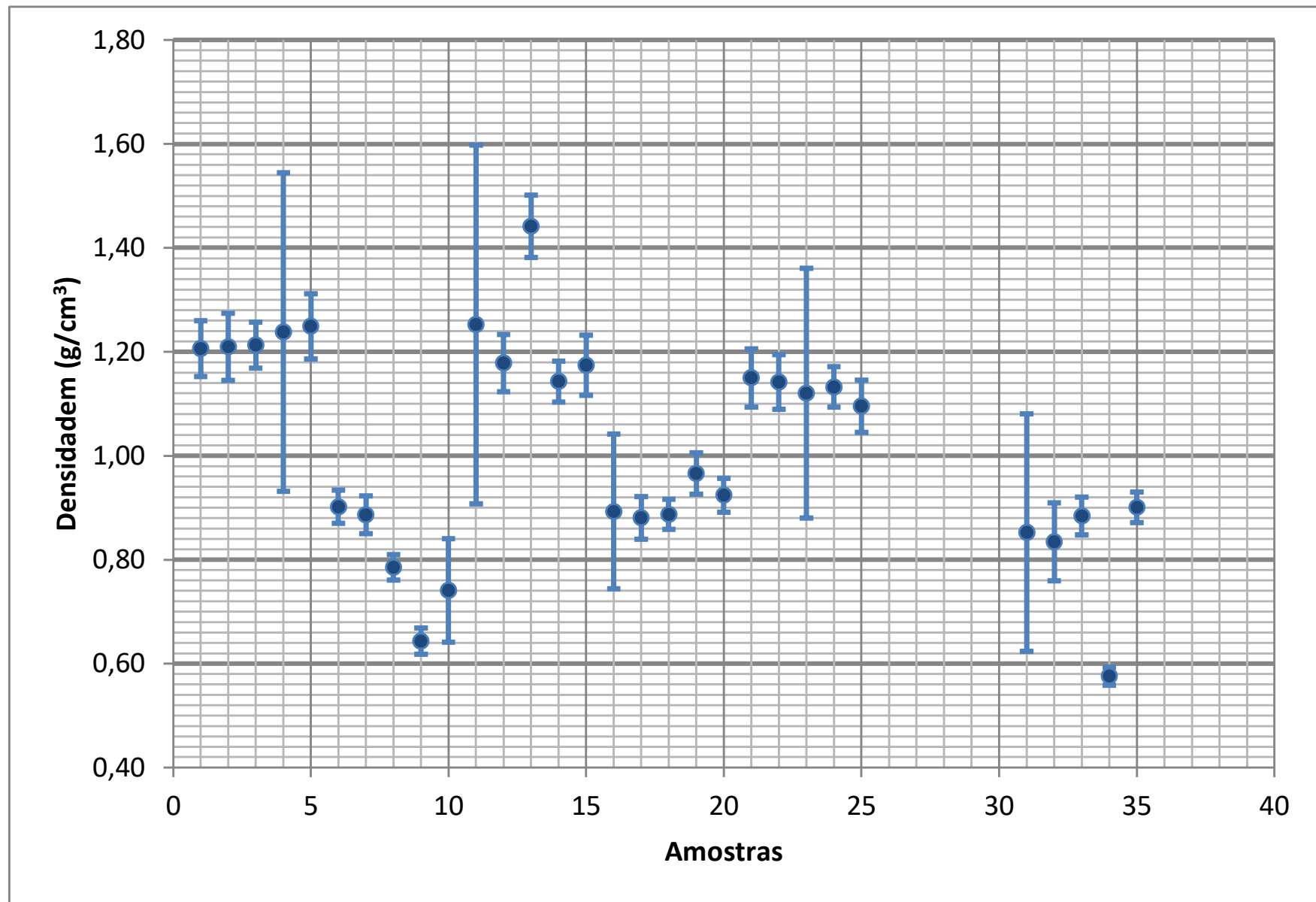
$$\rightarrow \frac{\partial d}{\partial D} = \frac{\partial}{\partial D} \left( \frac{4m}{\pi D^2 h} \right) = \frac{4m}{\pi h} \frac{\partial}{\partial D} \left( \frac{1}{D^2} \right) = \frac{4m}{\pi D^2 h} \left( -\frac{2}{D^3} \right) = -\frac{8m}{\pi h D^3}$$

$$\rightarrow \frac{\partial d}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{4m}{\pi D^2 h} \right) = \frac{4m}{\pi D^2} \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{1}{h} \right) = \frac{4m}{\pi D^2 h} \left( -\frac{1}{h^2} \right) = -\frac{4m}{\pi D^2 h^2}$$

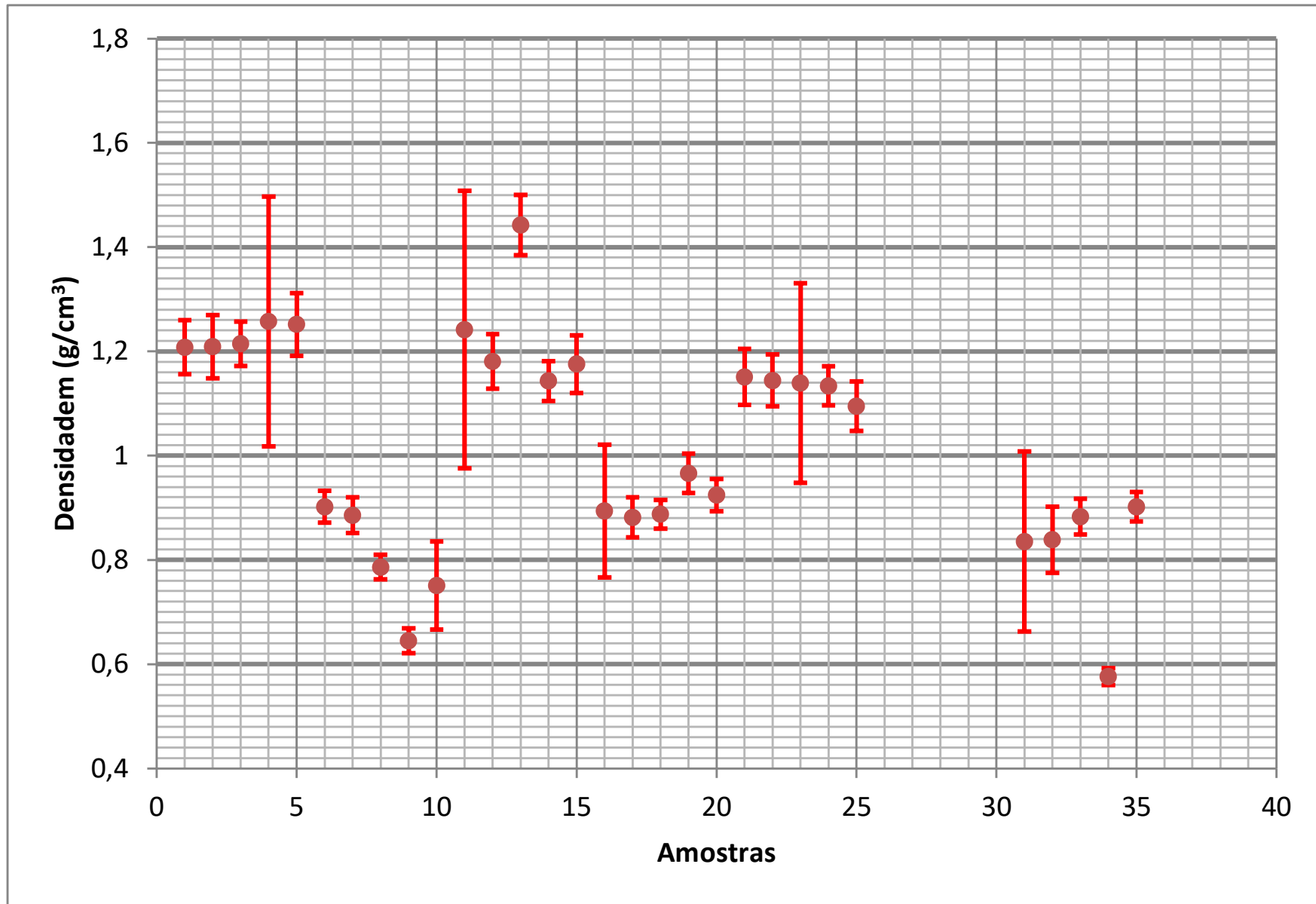
$$\therefore \sigma_d = \sqrt{\left( \frac{4}{\pi D^2 h} \sigma_m \right)^2 + \left( -\frac{8m}{\pi h D^3} \sigma_D \right)^2 + \left( -\frac{4m}{\pi D^2 h^2} \sigma_h \right)^2}$$

$$\frac{\sigma_d}{d} = \sqrt{\left( \frac{\sigma_m}{m} \right)^2 + \left( 2 \frac{\sigma_D}{D} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_h}{h} \right)^2}$$

# Dados aula passada – balança digital - T42



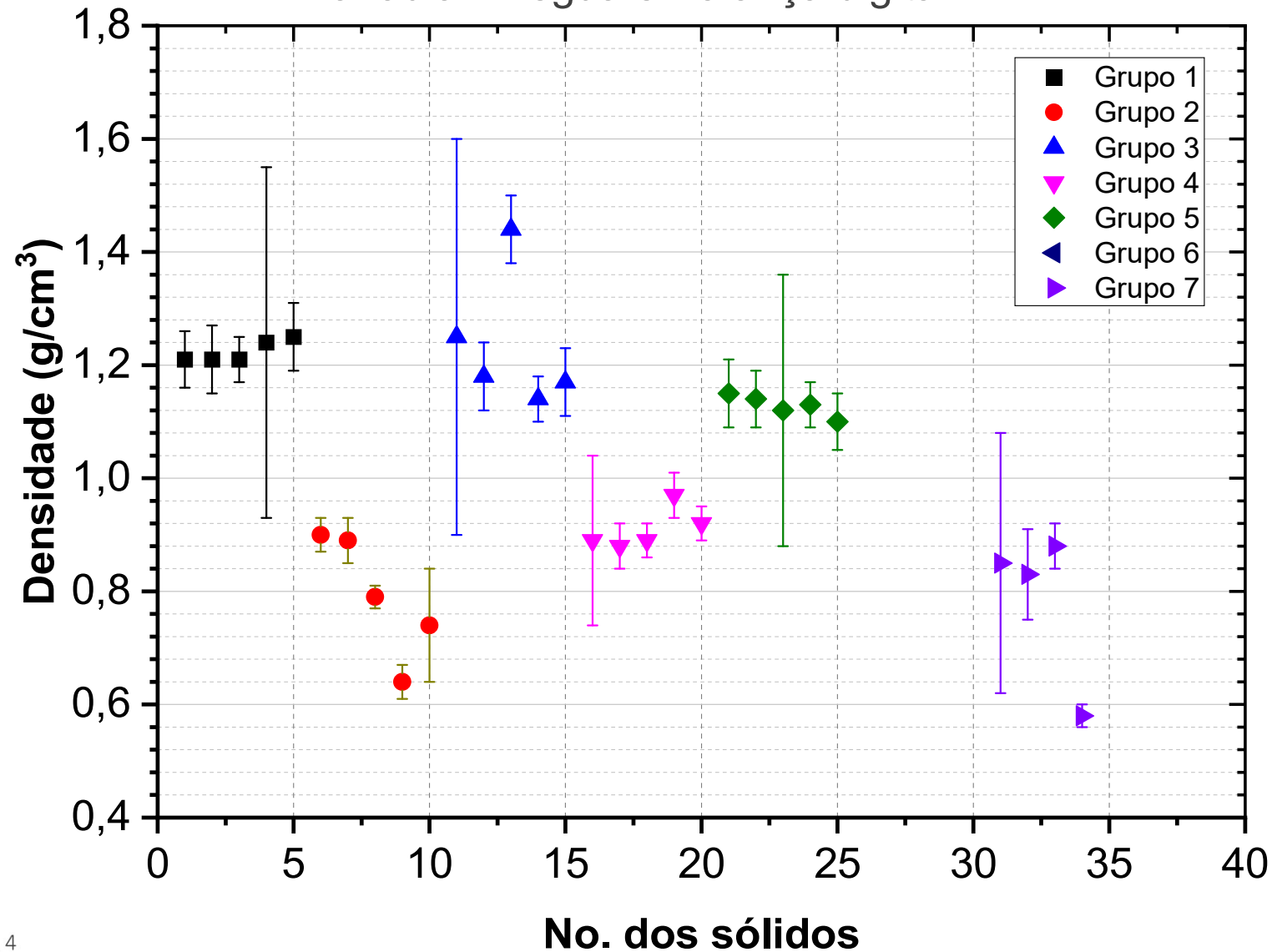
# Dados aula passada – balança analítica - T42



# Dados aula passada – balança digital T42

■ Poliamida (nylon)	$d = 1.09$ a $1.14 \text{ g/cm}^3$
■ Polietileno	$d = 0.941$ a $0.965 \text{ g/cm}^3$
■ Polipropileno	$d = 0.900$ a $0.915 \text{ g/cm}^3$
■ Acrílico	$d = 1.17$ a $1.20 \text{ g/cm}^3$
■ PVC	$d = 1.35$ a $1.45 \text{ g/cm}^3$

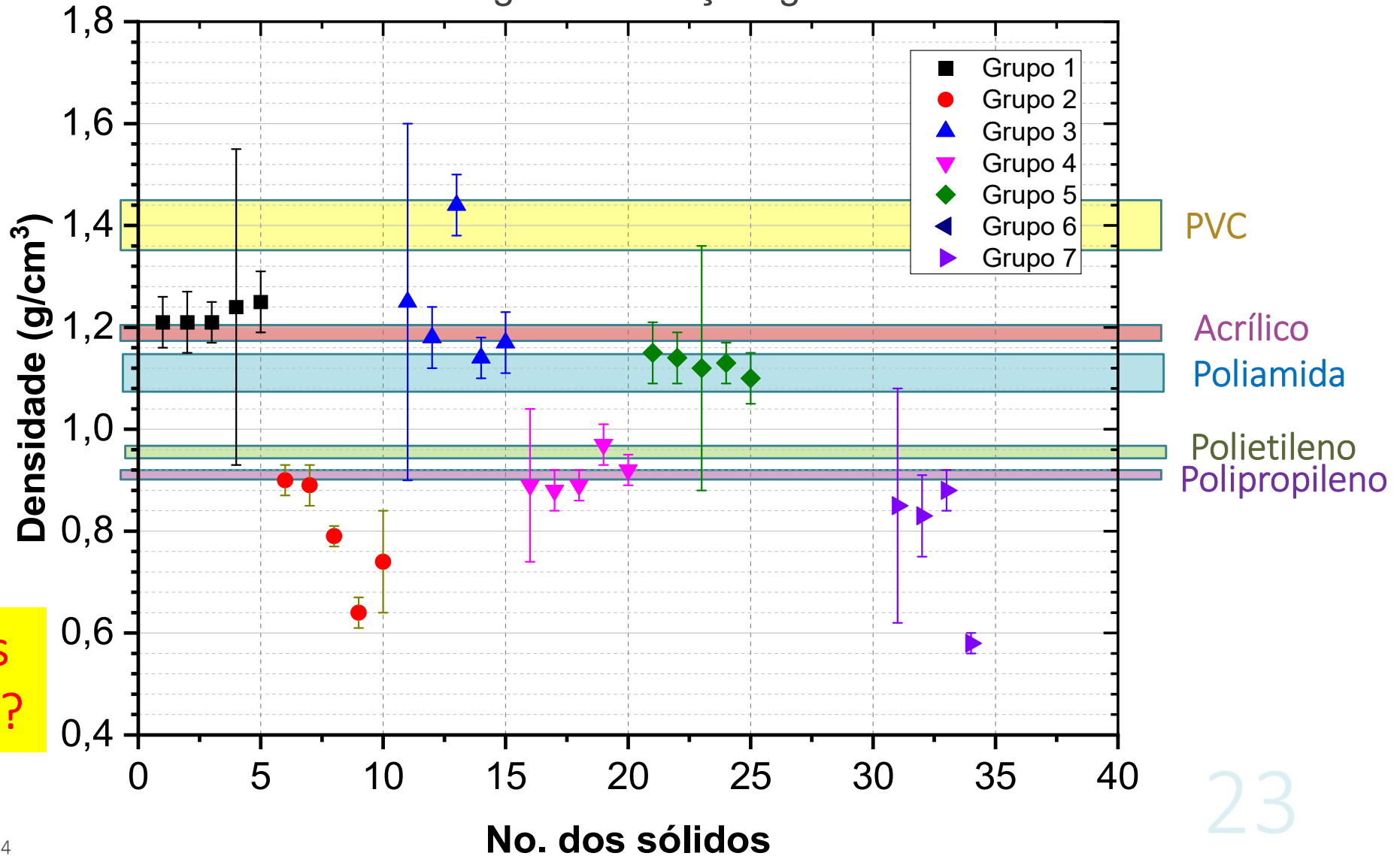
1a. aula - Régua e Balança digital - T42



# Dados aula passada – balança digital T42

● Poliamida (nylon)	$d = 1.09 \text{ a } 1.14 \text{ g/cm}^3$
● Polietileno	$d = 0.941 \text{ a } 0.965 \text{ g/cm}^3$
● Polipropileno	$d = 0.900 \text{ a } 0.915 \text{ g/cm}^3$
● Acrílico	$d = 1.17 \text{ a } 1.20 \text{ g/cm}^3$
● PVC	$d = 1.35 \text{ a } 1.45 \text{ g/cm}^3$

1a. aula - Régua e Balança digital - T42



Quantos plásticos?

---

# Conclusões Parciais

Quantos materiais poderíamos até agora identificar ?

Será que é possível que exista mais tipos de plástico do que aqueles identificados até o momento?

Como seria possível saber isso?

Melhorando a precisão do experimento, ou seja, diminuindo as incertezas nas densidades.

- ❖ ∴ Melhorar a medida de **massa** e ... ✓
- ❖ Melhorar a medida do **volume** dos cilindros.

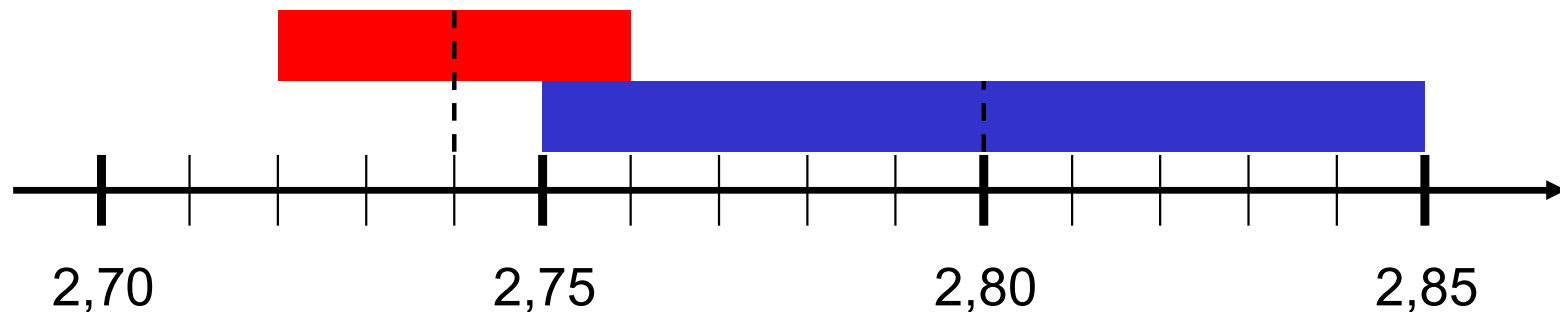


relembrando

# Como comparar os resultados de duas medidas?

- Levar em consideração sempre a incerteza de medida.
- Ao considerar a incerteza, nos perguntamos se as medidas são **compatíveis** ao invés de “iguais”;

Por exemplo,  $2,74 \pm 0,02 \text{ mm}$  é compatível com  $2,80 \pm 0,05 \text{ mm}$  ?



# Critério para compatibilidade - teste Z

distribuição normal;  
amostras com **N grande**, sem tendências

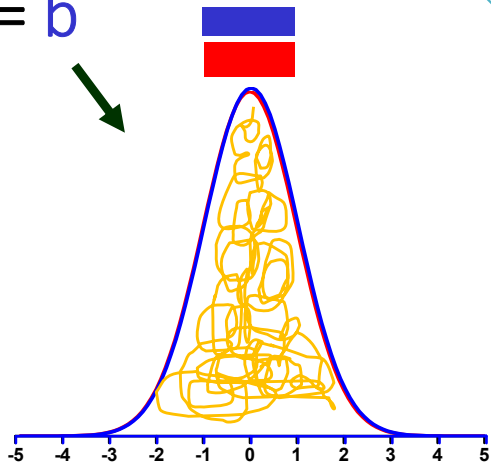
- Superposição em  $1\sigma$  = compatíveis
  - Superposição testada em intervalos mais largos  $2\sigma$  ou  $3\sigma$ : compatibilidade com menor probabilidade.
- Teste Z indica essa probabilidade
  - Ex.: Comparação entre  $(a \pm \sigma_a)$  e  $(b \pm \sigma_b)$

$$Z = \frac{|a - b|}{\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}}$$

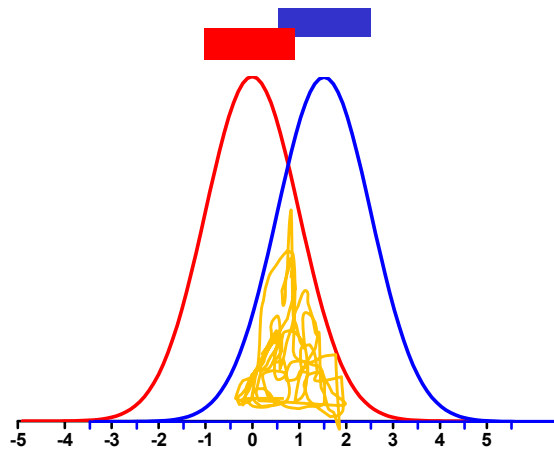
$0 < Z \leq 1$ , compatíveis dentro de  $1\sigma$   
 $1 < Z \leq 2$ , compatíveis dentro de  $2\sigma$   
 $2 < Z \leq 3$ , compatíveis dentro de  $3\sigma$   
 $Z > 3$ , discrepantes ou não compatíveis

# Compatibilidade

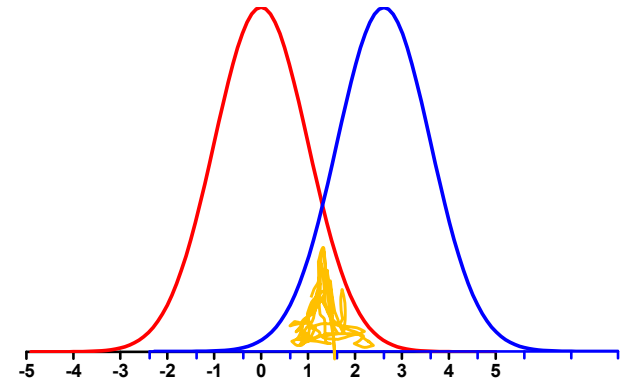
$a = b$



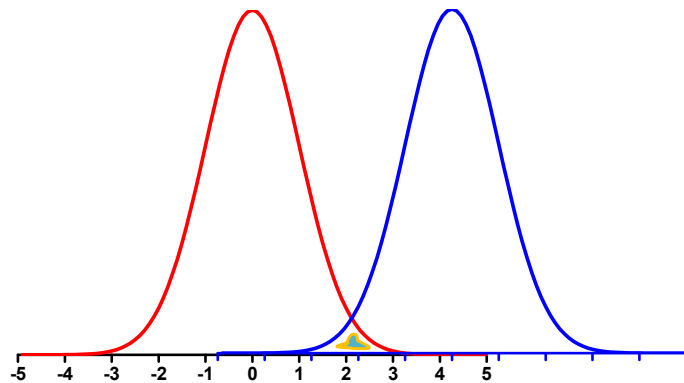
$Z = 0$



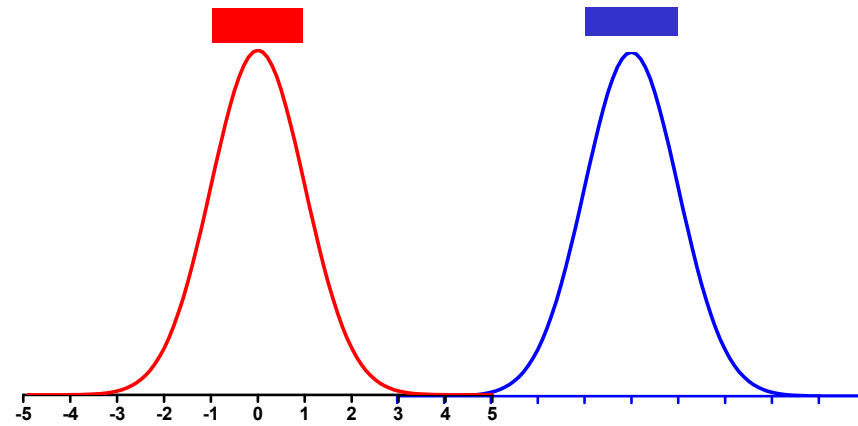
$Z = 1$



$Z = 2$



$Z = 3$



$Z > 3$

# Exercícios 2.2 – aula 4

**- DISCIPLINAS**  
Apoio às Disciplinas

Disciplinas » Suporte » Português - Brasil (pt\_br)

🔍 🔔 🗨️ Ricardo Andrade Terini

4300152 - Introdução às Medidas em Física (2023)

Início / Meus Ambientes / 2023 / IF / 430 / 4300152-2023 / Experimento # 2- Densidade de sólidos / Exercícios classe 2.2

questionário

ambiente

Exercícios classe 2.2

**Abre:** quinta, 13 abr 2023, 00:00  
**Fecha:** sábado, 15 abr 2023, 00:00

Método de avaliação: Nota mais alta

Pré-visualizar questionário agora

← Guia 2.2

Seguir para...

Exercícios casa 2.2 - Quinta a noite →

Ajuda e documentação

Você acessou como Ricardo Andrade Terini (Sair)


## Experiência II - 2

# Determinação da Densidade de Sólidos

- Objetivo
  - Identificar os diferentes tipos de plásticos que compõem um conjunto de objetos
- Identificação
  - Comparação das medidas (e incertezas) com valores tabelados de diferentes tipos de plásticos
- Densidade (materiais sólidos homogêneos)

$$d = m/V$$

*Necessário medir a massa e o volume do objeto*



Avançando no  
tratamento de  
incertezas

# Sequência de trabalho

## Novas medições

- Continuamos com os mesmos sólidos (**mesma caixa**) da aula passada.
- **Medindo dimensões**
  - Dimensões dos cilindros (altura e diâmetro) medidos agora com **paquímetro e micrômetro**.
  - Anotar nas tabelas. *Valores podem variar com posição* (irregularidade de altura ou diâmetro)...
- **Medindo as massas**
  - ✓ - Massas dos cilindros medidos com balança analítica da sala de técnicos do Lab. Didático ( $\pm 0,0001$  g)

# Sequência de trabalho

## Análise de dados

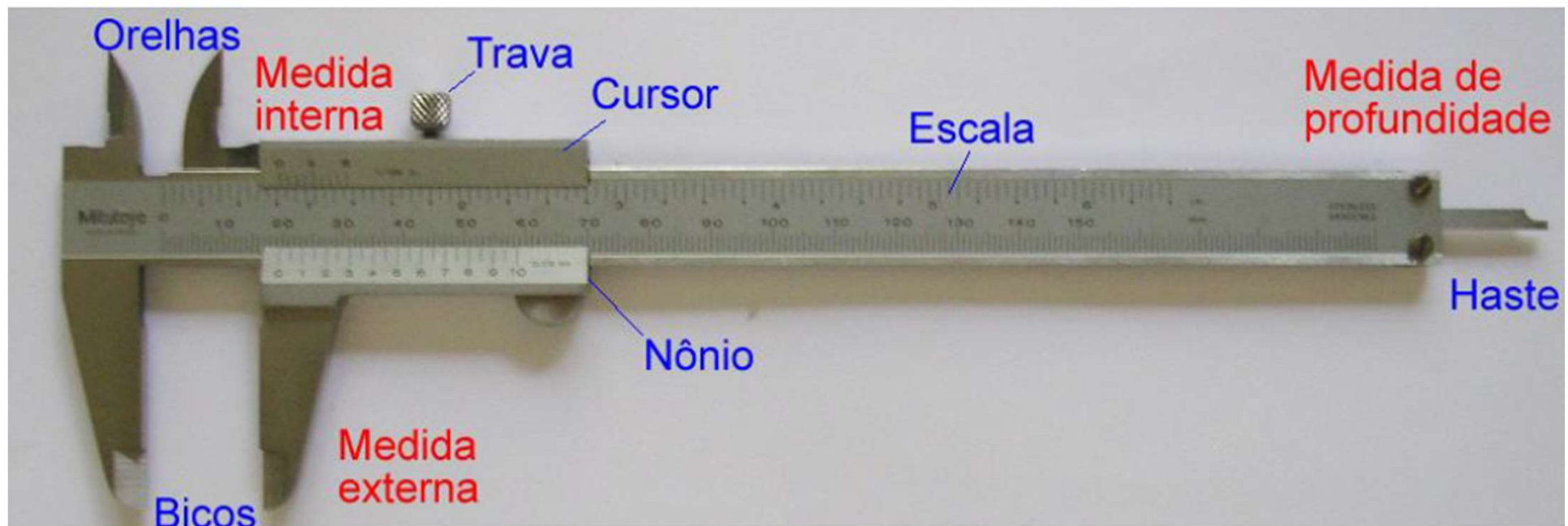
- Cálculo dos valores médios de  $D$  e  $h$  com incertezas (**erro padrão**)
- Cálculo das incertezas relativas das grandezas medidas ( $m$ ,  $h$ ,  $D$ ) – (*Tabela 3*)
- Calcular as **densidades dos sólidos** a partir de  $m$ ,  $h$  e  $D$ , com incertezas – (*Tabela 4*)
- Comparação de valores – intragrupo e intraclasse
- **Verificar Compatibilidade**
- Novo gráfico
- **Identificação do material dos cilindros.**

# Paquímetro

Instrumento para medir comprimento

Escala auxiliar (nônio ou vernier)

*Precisão de centésimos de mm*



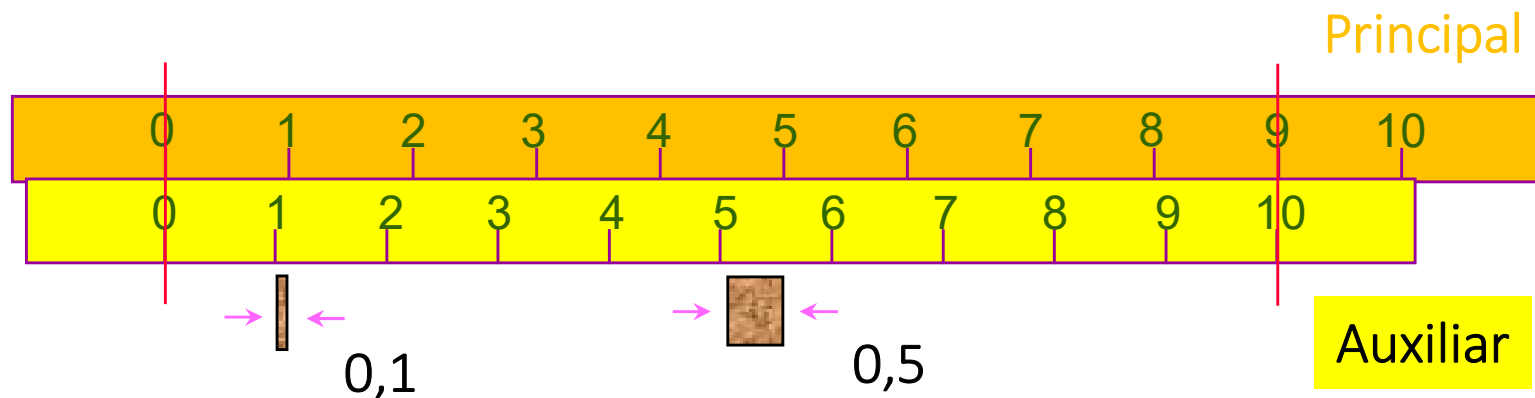


# Usando o Paquímetro

Vernier:  
20 aux = 19 princ.  
50 aux = 49 princ

## Nônio ou Vernier

Escala auxiliar para aumentar a precisão da medida

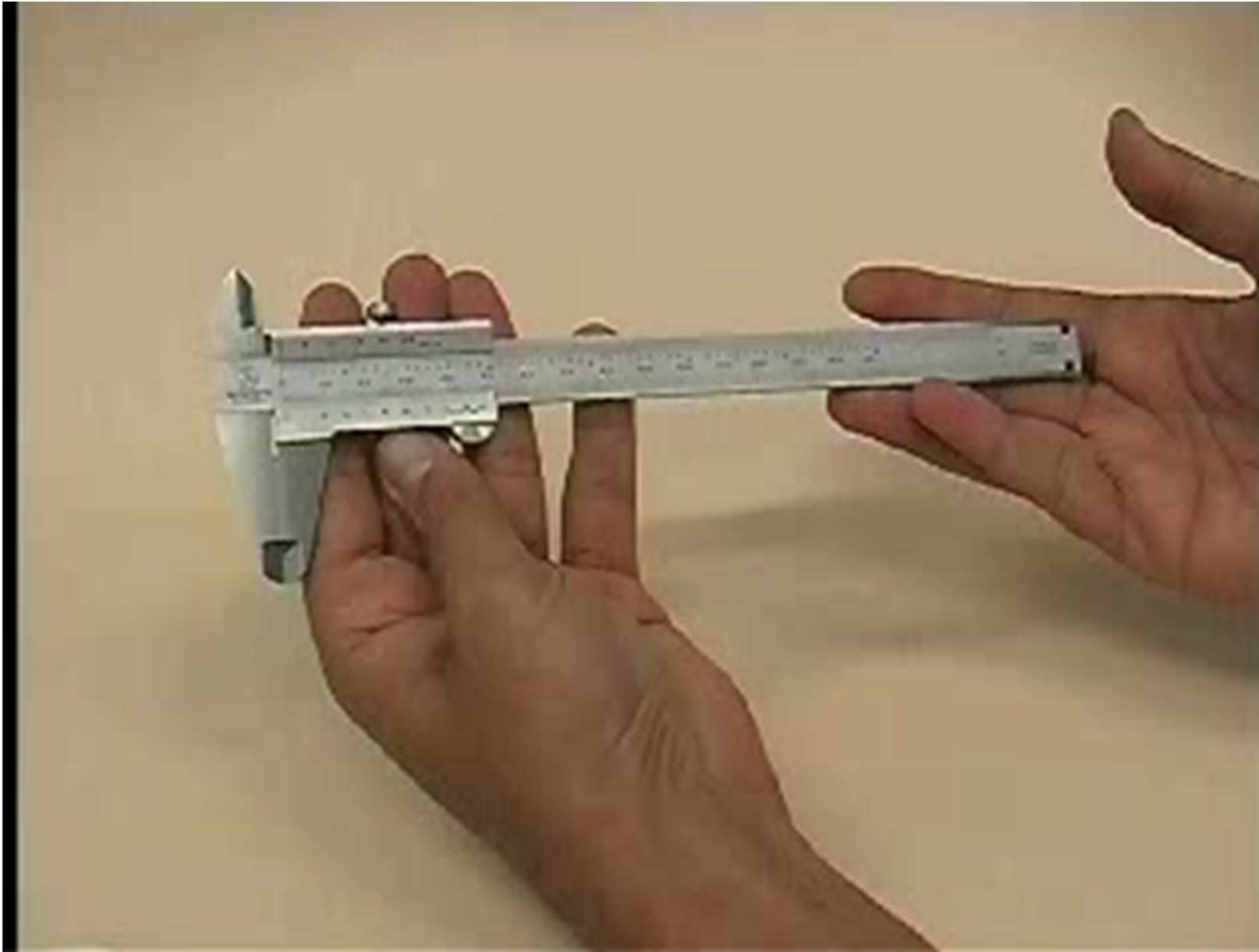


10 div escala auxiliar = 9 div escala principal

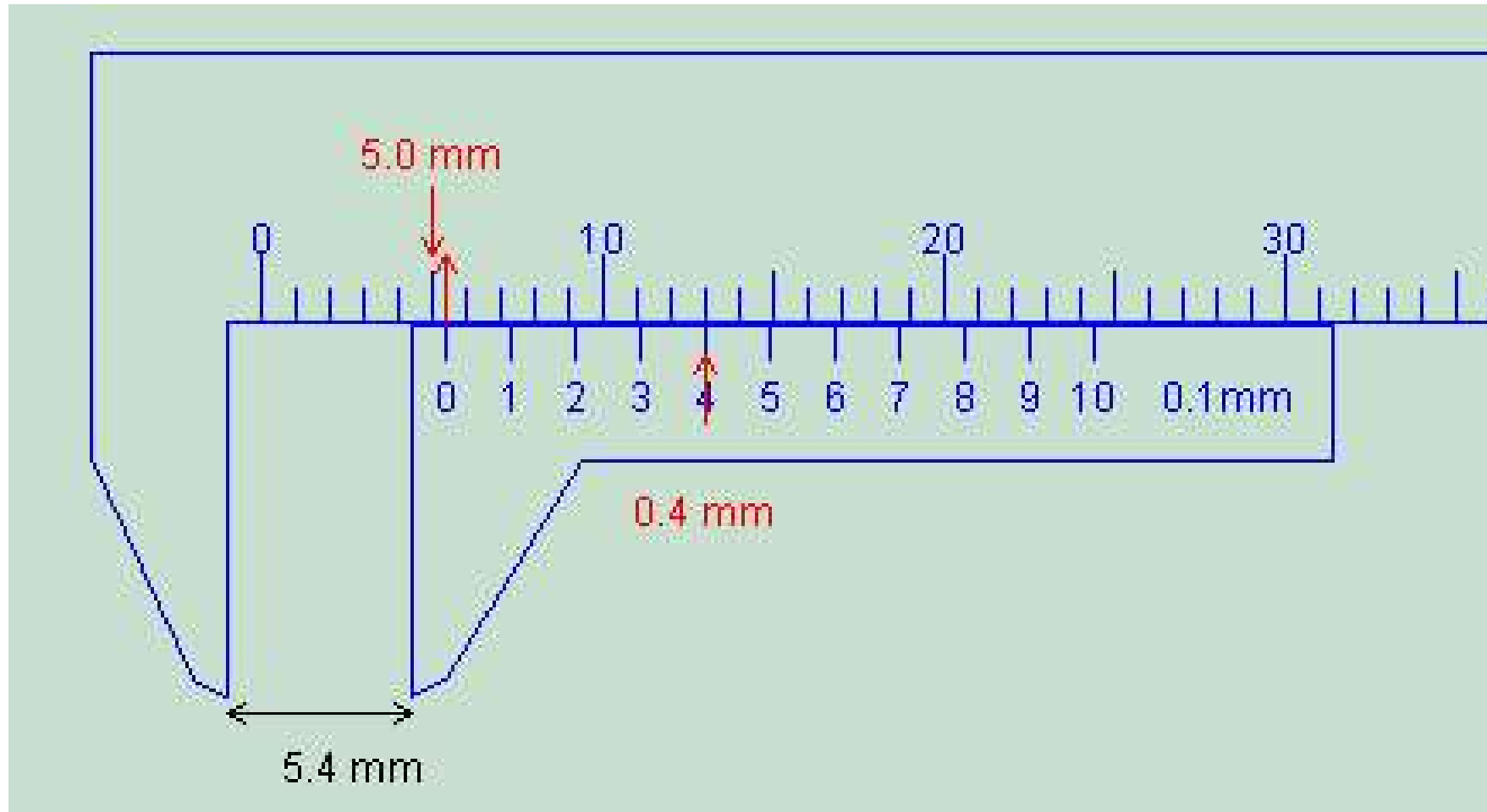
Precisão (nônio) = valor da menor divisão do nônio

$$\frac{\text{Valor da menor divisão - Principal}}{\text{Número de divisões - Auxiliar}} = \frac{1 \text{ div}}{10} = 0,1 \text{ div}$$

# Usando o paquímetro



# Leitura com o paquímetro – Ex.

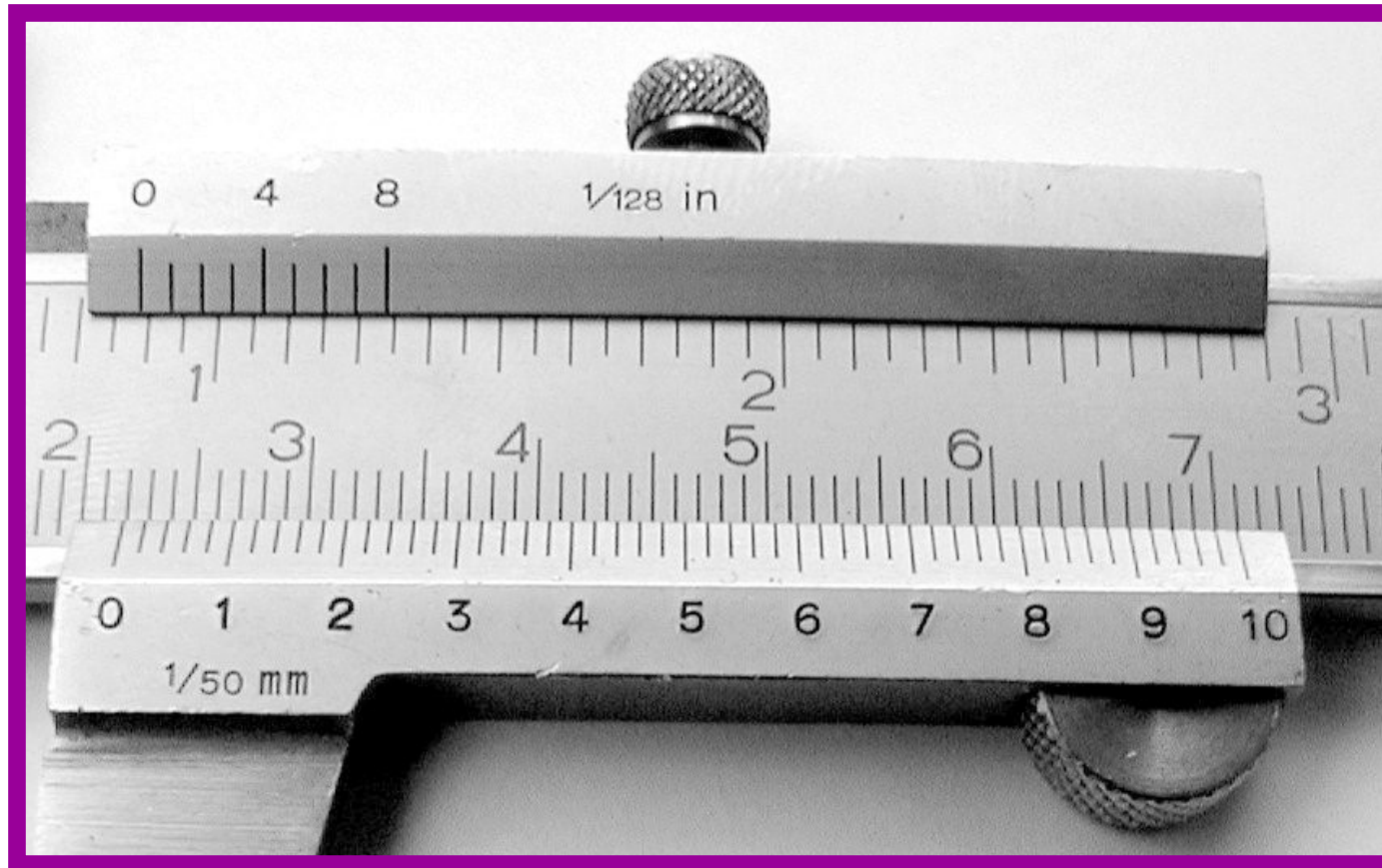


$$L = 5,0 \text{ (principal)} + 0,4 \text{ (nônio)}$$

$$L = 5,4 \text{ mm}$$

$$L = 5,4 \pm 0,1 \text{ mm}$$

# Leitura com paquímetro – Ex.

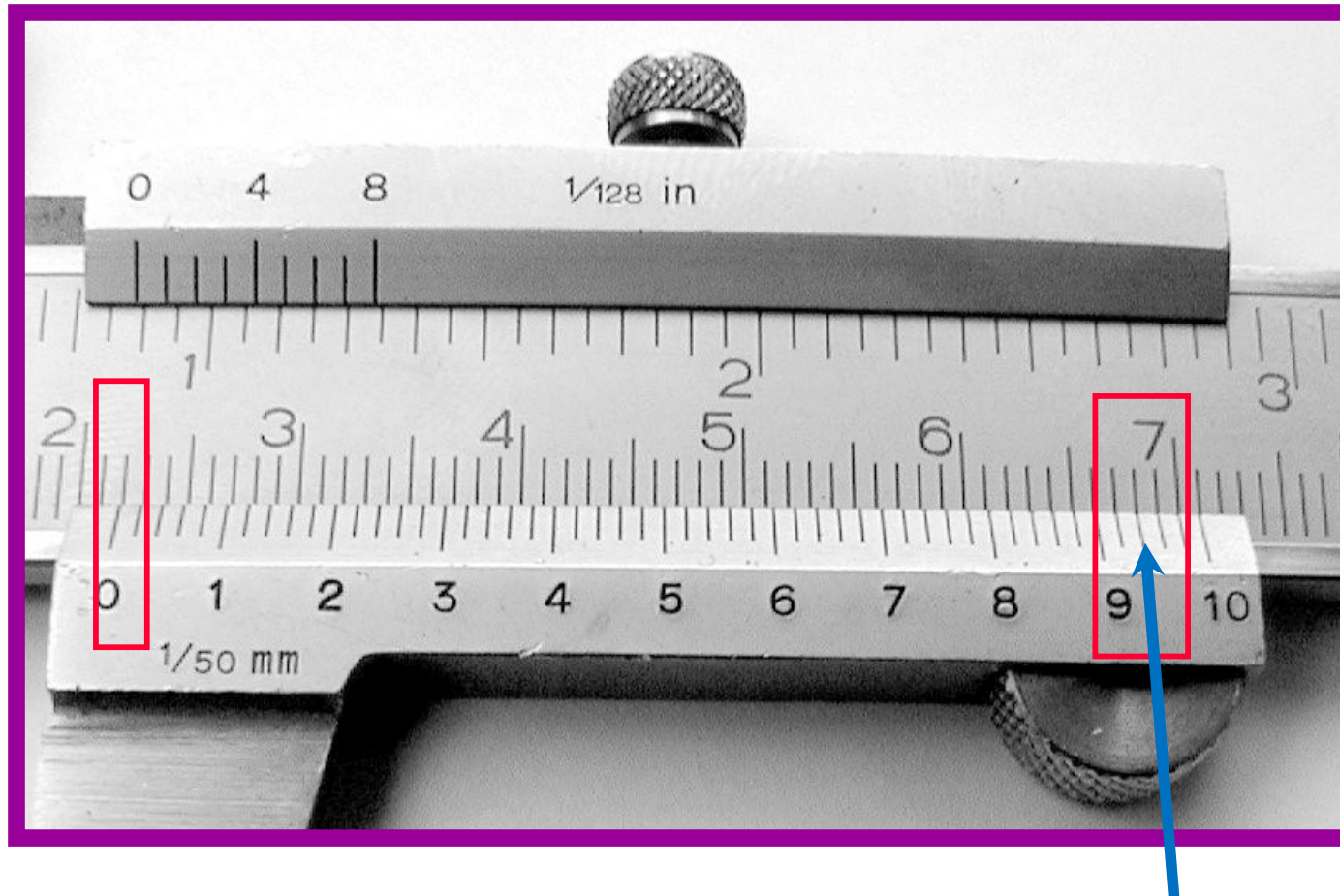


1) *Referência: Posição zero do nônio*

2) *Leitura: Número do traço da escala auxiliar que melhor coincidir com traço da escala principal*

36

# Leitura com paquímetro – Ex.



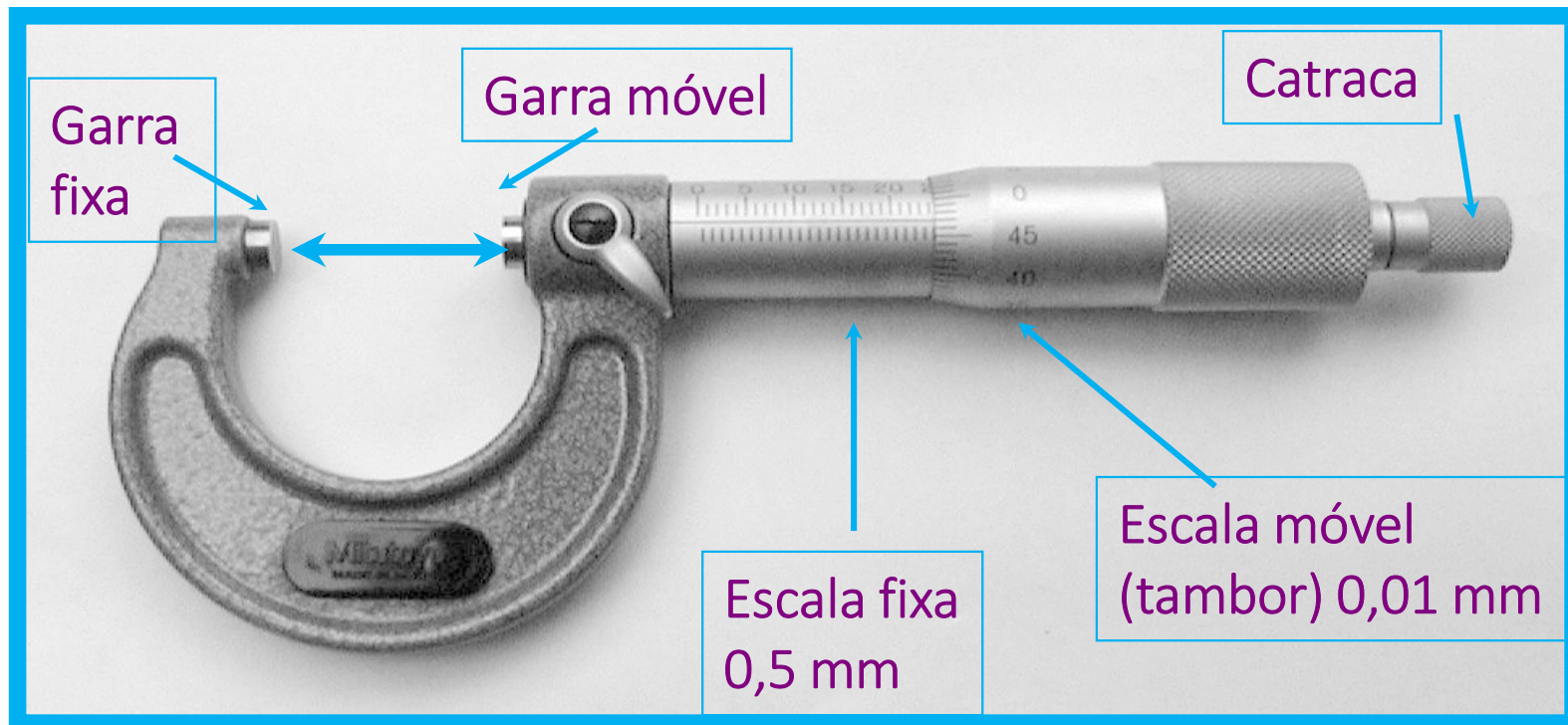
(Precisão 0,02 mm) Traço coincidente = 0,94 mm

**Leitura = 21,94 +/- 0,02 mm**

# Micrômetro

Instrumento para medir pequenos comprimentos

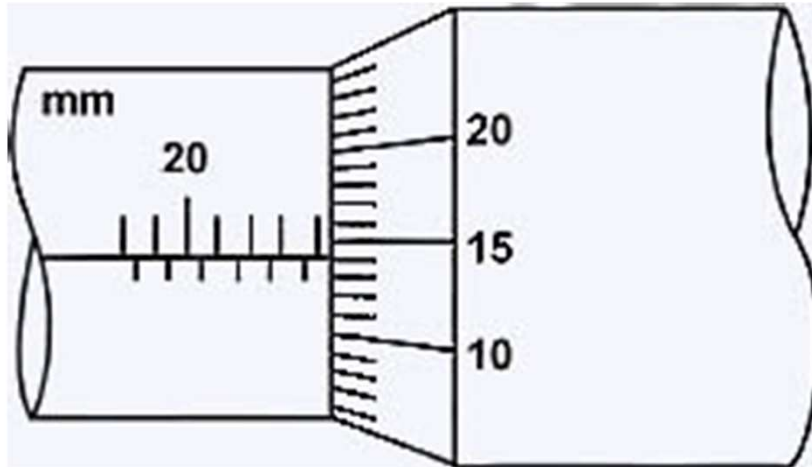
- Precisão de centesimo de mm



# Usando o micrômetro



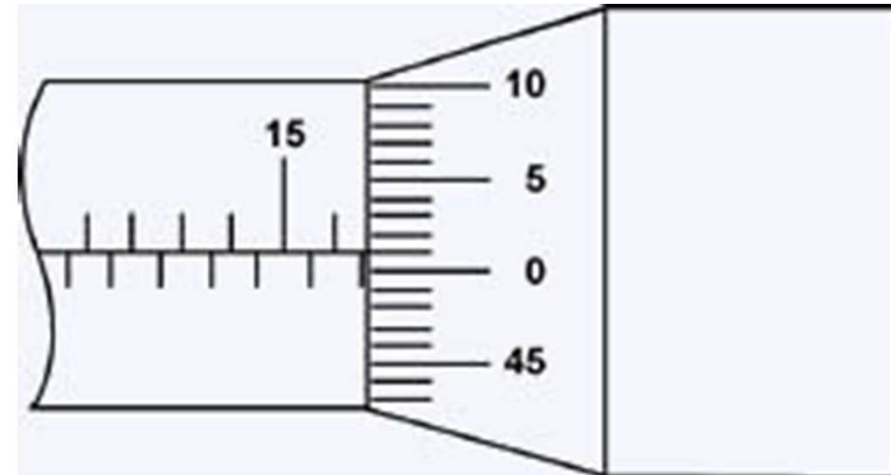
# Leitura com o micrômetro – Ex.



$$L = 24,0 \text{ (principal)} + 0,14 \text{ (tambor)} + 0,001 \text{ (estimativa)}$$

$$L = 24,141 \text{ mm}$$

$$L = 24,141 \pm 0,005 \text{ mm}$$

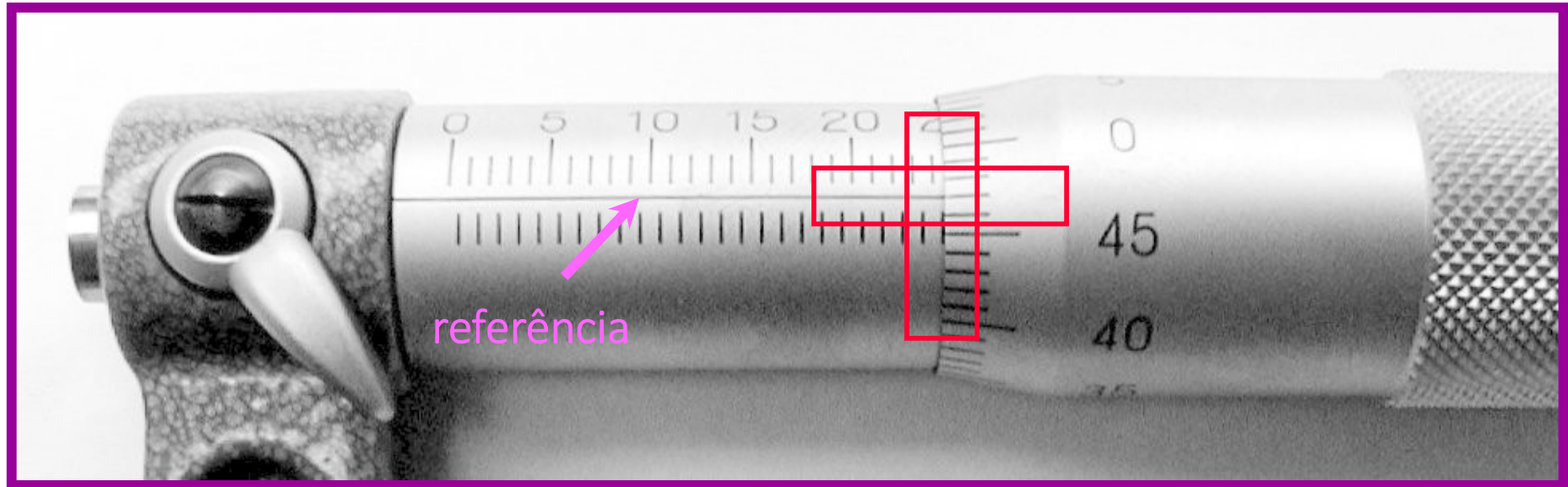


$$L = 16,5 \text{ (principal)} + 0,01 \text{ (tambor)} + 0,000 \text{ (estimativa)}$$

$$L = 16,510 \pm 0,005 \text{ mm}$$



# Leitura com micrômetro – Ex.



1) Posição da escala móvel (passos de 0,5 mm)      24,0 mm

2) Posição da escala fixa (referência)

$$46,9 \text{ traços} \times \left( \frac{0,5 \text{ mm}}{50 \text{ traços}} \right) = 0,469 \text{ mm}$$

0,01

$$\text{Leitura} = ( 24,469 \pm 0,005 ) \text{ mm}$$

# Paquímetro e micrômetro

Paquímetro com nônio em 0,05 mm

<http://www.stefanelli.eng.br/paquimetro-virtual-simulador-milimetro-05/>

Paquímetro com nônio em 0,02 mm

<http://www.stefanelli.eng.br/paquimetro-virtual-simulador-milimetro-02/> (nônio em 0,02 mm)

Micrômetro

<http://www.stefanelli.eng.br/micrometro-virtual-milimetro-centesimal-simulador/>

# Aula de hoje – Tabela 4

## Preenchimento dos dados em planilha

- Poliamida (nylon)  $d = 1.09$  a  $1.14 \text{ g/cm}^3$
- Polietileno  $d = 0.941$  a  $0.965 \text{ g/cm}^3$
- Polipropileno  $d = 0.900$  a  $0.915 \text{ g/cm}^3$
- Acrílico  $d = 1.17$  a  $1.20 \text{ g/cm}^3$
- PVC  $d = 1.35$  a  $1.45 \text{ g/cm}^3$

---

# Para a próxima aula (28/04):

- Entrega do Guia 2.2 (**um por grupo**)
- No *Moodle* (aba Experimento # 2- Densidade de sólidos):
  - Exercício **individual** (até dia 28/04).
- **Apostila do curso** (texto, página principal do moodle):
  - Experiência III (Aula 05 - Distância Focal De Uma Lente)