

Introdução às Medidas em Física

4300152

4^a Aula (14/04/2023)

Licenciatura IME – Turma 42

Ricardo Andrade Terini

rterini@if.usp.br

Bloco F – Conjunto Alessandro Volta – sl. 105

Agradecimentos aos profs. Nemitala Added e Elisabeth M. Yoshimura por cederem as apresentações que serviram de base para esta.

Experiência II - 2

Densidade de Sólidos

- Resumo dos principais pontos da aula anterior

- **Conceitos:**

Instrumentos de medida

Paquímetro e Micrômetro

Noções de estatística:

Propagação de Incertezas

Compatibilidade entre medidas



Avançando no
tratamento de
incertezas

- **Experiência 2.2: Densidade de Sólidos**

- Realizar medidas de dimensões de diferentes objetos com paquímetro e micrômetro.

- Identificar os tipos de plásticos através da comparação de valores de densidade (+incertezas) com valores tabelados.

Referências para a aula de hoje:

- [Apostila do curso](#) (página principal do *Moodle*):
 - Capítulo 3: Instrumentos de Medidas
 - Experiência II (Aulas 03 e 04): Densidade de Sólidos.
- [Conceitos Básicos da Teoria de Erros](#) (texto, aba Material Didático / arquivos 2023)
 - Capítulo 2: Propagação de Erros e Incertezas

relembrando

Como avaliar a incerteza de uma medida

Tipos de incerteza

- **Instrumental**

*Aquela associada à **precisão do instrumento** utilizado para realizar a medida direta de uma grandeza*

- **Estatística**

*Incerteza associada à **flutuação no resultado** de uma mesma medida*

- **Sistemática** (erro sistemático)

Aquela onde a medida é desviada em uma única direção, tornando os resultados viciados.

Devem ser corrigidas!

relembrando

Medidas, Incertezas e ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS

- **Algarismos Significativos:** Algarismos *certos* (lidos) + 1 algarismo *duvidoso* (incerto, estimado) (trazem significado ao resultado de uma medida)
- **Medida direta – incerteza instrumental:**
 - ❖ *Conjunto de algarismos significativos avaliados na medição \pm incerteza (instrumento analógico / digital).*
- **Medida direta – incertezas estatísticas:**

Erro padrão, média e incerteza são calculados e escritos com:

 - ❖ *somente 1 alg. duvidoso na média e somente 1 alg. significativo na incerteza ($média \pm incerteza$)*
 - ❖ *o mesmo número de casas decimais*

Como avaliar (*obter*) incertezas

- **Incertezas:** expressas com **1 alg. significativo** (em geral)
- **Medida direta – incerteza instrumental:**
 - verificar **resolução** do instrumento
 - avaliar a **incerteza** nas condições de medida
- ❖ *Condição ideal – metade da menor divisão da escala analógica OU o menor valor mensurável em escalas digitais (ou ainda indicação do manual).*



- ❖ *A incerteza instrumental pode, cf. as condições da medição, ser **maior do que a precisão** do instrumento de medida.*

Como avaliar as incertezas

- **Medida direta – incertezas estatísticas:**
 - avaliar a **incerteza** por repetição da medida
 - ❖ *Obter **média e desvio padrão** (dispersão de medidas em torno da média)*
 - ❖ *Calcular o **desvio padrão da média** – essa é a **incerteza estatística da média***

Calcular a *incerteza final da média*, ou **erro padrão** (*incerteza combinada*, composição quadrática das incertezas instrumental e estatística) :

$$\sigma_{L_{final}} = \sqrt{\sigma_{L_{instr}}^2 + \sigma_{L_{método}}^2} = \sqrt{\sigma_{L_{instr}}^2 + \sigma_{L_{estatístico}}^2}$$

Como anotar o resultado

Tirado dos guias 1.2 – outras turmas...

| Média (s) | Incerteza da média (s) | Média \pm incerteza (s) | CORRETO?? |
|-----------|------------------------|----------------------------------|-----------|
| 25,12 | 0,05289 | 25,12 \pm 0,05 | |
| 24,85 | 5 . 10 ⁻² | 24,85 \pm 5 . 10 ⁻² | |
| 24,81 | 0,05 | 24,81 \pm 0,05 | |
| 24,862 | 0,05863 | 24,86 \pm 0,06 | |
| 25,13 | 0,04 | 25,13 \pm 0,01 | |
| 25,01 | 0,115 | 25,01 \pm 0,11 | |
| 2,519 | 0,05 | 2,519 \pm 0,05 | |
| 25,13 | 0,01 | 25,13 \pm 0,01 | |

Na aula passada

Como avaliar (*estimar*) incertezas

- **Medida INdireta - PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS:**

- ❖ **Uma variável** – incerteza é transferida (propagada) para a grandeza calculada; em *1ª. aproximação*:

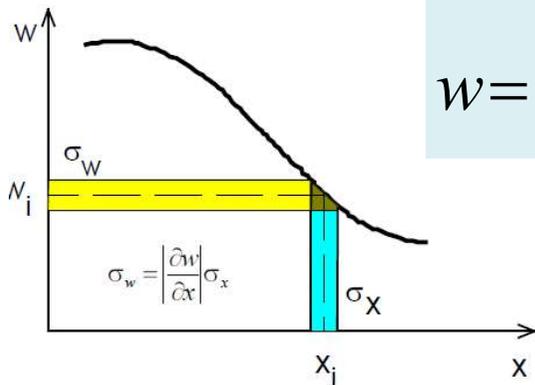
$$x \pm \sigma_x$$

$$w = w(x) \Rightarrow \sigma_w = \frac{1}{2} |w(x + \sigma_x) - w(x - \sigma_x)|$$

- ❖ **Várias variáveis** – incerteza total, em *1ª. aproximação* (exagerada):

$$x \pm \sigma_x; y \pm \sigma_y$$

$$w = w(x, y) \Rightarrow \sigma_{wx} = \frac{1}{2} |w(x + \sigma_x, y + / - \sigma_y) - w(x - \sigma_x, y + / - \sigma_y)|$$



o que maximizar w

o que minimizar w

Como determinar incertezas

Medida INdireta - PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS:

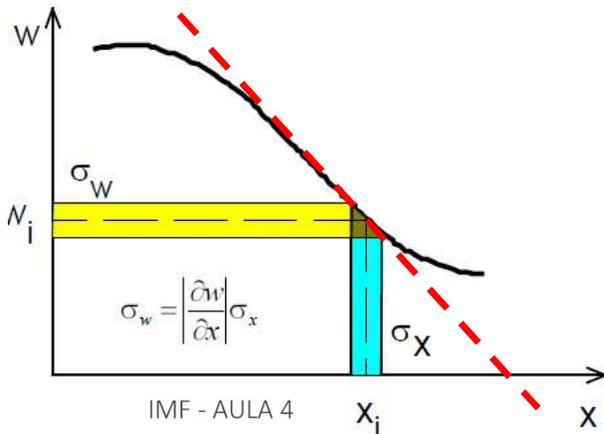
- ❖ **Uma variável** – Incerteza transferida (propagada) para a grandeza calculada \equiv DERIVADA em relação à variável de medida direta, multiplicada pela sua incerteza:

Derivada = coef. angular da reta tangente à curva
 $w = w(x)$

$$x \pm \sigma_x$$

$$w = w(x) \Rightarrow \sigma_w = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \cdot \sigma_x$$

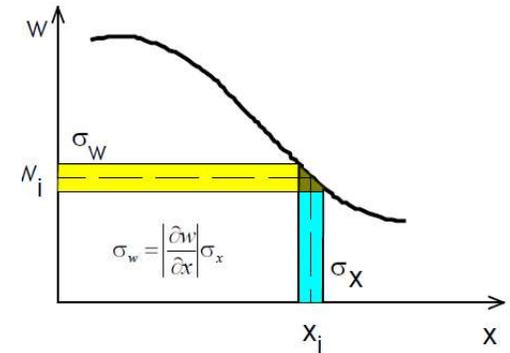
- ❖ **Várias variáveis** – incerteza total é soma quadrática das contribuições de cada variável (p/ independentes):



$w = w(x, y, \dots); \dots x \pm \sigma_x; y \pm \sigma_y$ etc. Independentes

$$\sigma_w = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x} \sigma_x \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \sigma_y \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \sigma_z \right)^2 + \dots}$$

Propagação de incertezas: resultados - incertezas relativas



- Se a dependência da variável é por **MULTIPLICAÇÃO** ou **DIVISÃO**, é fácil deduzir como as incertezas relativas se propagam:

Multiplicação e divisão : $w = k \frac{x}{y} \cdot z$, etc

Incerteza relativa de w

$$\sigma_w = w \cdot \frac{\sigma_w}{w} = w \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_z}{z}\right)^2 + \dots}$$

- Para o caso de **divisões/multiplicações com POTÊNCIAS**:

Multiplicação, divisão, potência : $w = k \frac{x^m}{y^n} \cdot z$, etc

$$\sigma_w = w \cdot \frac{\sigma_w}{w} = w \cdot \sqrt{\left(m \frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(n \frac{\sigma_y}{y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_z}{z}\right)^2 + \dots}$$

Propagação de incertezas:

Experiência II - Densidade de Sólidos

A densidade é dada por:

$$d = \frac{m}{V}$$

onde, o volume V é:

$$V = \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot h = \pi \cdot \frac{D^2}{4} \cdot h$$

e m , h e D são, respectivamente, a massa, a altura e o diâmetro do cilindro **medidos diretamente**:

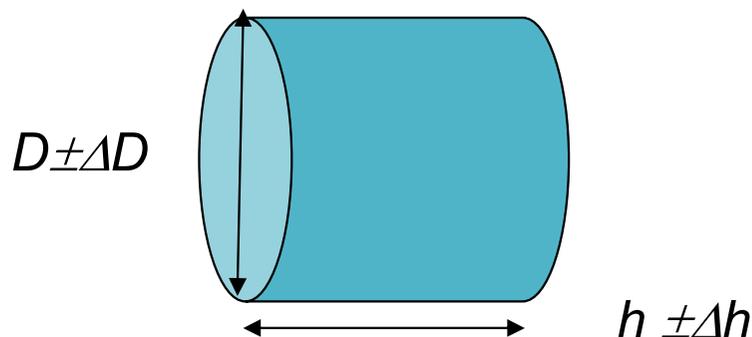
$$m \bar{\mp} \sigma_m ; D \bar{\mp} \sigma_D ; h \bar{\mp} \sigma_h$$

Propagação de incertezas:

Experiência II - Densidade de Sólidos

- Para o cálculo da incerteza do volume do cilindro (σ_V) combinamos as duas **incertezas** ($\sigma_{V(h)}$ e $\sigma_{V(D)}$) por meio de uma *soma quadrática*.
- Fazemos isso assumindo que a incerteza devido ao diâmetro é independente da incerteza devido à altura:

$$\Delta V^2 = (\Delta V_{\text{devido a } \Delta D})^2 + (\Delta V_{\text{devido a } \Delta h})^2$$



$$\therefore \sigma_V = \sqrt{\sigma_{V(h)}^2 + \sigma_{V(D)}^2}$$

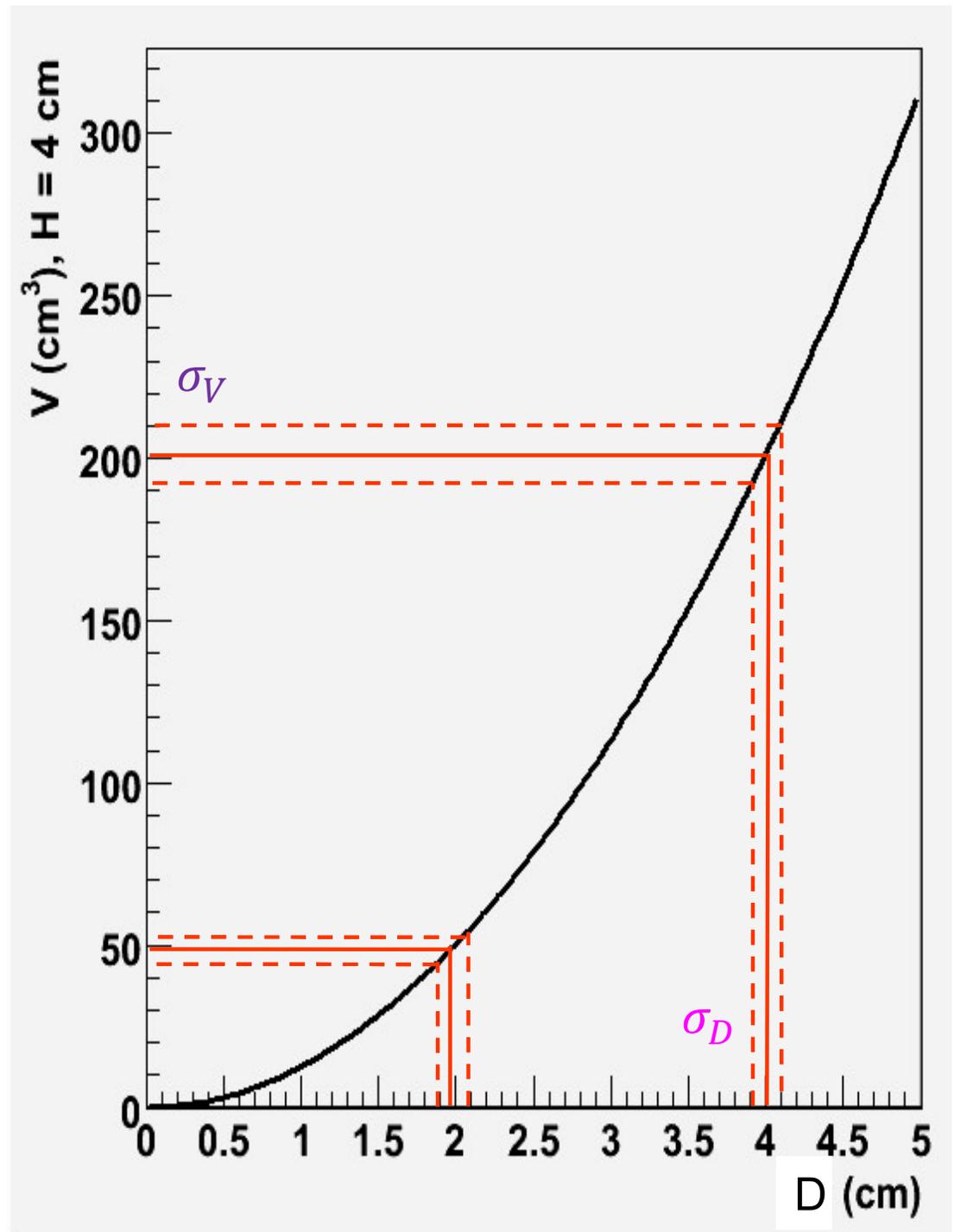
Propagação de incertezas

Partindo da dependência do volume de um cilindro com o diâmetro:

$$V = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 h$$

Esta fórmula é razoável?

$$\sigma_{V(D)} = \frac{\partial V}{\partial D} \sigma_D$$



Propagação de incertezas:

Experiência II - Densidade de Sólidos

Como calcular as derivadas

Suponha que todo o resto da expressão é uma constante:

$$\frac{\partial V}{\partial D} = \frac{\partial}{\partial D} \left(\frac{\pi}{4} D^2 h \right) = \frac{\pi}{4} h \frac{\partial(D^2)}{\partial D} = \frac{\pi}{4} h (2D) = \frac{\pi}{2} h D$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{\pi}{4} D^2 h \right) = \frac{\pi}{4} D^2 \frac{\partial(h)}{\partial h} = \frac{\pi}{4} D^2 (1) = \frac{\pi}{4} D^2$$

Propagação de incertezas:

Experiência II - Densidade de Sólidos

Volume

Como calcular cada derivada:

Suponha que todo o resto da expressão é uma constante....

$$V = \frac{\pi}{4} (D)^2 h$$

$$h \pm \sigma_h; D \pm \sigma_D; \quad V = \frac{\pi}{4} (D)^2 h$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi}{4} (D)^2 \Rightarrow \sigma_{V_h} = \left| \frac{\pi}{4} (D)^2 \sigma_h \right|$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial D} = \frac{\pi}{4} 2(D)^1 h \Rightarrow \sigma_{V_D} = \left| \frac{\pi}{4} 2(D)h \sigma_D \right|$$

Propagação de incertezas: Experiência II - Densidade de Sólidos

Volume

$$V = \frac{\pi}{4} (D)^2 h$$

Incerteza
relativas

$$\sigma_V = \sqrt{(\sigma_{V_h})^2 + (\sigma_{V_D})^2}$$

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4} (D)^2 \sigma_h\right)^2 + \left(\frac{\pi}{4} 2(D)h\sigma_D\right)^2}$$

$$\text{ou} \Rightarrow \frac{\sigma_V}{V} = \sqrt{\frac{1}{V^2} \left(\frac{\pi}{4} (D)^2 \sigma_h\right)^2 + \frac{1}{V^2} \left(\frac{\pi}{4} 2(D)h\sigma_D\right)^2}$$

$$\frac{\sigma_V}{V} = \sqrt{\frac{16}{\pi^2 D^4 h^2} \left(\frac{\pi}{4} (D)^2 \sigma_h\right)^2 + \frac{16}{\pi^2 D^4 h^2} \left(\frac{\pi}{4} 2(D)h\sigma_D\right)^2}$$

$$\frac{\sigma_V}{V} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_D}{D}\right)^2} \quad \text{ou} \quad \sigma_V = V \sqrt{\left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_D}{D}\right)^2}$$

Propagação de incertezas:

Experiência II - Densidade de Sólidos

Assim, para a densidade

$$d = \frac{m}{V} = \frac{4m}{\pi D^2 h}$$

...a propagação pode ser feita via
incertezas relativas:

$$\frac{\sigma_d}{d} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\sigma_d}{d} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2}$$

Cálculo direto da incerteza da densidade

$$d = \frac{m}{V} = \frac{4m}{\pi D^2 h}$$

$$\sigma_d = \sqrt{(\sigma_d^m)^2 + (\sigma_d^D)^2 + (\sigma_d^h)^2}$$

$$\sigma_d = \sqrt{\left(\frac{\partial d}{\partial m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial D}\right)^2 \sigma_D^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial h}\right)^2 \sigma_h^2}$$

$$\rightarrow \frac{\partial d}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{4m}{\pi D^2 h} \right) = \frac{4}{\pi D^2 h} \frac{\partial(m)}{\partial m} = \frac{4}{\pi D^2 h} (1) = \frac{4}{\pi D^2 h}$$

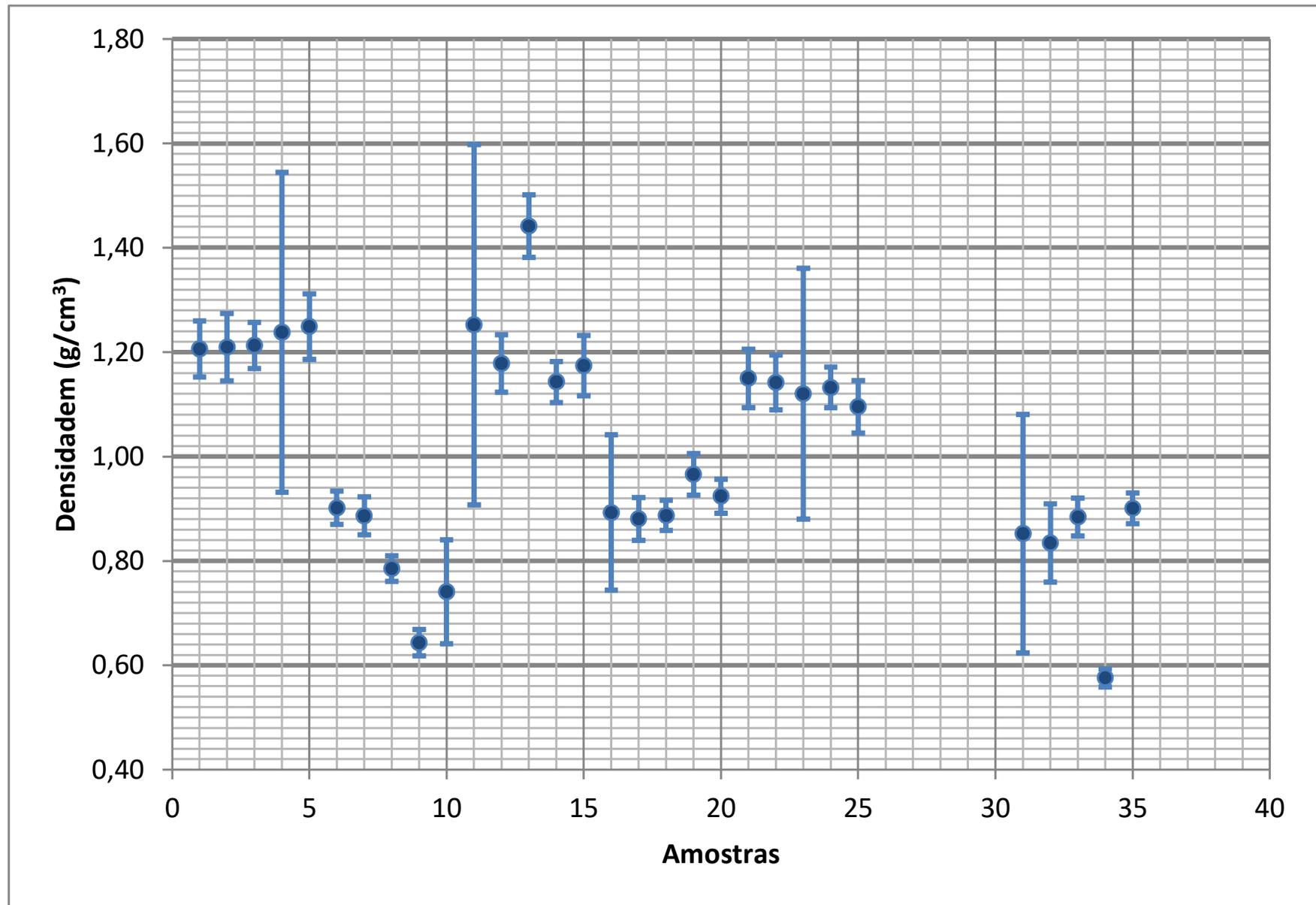
$$\rightarrow \frac{\partial d}{\partial D} = \frac{\partial}{\partial D} \left(\frac{4m}{\pi D^2 h} \right) = \frac{4m}{\pi h} \frac{\partial}{\partial D} \left(\frac{1}{D^2} \right) = \frac{4m}{\pi D^2 h} \left(-\frac{2}{D^3} \right) = -\frac{8m}{\pi h D^3}$$

$$\rightarrow \frac{\partial d}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{4m}{\pi D^2 h} \right) = \frac{4m}{\pi D^2} \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{1}{h} \right) = \frac{4m}{\pi D^2 h} \left(-\frac{1}{h^2} \right) = -\frac{4m}{\pi D^2 h^2}$$

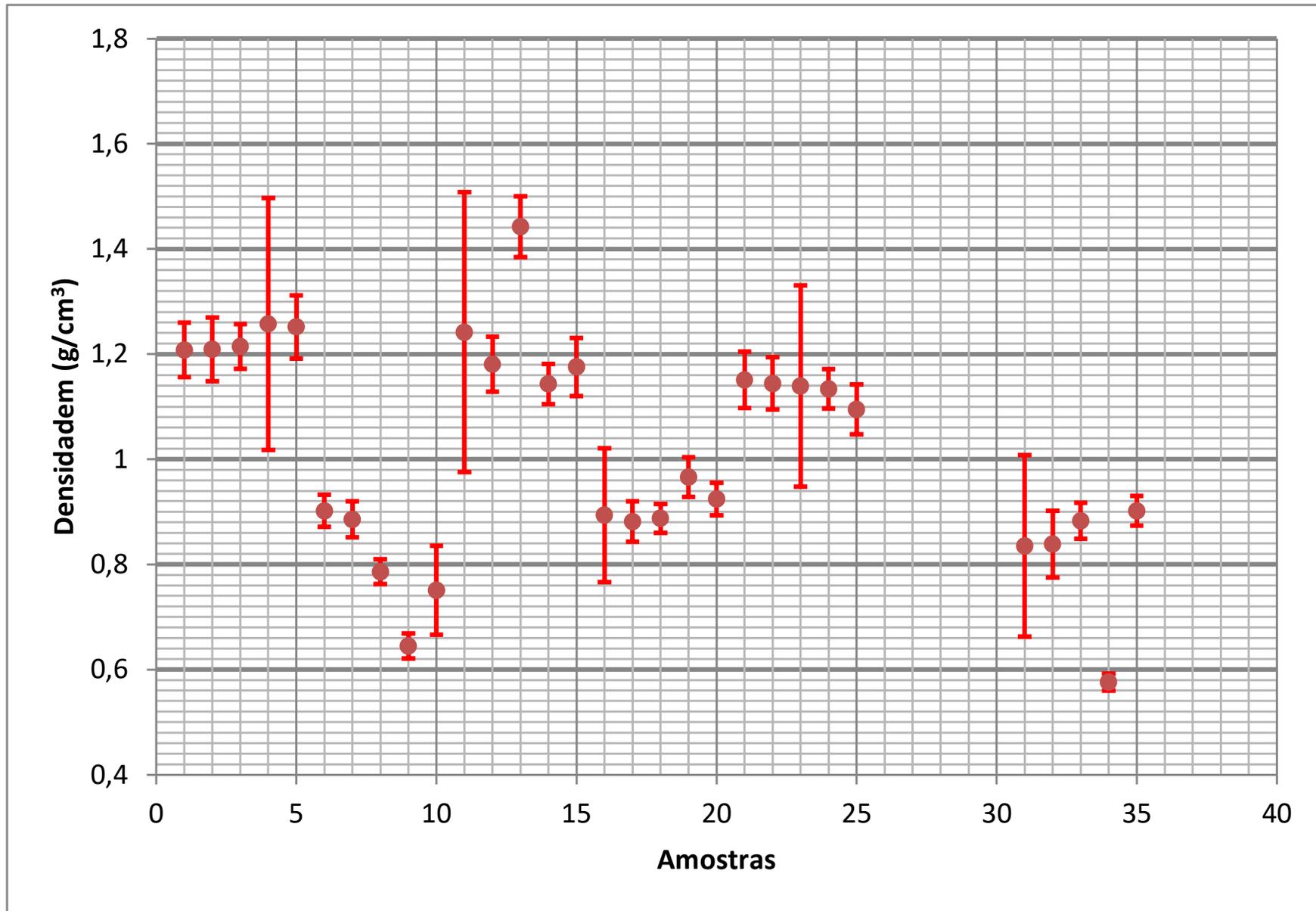
$$\therefore \sigma_d = \sqrt{\left(\frac{4}{\pi D^2 h} \sigma_m \right)^2 + \left(-\frac{8m}{\pi h D^3} \sigma_D \right)^2 + \left(-\frac{4m}{\pi D^2 h^2} \sigma_h \right)^2}$$

$$\frac{\sigma_d}{d} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m} \right)^2 + \left(2 \frac{\sigma_D}{D} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{h} \right)^2}$$

Dados aula passada – balança digital - T42



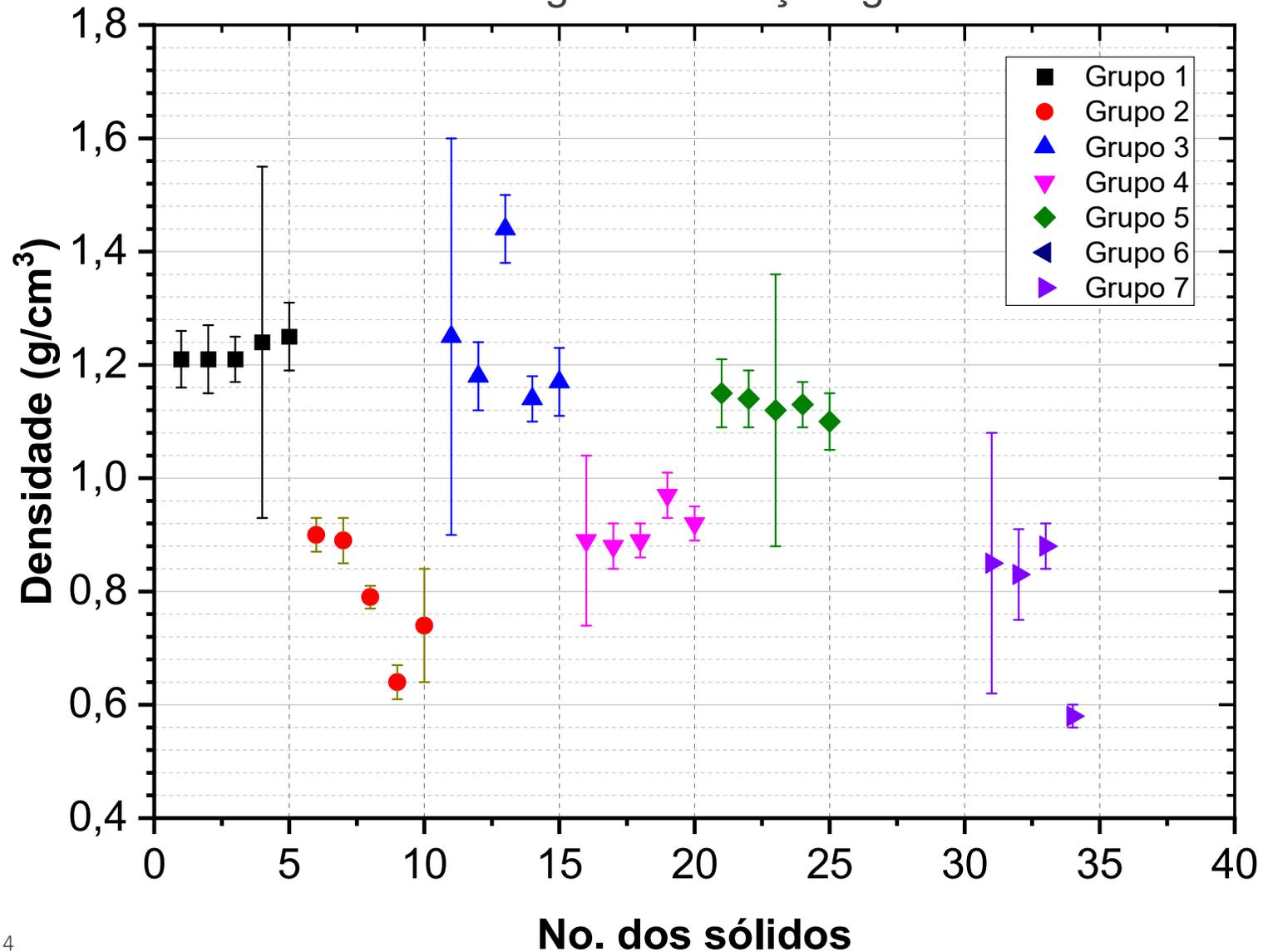
Dados aula passada – balança analítica - T42



Dados aula passada – balança digital T42

| | |
|---------------------|--------------------------------------|
| ■ Poliamida (nylon) | $d = 1.09$ a 1.14 g/cm^3 |
| ■ Polietileno | $d = 0.941$ a 0.965 g/cm^3 |
| ■ Polipropileno | $d = 0.900$ a 0.915 g/cm^3 |
| ■ Acrílico | $d = 1.17$ a 1.20 g/cm^3 |
| ■ PVC | $d = 1.35$ a 1.45 g/cm^3 |

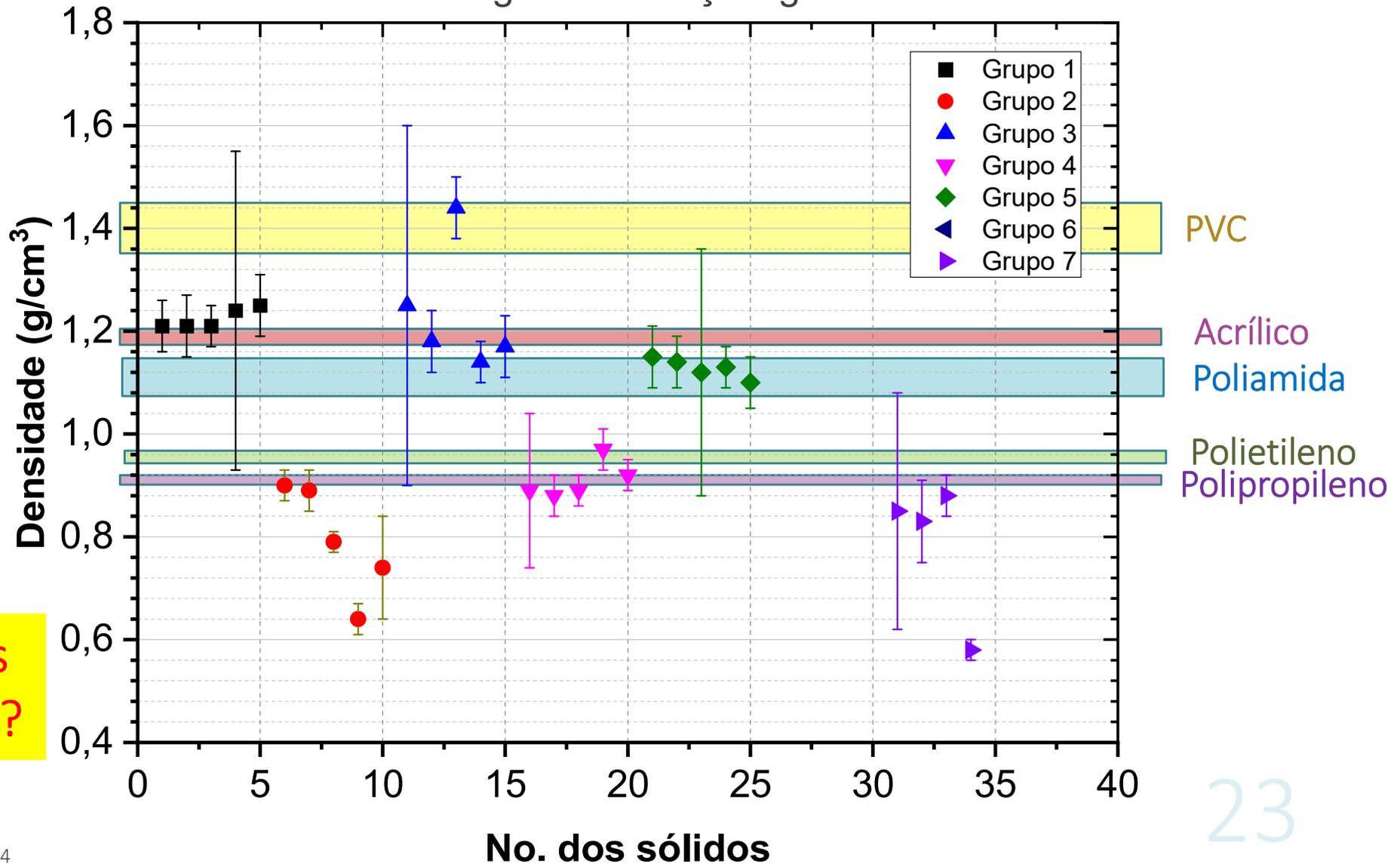
1a. aula - Régua e Balança digital - T42



Dados aula passada – balança digital T42

| | |
|-------------------|---|
| Poliamida (nylon) | $d = 1.09 \text{ a } 1.14 \text{ g/cm}^3$ |
| Polietileno | $d = 0.941 \text{ a } 0.965 \text{ g/cm}^3$ |
| Polipropileno | $d = 0.900 \text{ a } 0.915 \text{ g/cm}^3$ |
| Acrílico | $d = 1.17 \text{ a } 1.20 \text{ g/cm}^3$ |
| PVC | $d = 1.35 \text{ a } 1.45 \text{ g/cm}^3$ |

1a. aula - Régua e Balança digital - T42



Quantos
plásticos?

Conclusões Parciais

Quantos materiais poderíamos até agora identificar ?

Será que é possível que exista mais tipos de plástico do que aqueles identificados até o momento?

Como seria possível saber isso?

Melhorando a precisão do experimento, ou seja, diminuindo as incertezas nas densidades.

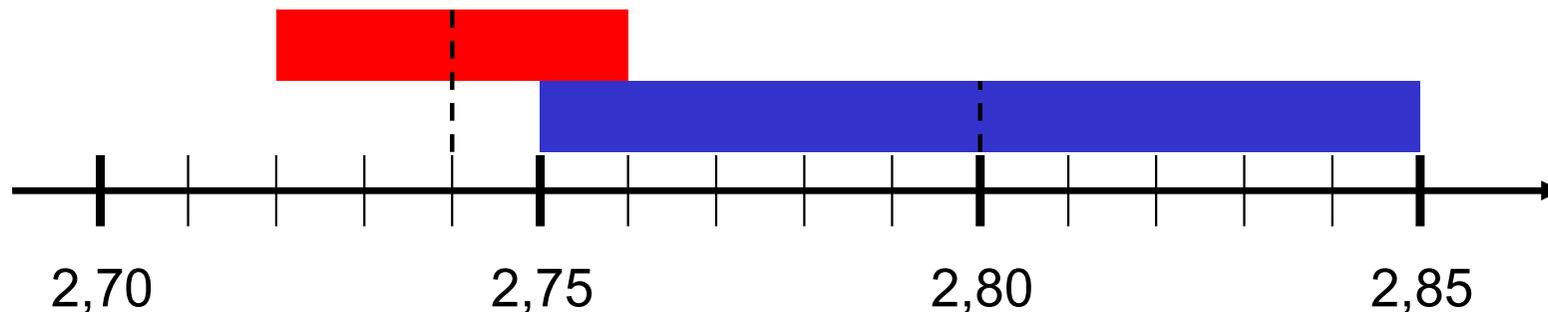
- ❖ ∴ Melhorar a medida de **massa** e ... ✓
- ❖ Melhorar a medida do **volume** dos cilindros.

relembrando

Como comparar os resultados de duas medidas?

- Levar em consideração sempre a incerteza de medida.
- Ao considerar a incerteza, nos perguntamos se as medidas são **compatíveis** ao invés de “iguais”;

Por exemplo, $2,74 \pm 0,02 \text{ mm}$ é compatível com $2,80 \pm 0,05 \text{ mm}$?



Critério para compatibilidade - teste Z

distribuição normal;
amostras com
N grande, sem
tendências

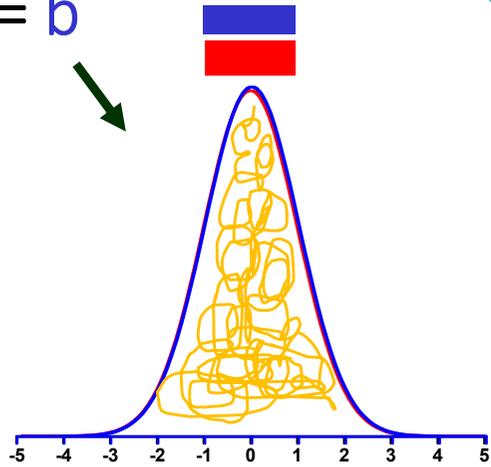
- Superposição em 1σ = compatíveis
 - Superposição testada em intervalos mais largos 2σ ou 3σ : compatibilidade com menor probabilidade.
- Teste Z indica essa probabilidade
 - Ex.: Comparação entre $(a \pm \sigma_a)$ e $(b \pm \sigma_b)$

$$Z = \frac{|a - b|}{\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}}$$

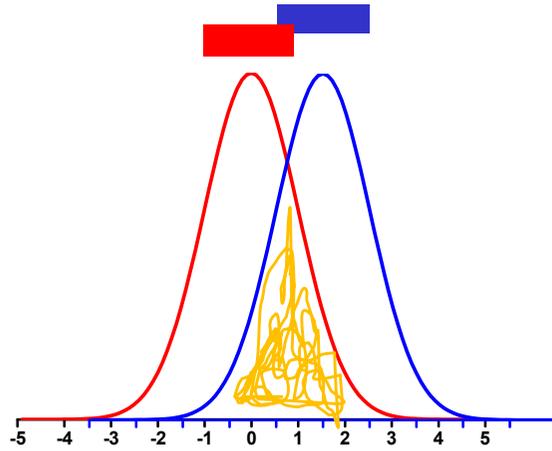
$0 < Z \leq 1$, compatíveis dentro de 1σ
 $1 < Z \leq 2$, compatíveis dentro de 2σ
 $2 < Z \leq 3$, compatíveis dentro de 3σ
 $Z > 3$, discrepantes ou não compatíveis

Compatibilidade

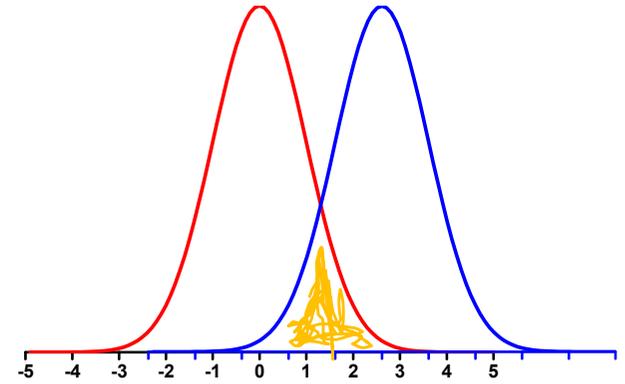
$a = b$



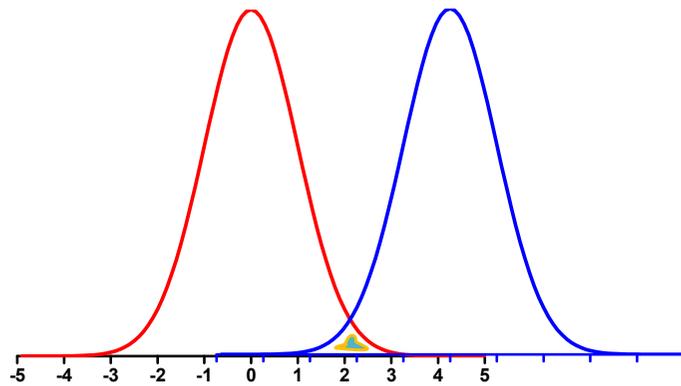
$Z = 0$



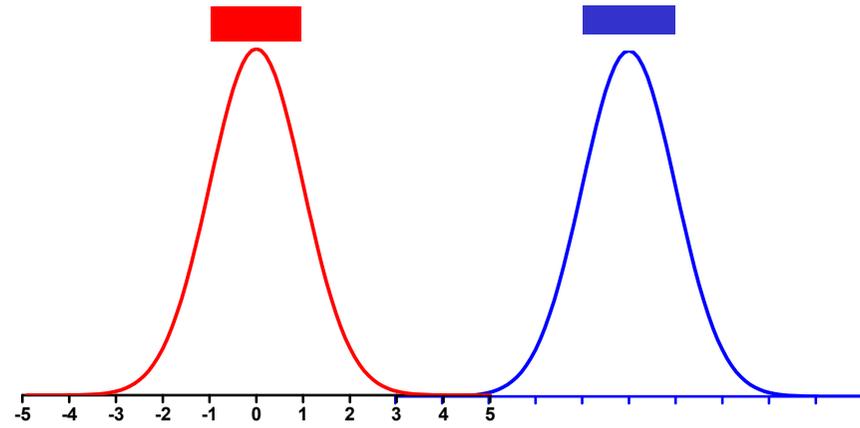
$Z = 1$



$Z = 2$



$Z = 3$



$Z > 3$

Exercícios 2.2 – aula 4

DISCIPLINAS
Apoio às Disciplinas

Disciplinas » Suporte » Português - Brasil (pt_br)

Ricardo Andrade Terini

4300152 - Introdução às Medidas em Física (2023)

Início / Meus Ambientes / 2023 / IF / 430 / 4300152-2023 / Experimento # 2- Densidade de sólidos / Exercícios classe 2.2

questionário

ambiente

Exercícios classe 2.2

Abre: quinta, 13 abr 2023, 00:00
Fecha: sábado, 15 abr 2023, 00:00

Método de avaliação: Nota mais alta

Pré-visualizar questionário agora

← Guia 2.2

Seguir para...

Exercícios casa 2.2 - Quinta a noite ▶

Ajuda e documentação

Você acessou como Ricardo Andrade Terini (Sair)

Experiência II - 2

Determinação da Densidade de Sólidos

- Objetivo
 - Identificar os diferentes tipos de plásticos que compõem um conjunto de objetos
- Identificação
 - Comparação das medidas (e incertezas) com valores tabelados de diferentes tipos de plásticos
- Densidade (materiais sólidos homogêneos)

$$d = m/V$$

Necessário medir a massa e o volume do objeto



Avançando no
tratamento de
incertezas

Sequência de trabalho

Novas medições

- Continuamos com os mesmos sólidos (**mesma caixa**) da aula passada.
- **Medindo dimensões**
 - Dimensões dos cilindros (altura e diâmetro) medidos agora com **paquímetro e micrômetro**.
 - Anotar nas tabelas. *Valores podem variar com posição* (irregularidade de altura ou diâmetro)...
- **Medindo as massas**
 - ✓ - Massas dos cilindros medidos com balança analítica da sala de técnicos do Lab. Didático ($\pm 0,0001$ g)

Sequência de trabalho

Análise de dados

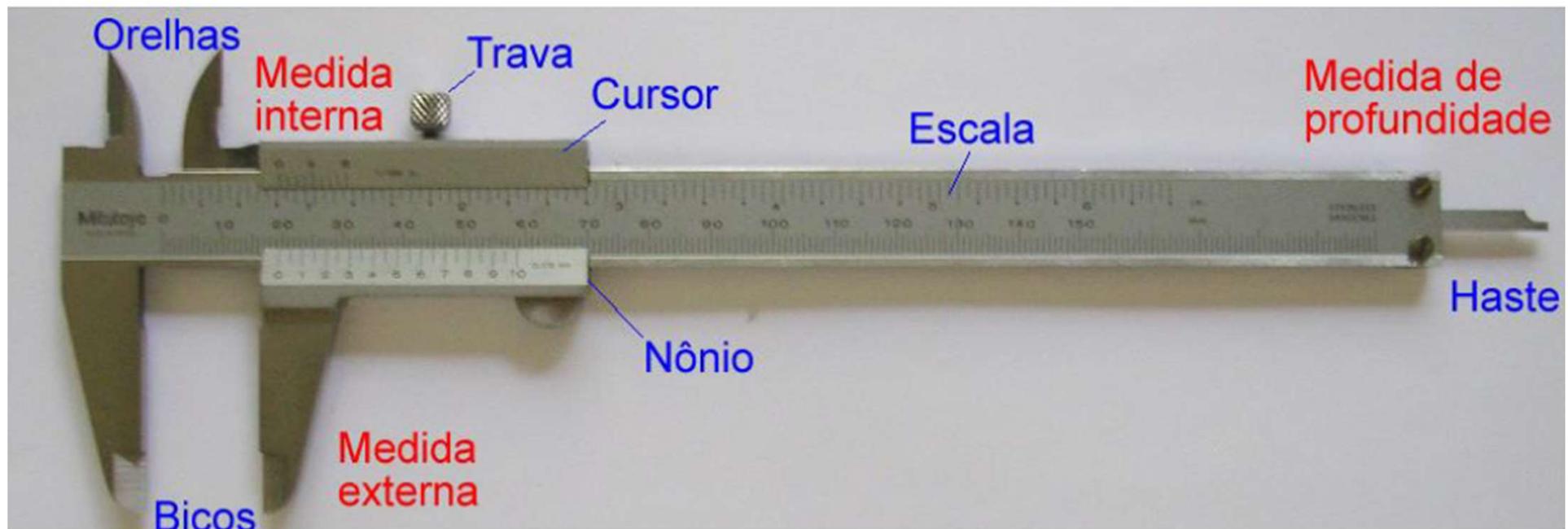
- Cálculo dos valores médios de D e h com incertezas (**erro padrão**)
- Cálculo das incertezas relativas das grandezas medidas (m , h , D) – (*Tabela 3*)
- Calcular as **densidades dos sólidos** a partir de m , h e D , com incertezas – (*Tabela 4*)
- Comparação de valores – intragrupo e intraclasse
- **Verificar Compatibilidade**
- Novo gráfico
- **Identificação do material dos cilindros.**

Paquímetro

Instrumento para medir comprimento

Escala auxiliar (nônio ou vernier)

Precisão de centésimos de mm

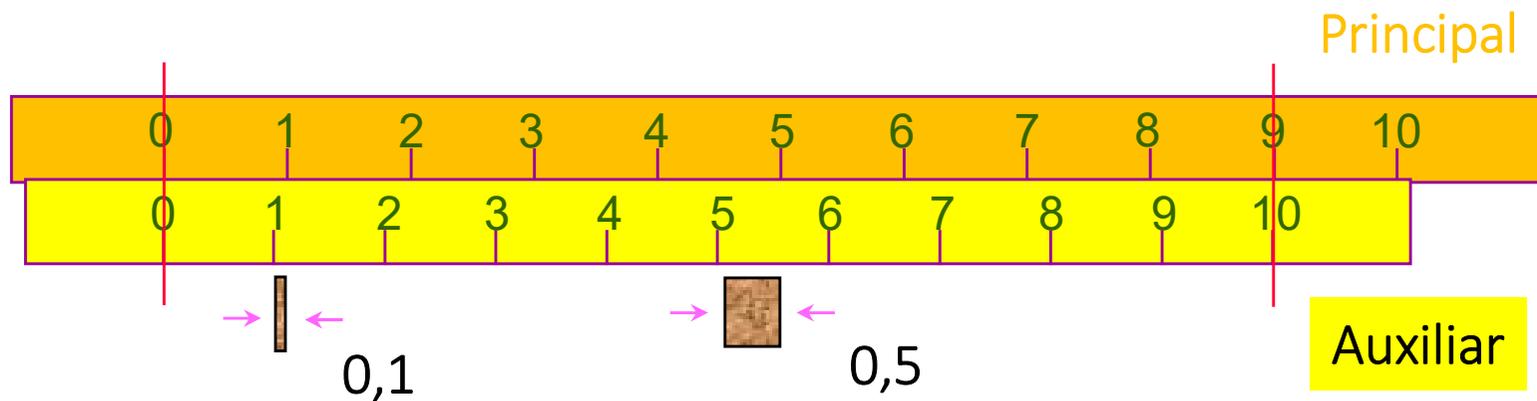


Usando o Paquímetro

Vernier:
20 aux = 19 princ.
50 aux = 49 princ

Nônio ou Vernier

Escala auxiliar para aumentar a precisão da medida

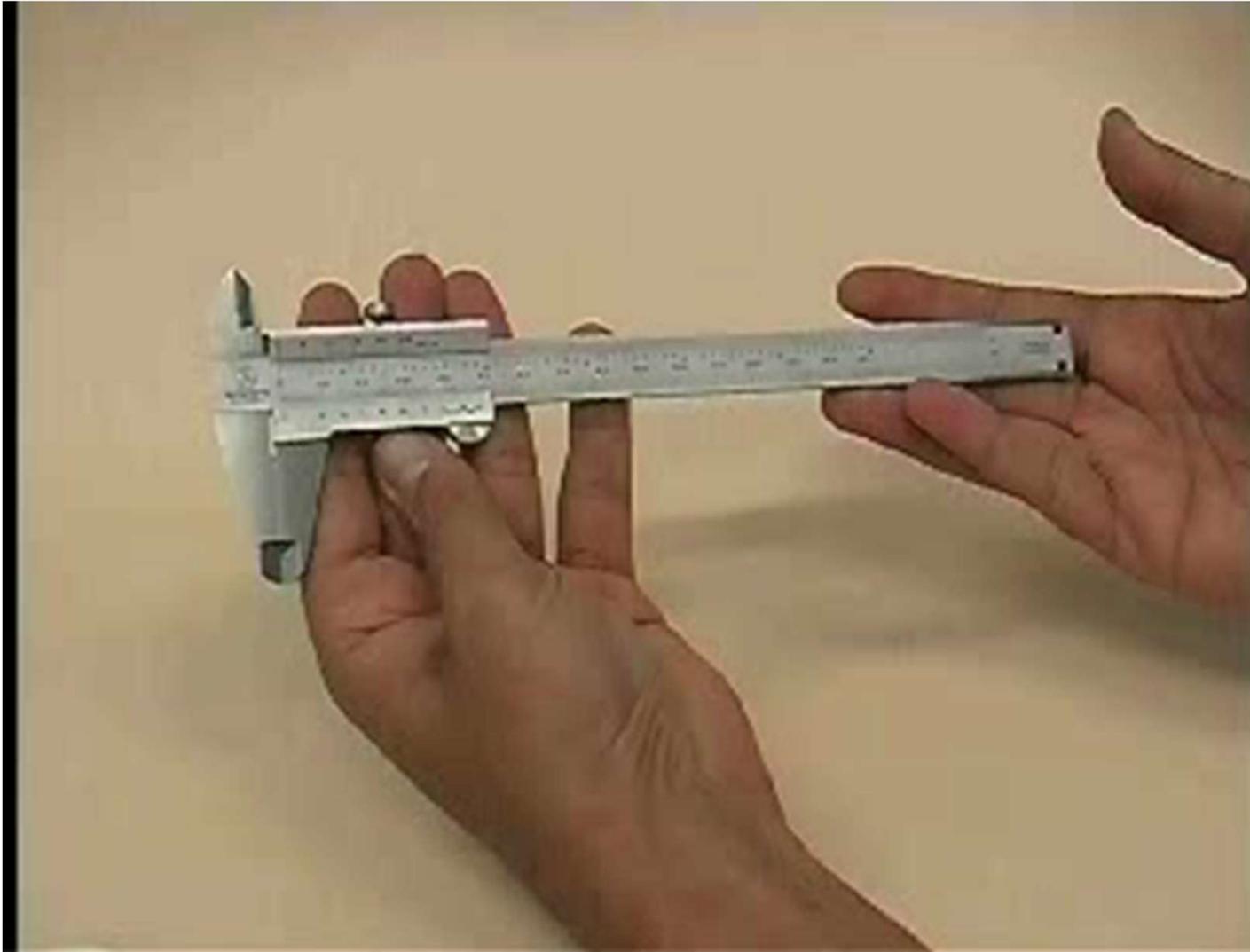


10 div escala auxiliar = 9 div escala principal

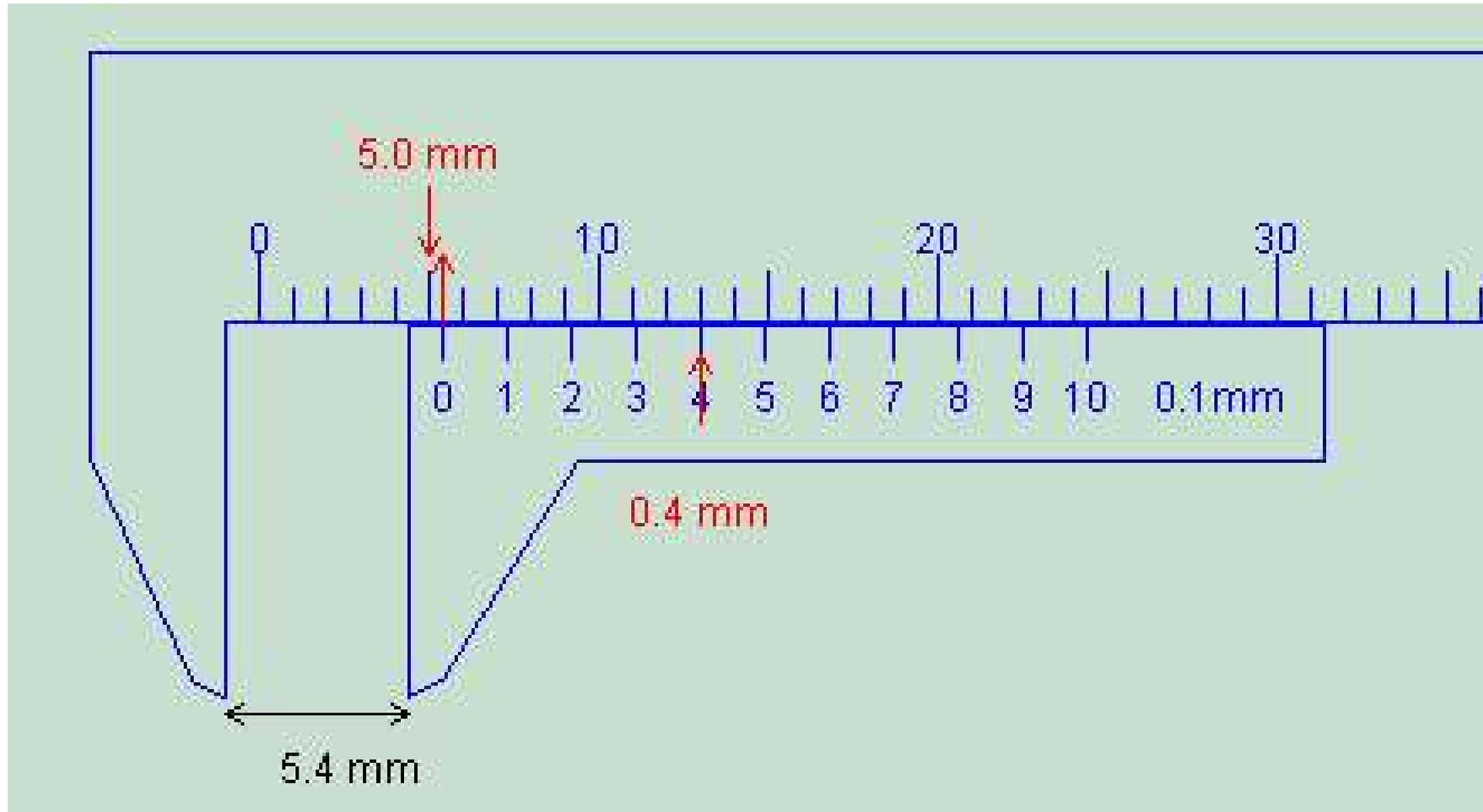
Precisão (nônio) = valor da menor divisão do nônio

$$\frac{\text{Valor da menor divisão - Principal}}{\text{Número de divisões - Auxiliar}} = \frac{1 \text{ div}}{10} = 0,1 \text{ div}$$

Usando o paquímetro



Leitura com o paquímetro – Ex.

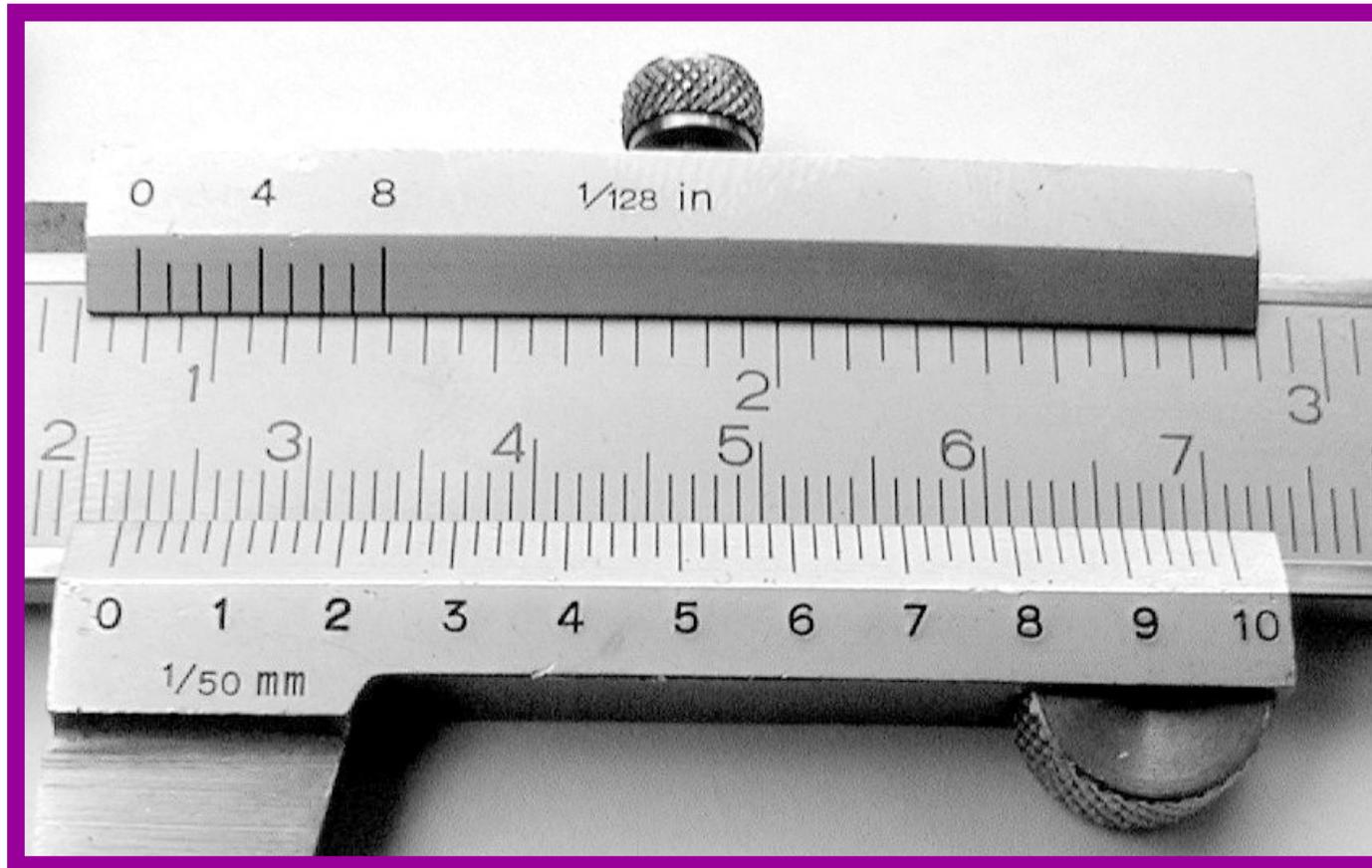


$$L = 5,0 \text{ (principal)} + 0,4 \text{ (nônio)}$$

$$L = 5,4 \text{ mm}$$

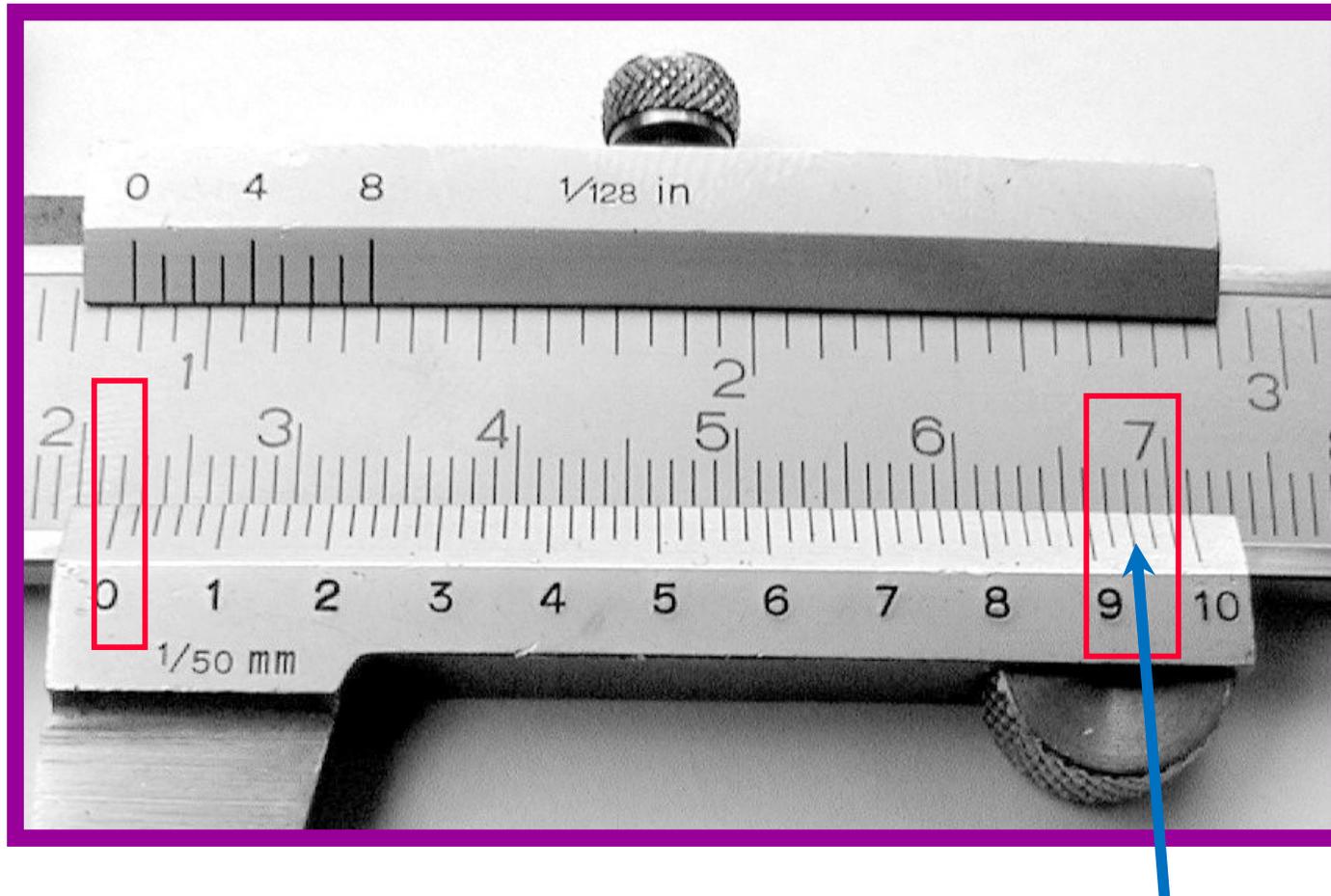
$$L = 5,4 \pm 0,1 \text{ mm}$$

Leitura com paquímetro – Ex.



- 1) *Referência: Posição zero do nônio*
- 2) *Leitura: Número do traço da escala auxiliar que melhor coincidir com traço da escala principal*

Leitura com paquímetro – Ex.



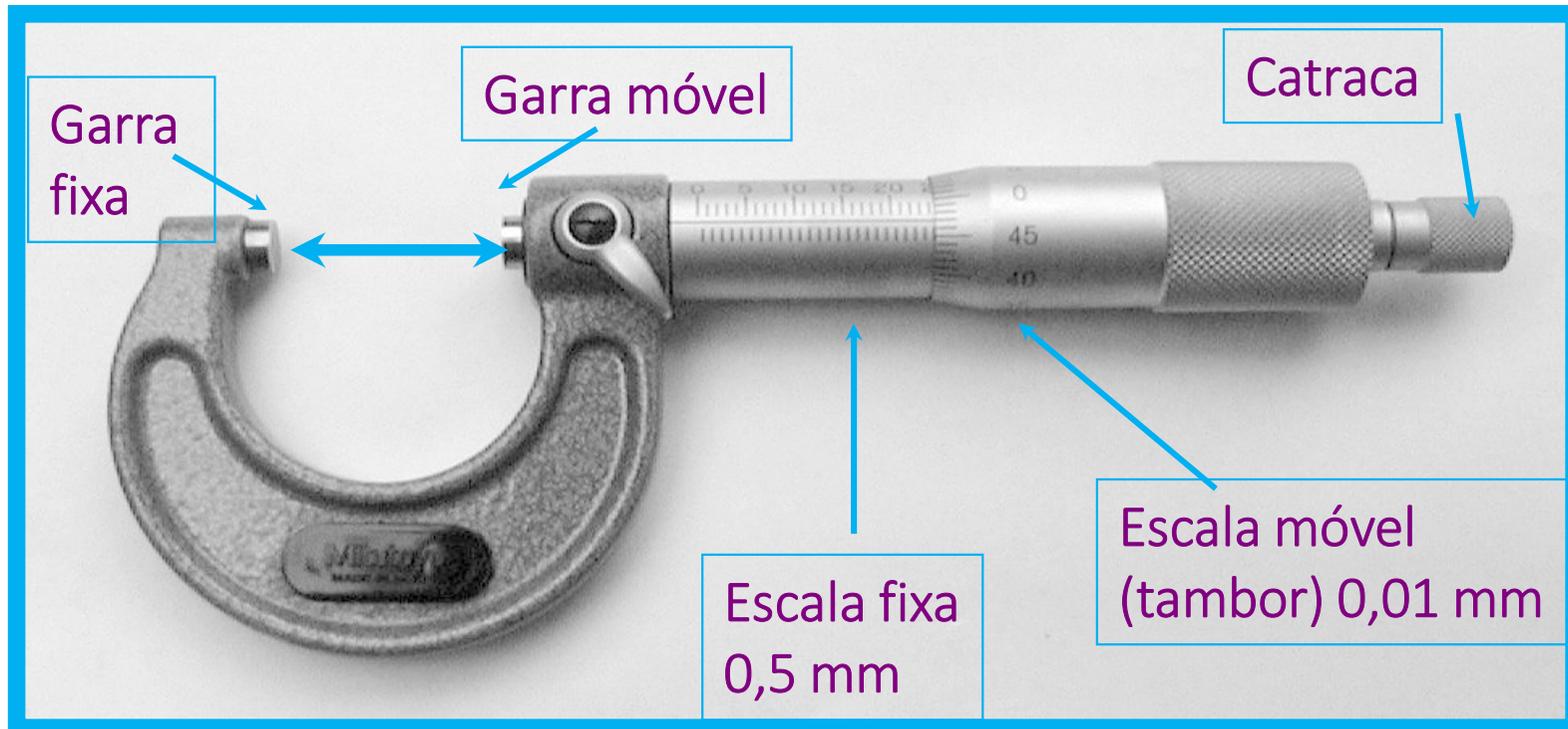
(Precisão 0,02 mm) Traço coincidente = 0,94 mm

Leitura = 21,94 +/- 0,02 mm

Micrômetro

Instrumento para medir pequenos comprimentos

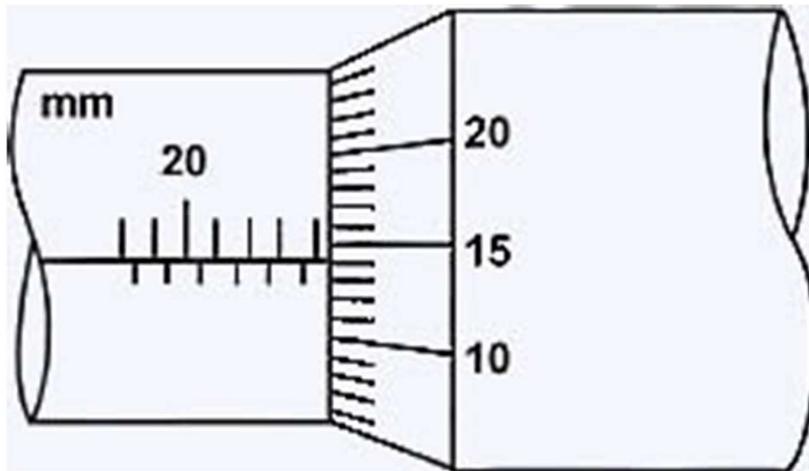
- Precisão de centesimo de mm



Usando o micrômetro



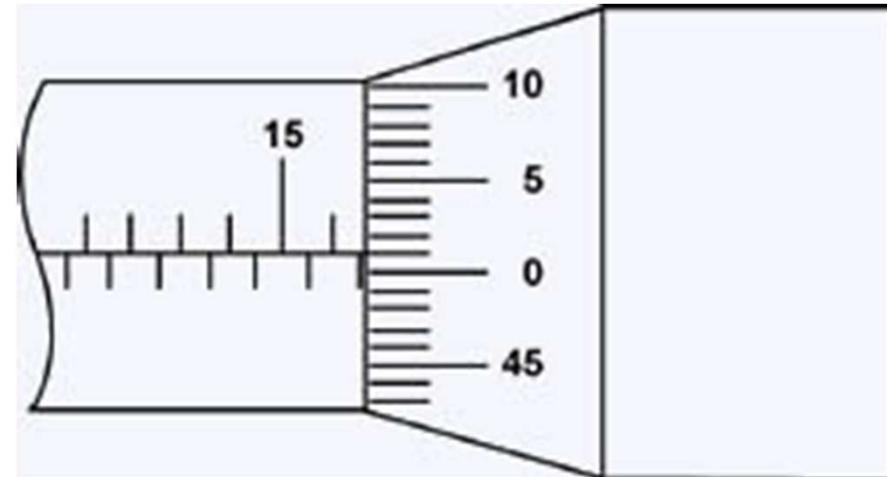
Leitura com o micrômetro – Ex.



$$L = 24,0 \text{ (principal)} + 0,14 \text{ (tambor)} + 0,001 \text{ (estimativa)}$$

$$L = 24,141 \text{ mm}$$

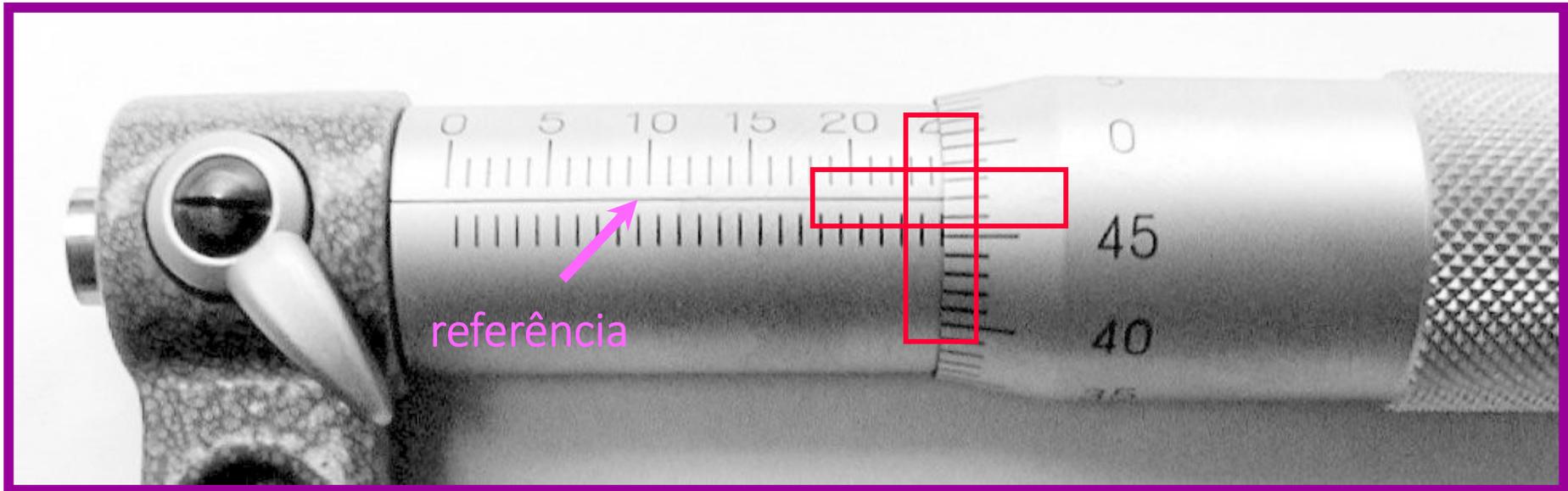
$$L = 24,141 \pm 0,005 \text{ mm}$$



$$L = 16,5 \text{ (principal)} + 0,01 \text{ (tambor)} + 0,000 \text{ (estimativa)}$$

$$L = 16,510 \pm 0,005 \text{ mm}$$

Leitura com micrômetro – Ex.



1) Posição da escala móvel (passos de 0,5 mm) 24,0 mm

2) Posição da escala fixa (referência)

$$46,9 \text{ traços} \times \left(\frac{0,5 \text{ mm}}{50 \text{ traços}} \right) = 0,469 \text{ mm}$$

0,01

$$\text{Leitura} = (24,469 \pm 0,005) \text{ mm}$$

Paquímetro e micrômetro

Paquímetro com nônio em 0,05 mm

<http://www.stefanelli.eng.br/paquimetro-virtual-simulador-milimetro-05/>

Paquímetro com nônio em 0,02 mm

<http://www.stefanelli.eng.br/paquimetro-virtual-simulador-milimetro-02/> (nônio em 0,02 mm)

Micrômetro

<http://www.stefanelli.eng.br/micrometro-virtual-milimetro-centesimal-simulador/>

Aula de hoje – Tabela 4

Preenchimento dos dados em planilha

- Poliamida (nylon) $d = 1.09$ a 1.14 g/cm^3
- Polietileno $d = 0.941$ a 0.965 g/cm^3
- Polipropileno $d = 0.900$ a 0.915 g/cm^3
- Acrílico $d = 1.17$ a 1.20 g/cm^3
- PVC $d = 1.35$ a 1.45 g/cm^3

Para a próxima aula (28/04):

- Entrega do Guia 2.2 (**um por grupo**)
- No *Moodle* (aba Experimento # 2- Densidade de sólidos):
 - Exercício **individual** (até dia 28/04).
- **Apostila do curso** (texto, página principal do moodle):
 - Experiência III (Aula 05 - Distância Focal De Uma Lente)