

Introdução às Medidas em Física

4300152

3ª Aula (31/03/2023)

Licenciatura IME – Turma 2023142

Ricardo Andrade Terini

rterini@if.usp.br

Bloco F – Conjunto Alessandro Volta – sl. 105

Agradecimentos aos profs. Nemitala Added e Elisabeth M. Yoshimura por cederem as apresentações que serviram de base para esta.

IMF - AULA 3

1

Experiência II Densidade de Sólidos

Objetivos

- **Medidas indiretas**
Medida da densidade de sólidos
- **Noções de Estatística**
Propagação de Incertezas; incertezas combinadas
Compatibilidade entre medidas
- **Medições com balanças, paquímetro e micrômetro**

Experiência 2.1: Densidade de Sólidos

- Identificar plásticos diferentes através da comparação de suas densidades (+incertezas), obtidas a partir de medidas de suas dimensões e massa.

IMF - AULA 3

2

Referências para a aula de hoje:

- **Apostila do curso** (página principal do Moodle):
 - Capítulo 3: Instrumentos de Medidas
 - Experiência II (Aulas 03 e 04): Densidade de Sólidos.
- **Conceitos Básicos da Teoria de Erros** (texto, aba Material Didático / arquivos 2023)
 - Capítulo 2: Propagação de Erros e Incertezas

relembrando

Conceitos envolvidos em uma medida experimental

Desconhecido...

Desconhecido...

Relembrando - Definição:

Erro = *valor verdadeiro* - *valor medido*

Toda medida experimental apresenta um *erro*, que precisa ser estimado e compreendido.

Incerteza = *estimativa estatística do valor do erro*

- Incertezas **instrumentais** (tipo B)
- Incertezas devido ao método de medição (**estatísticas**) (tipo A)

- ...

Incertezas instrumentais

- Em geral: \equiv à **metade da menor divisão** (*analógicos*)
 - Cuidado com *instrumentos que possuem escalas auxiliares*, tipo nônio (ex: paquímetro)
 - Nesses casos, *a incerteza é a menor divisão do mesmo*.
- São relacionadas a: **Dificuldade de leitura...**
- **Calibração** do instrumento de medição...
- **Posicionamento** objeto/instrumento (paralaxe, etc.)...
- *ou* **Estabilidade de leitura** (*digitais. Ex.: multímetros*)...
 - Nesse caso, a Incerteza instrumental pode ser **maior do que a precisão** do instrumento de medida. (cf. descrição no manual, p. ex.)

IMF - AULA 3

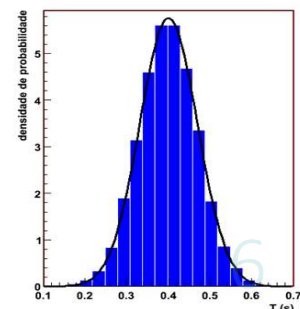
5

Incertezas estatísticas

Quando repetimos as medições, os resultados nem sempre caem na faixa das incertezas instrumentais ...

Erros Estatísticos ou Aleatórios:

- Resultam de **variações aleatórias** no resultado da medição, devido a fatores que não podem ser controlados;
- A estimativa desse erro é chamada de **incerteza estatística**;
- Essa incerteza é obtida por **métodos estatísticos** (ex.: **média e desvio padrão da média**).
- Há uma distribuição de valores medidos, dentro de um intervalo. (*Várias distribuições possíveis*)
- Grandezas sujeitas a *erros aleatórios* costumam se distribuir de forma **simétrica** próxima a uma **gaussiana** (distribuição *normal* ou de Gauss).



IMF - AULA 3

Incertezas estatísticas

Flutuação no resultado das medidas

Representação do resultado de N medidas x_i : **média** (\bar{x})

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

Incerteza estatística do resultado das medidas:
desvio padrão da média (σ_m)

$$\sigma_m = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Sendo s o desvio padrão:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}$$

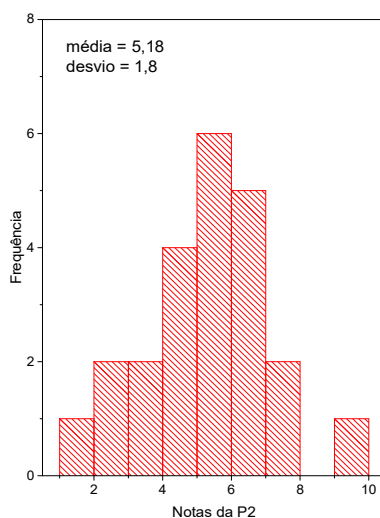
Equações válidas para medidas realizadas nas **mesmas condições** e que possuem as **mesmas incertezas** (instrumental + aleatórias)

Incerteza estatísticas

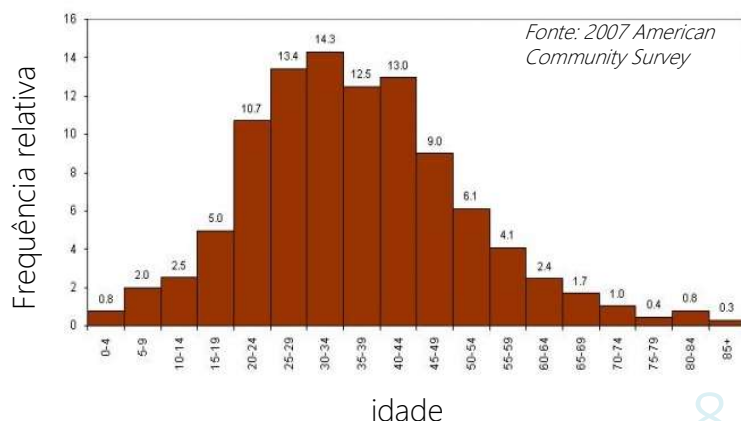
Como apresentar resultados?

Histogramas

- **frequência absoluta** ou
- **frequência relativa** (em %, p.ex.)



Distribuição Etária da População Brasileira Imigrante (%) - 2007



Fonte: 2007 American Community Survey

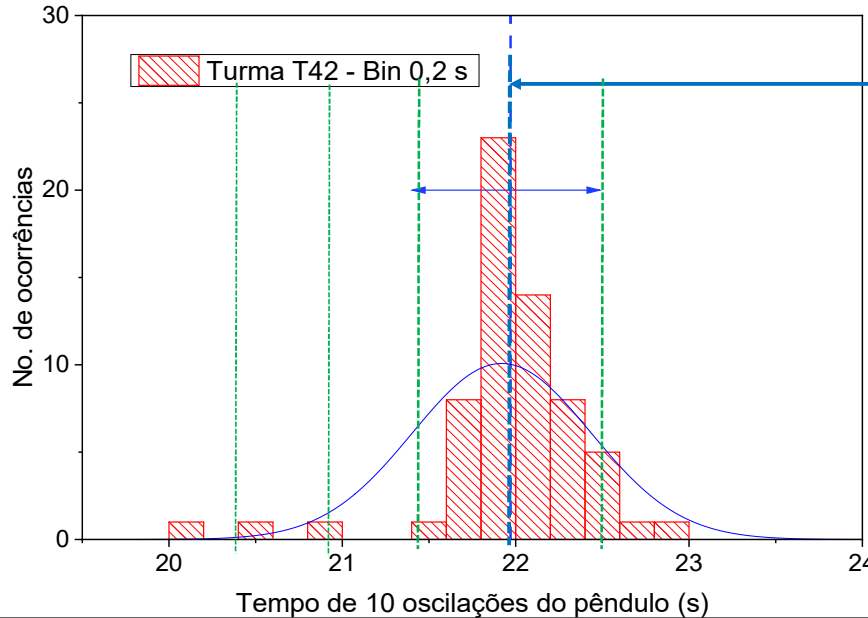
Dados aula passada

T42 – cronômetro de 0,01 s

Média -1 desvio padrão = 21,46 s
 Média = 21,97 s ($\sigma=0,51$ s)
 Média +1 desvio padrão = 22,47 s
 média \pm desvio da média = 21,97 \pm 0,06 s

	N total	Mean	Standard D	Sum	Minimum	Median	Maximum
Tempo de	65	21,91969	0,51469	1424,78	19,66	21,97	22,87

$L \approx 1,24$ m
 $T \approx 2,24$ s



IMF - AULA 3

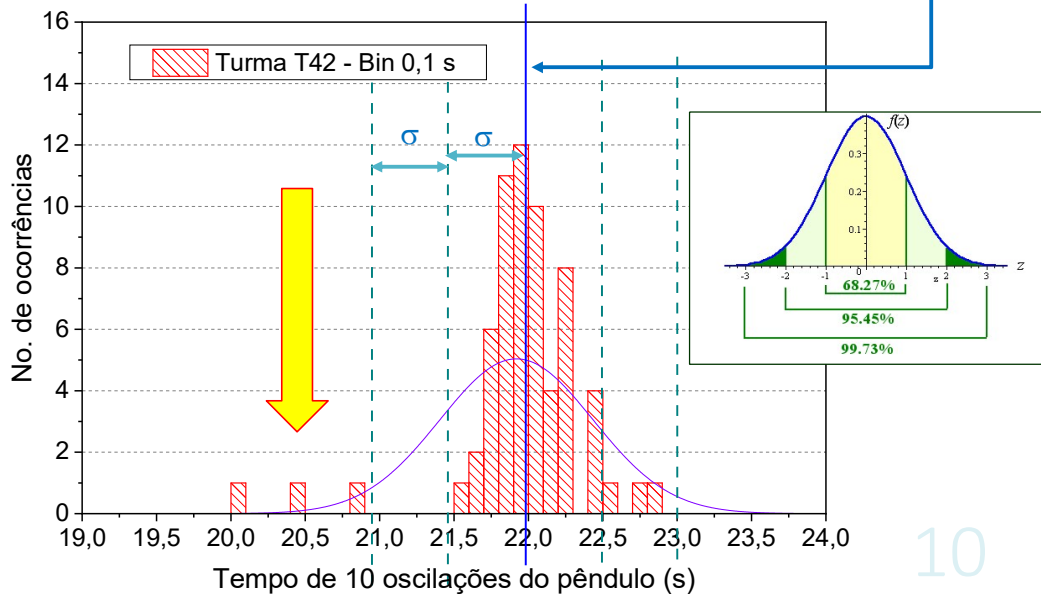
9

Dados aula passada

T42 – cronômetro de 0,01 s

Média -1 desvio padrão = 21,46 s
 Média = 21,97 s ($\sigma=0,51$ s)
 Média +1 desvio padrão = 22,47 s
 média \pm desvio da média = 21,97 \pm 0,06 s

	N total	Mean	Standard	Sum	Minimum	Median	Maximum
Tempo d	65	21,9196	0,51469	1424,78	19,66	21,97	22,87



IMF - AULA 3

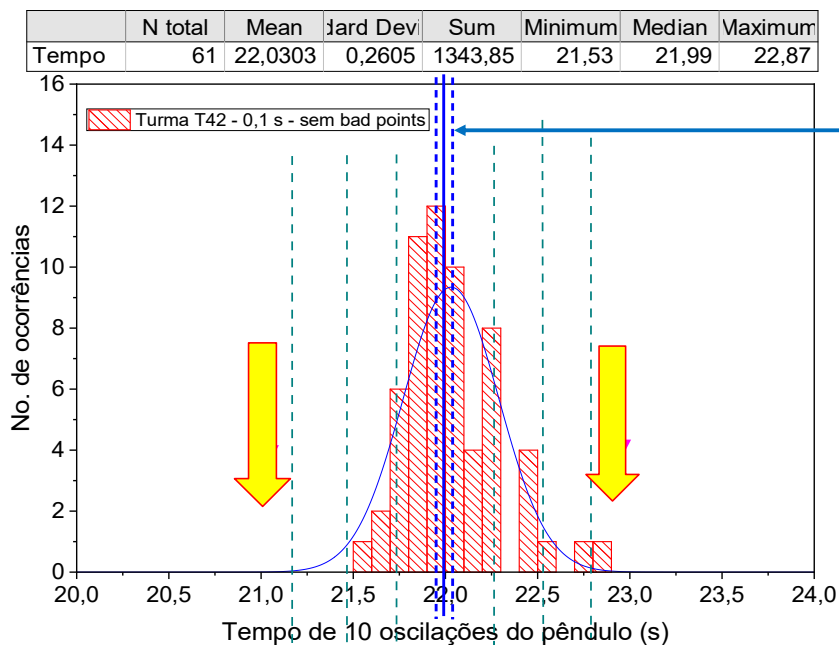
10

Dados aula passada

T42 – cronômetro de 0,01 s

(Tempos < 2.σ original)

Média – 1 desvio padrão = 21,73 s
 Média = 21,99 s ($\sigma=0,26$ s)
 Média + 1 desvio padrão = 22,25 s
 média \pm desvio da média = 21,99 \pm 0,03 s



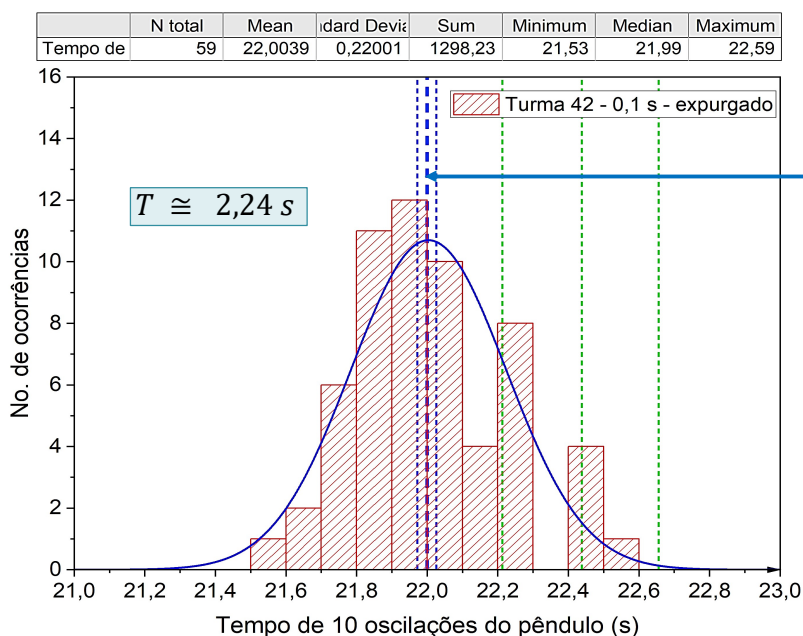
11

Dados aula passada

T42 – cronômetro de 0,01 s

(Tempos < 3.σ novamente)

Média – 1 desvio padrão = 21,77 s
 Média = 21,99 s ($\sigma=0,22$ s)
 Média + 1 desvio padrão = 22,21 s
 média \pm desvio da média = 21,99 \pm 0,03 s



12

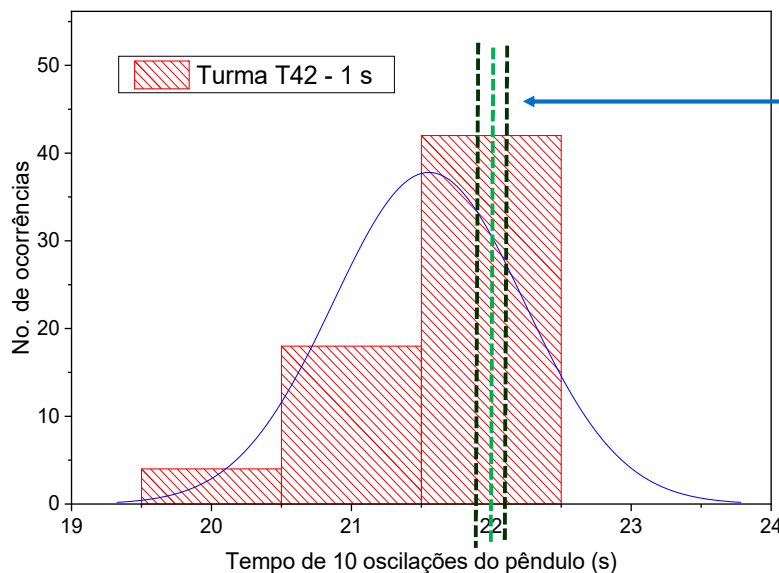
Dados aula passada

T42 – cronômetro de 1 s

(Tempos 3σ original)

Média -1 desvio padrão = 21,3 s
 Média = 22,0 s ($\sigma=0,7$ s)
 Média +1 desvio padrão = 22,7 s
 média \pm desvio da média = 22,00 \pm 0,08 s

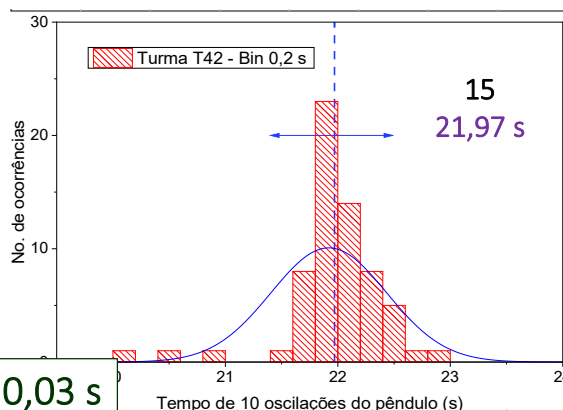
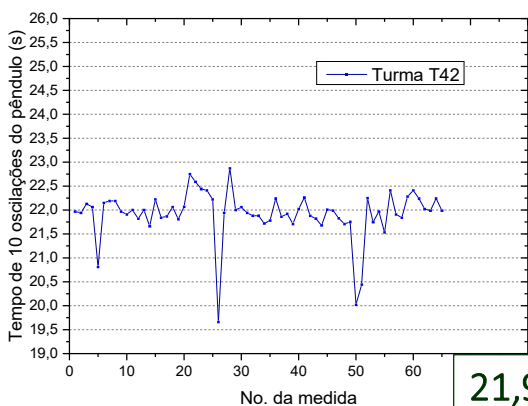
	N total	Mean	Standard Deviation	Sum	Minimum	Median	Maximum
Tempo de	65	21,55385	0,68536	1401	19	22	22



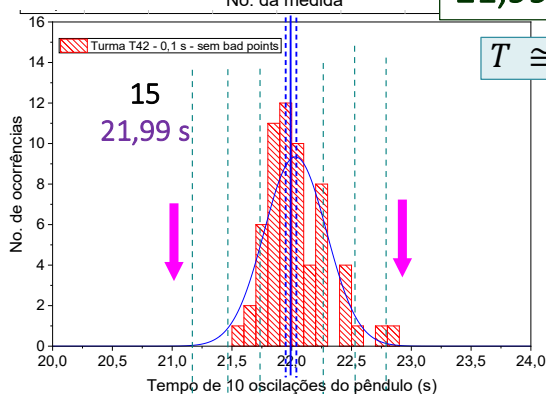
IMF - AULA 3

13

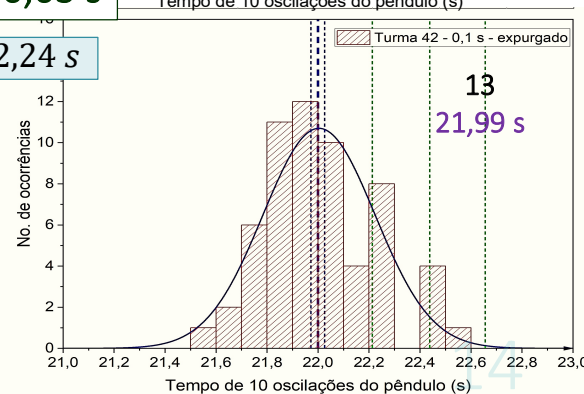
Dados aula passada – cronômetro de 0,01 s - T42



21,99 \pm 0,03 s



$T \cong 2,24$ s



IMF - AULA 3

Compondo Incertezas Estatísticas e Instrumentais

INCERTEZA PADRÃO
COMBINADA

- São **independentes** (embora a **inc.** do método (**estatística**) só “apareça” quando a **do instrumento** é pequena)
- Ambas são **avaliações do erro da medida** (\neq valor verdadeiro e \neq valor medido L)

$$\sigma_{L_{final}} = \sqrt{\sigma_{L_{instr}}^2 + \sigma_{L_{método}}^2} = \sqrt{\sigma_{L_{instr}}^2 + \sigma_{L_{estatístico}}^2}$$

Nos nossos exemplos no pêndulo (na classe):

só estatístico

$$21,99 \pm 0,03 \text{ s}$$

Estatístico e Instrumental

$$\sigma_{\Delta T_{final, T42}} = \sqrt{0,03^2 + 0,01^2} = 0,033 \text{ s}$$

IMF - AULA 3

Como avaliar a incerteza

Tipos de incerteza

Instrumental (**Tipo B**)

*Aquela associada à **precisão do instrumento** utilizado para realizar a medida direta de uma grandeza*

Estatística (**Tipo A**)

*Incerteza associada à **flutuação no resultado** de uma mesma medida*

Sistemática (erro sistemático)

Aquela onde a medida é desviada em uma única direção, tornando os resultados viciados

IMF - AULA 3

16

Erros sistemáticos

- **Falseiam a medida**

Ex 1: uma régua onde o primeiro *mm* está faltando e o experimentador não percebe...

Todas as medidas serão 1 mm maiores do que deveriam.

Ex 2: uma *balança descalibrada* e/ou com o zero deslocado.

- Esse tipo de incerteza, em geral, só é percebida quando um resultado difere do esperado.

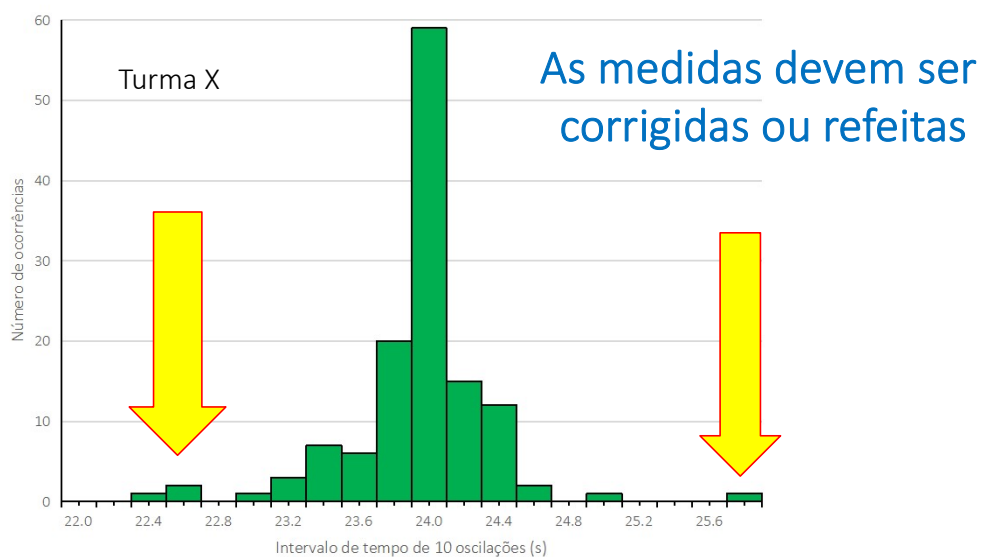
Devem ser corrigidas ou refeitas

Por exemplo, na aula passada: contar errado o número de oscilações, ou o momento em que a oscilação se completa, ...

17

IMF - AULA 3

Erros sistemáticos?



18

IMF - AULA 3

Qual é a incerteza de uma medida?

Ex.: Várias medidas do tamanho de uma mesa feitas com uma régua

$$\sigma_{L_{instr}} = 0,5 \text{ mm}$$

$$\sigma_{L_{estat}} \dots$$

$$\sigma_{L_{final}} = \sqrt{\sigma_{L_{instr}}^2 + \sigma_{L_{estat}}^2}$$

Caso um tipo de incerteza seja dominante, pode-se desprezar a outra.

- Período do pêndulo medido com o relógio de 1 s:
Incerteza instrumental > estatística (1 s vs. 0,08 s)
- Período do pêndulo medido com cronômetro de 0,01s
Incerteza estatística > instrumental (0,03 s vs. 0,01 s)

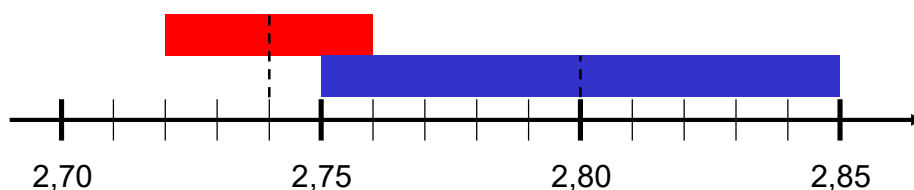
IMF - AULA 3

19

Como comparar os resultados de duas medidas?

- **Levar em consideração sempre a incerteza da medida.**
- Ao considerar a incerteza, nos perguntamos se as medidas são **compatíveis** ao invés de “iguais”;

Por exemplo, $2,74 \pm 0,02 \text{ mm}$ é compatível com $2,80 \pm 0,05 \text{ mm}$?



IMF - AULA 3

20

Compatibilidade

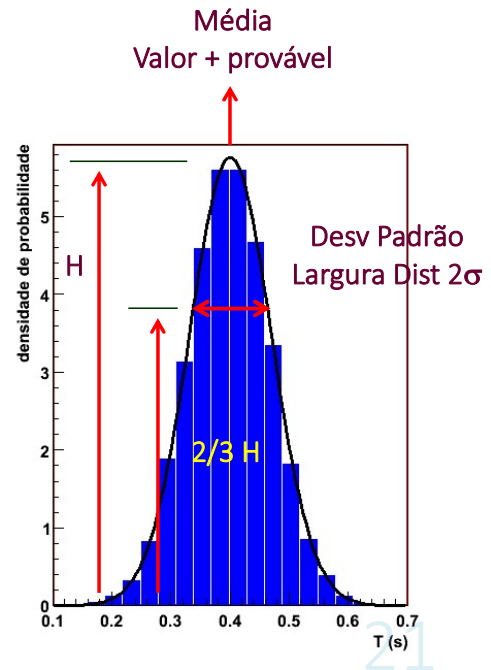
Incerteza = Intervalo de confiança

Paralelo com distribuição estatística:

$$[M - \sigma; M + \sigma] = 68\%$$

$$[M - 2\sigma; M + 2\sigma] = 95\%$$

$$[M - 3\sigma; M + 3\sigma] = 99,9\%$$



IMF - AULA 3

Exercício de classe 2.1

IMF - AULA 3

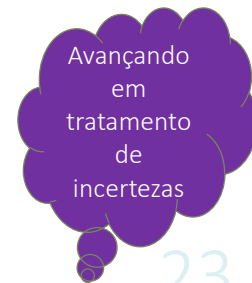
Experiência II

Medição da Densidade de Sólidos

- Objetivo
 - Identificar os diferentes tipos de plásticos que compõem um conjunto de objetos.
- Identificação
 - Comparação das medidas (e incertezas) de **densidade** com valores tabelados de diferentes tipos de plásticos.
- Densidade (materiais sólidos homogêneos)

$$d = m/V$$

*Necessário medir a **massa** e o **volume** de cada objeto (5 cilindros por grupo)*



23

IMF - AULA 3

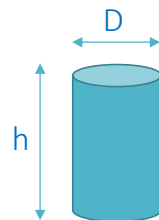
Cálculo da densidade

A densidade é dada por:

$$d = \frac{m}{V}$$

onde, o volume V é:

$$V = \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot h$$



e m , h e D são, respectivamente, a massa, a altura e o diâmetro do cilindro **medidos diretamente...**

24

IMF - AULA 3

Sequência de trabalho

- Cada componente do grupo escolhe **2/3 sólidos** para medir (em grupos de 3 estudantes, *um dos alunos mede só 1*); cada grupo mede os 5 sólidos de sua Caixa.

ANOTAR NÚMERO DA CAIXA

Situação 1

- dimensões dos cilindros (**altura e diâmetro**): com RÉGUA.
- **massas** dos cilindros: com BALANÇA DIGITAL da sala (resolução: *0,1 g*). Anotar nas tabelas.

Situação 2

- **massas** dos cilindros medidos com BALANÇA ANALÍTICA da **sala de técnicos do Lab. Didático** (*décimo de miligrama*)

IMF - AULA 3

25

Sequência de trabalho Análise de dados

Propagação
de
incertezas

Cálculo dos **volumes** dos sólidos

Cálculo da incerteza dos volumes dos sólidos:

- Como varia o volume se:
 - a **altura** muda dentro do intervalo de incerteza?
 - o **diâmetro** muda dentro do intervalo de incerteza?

Variar h: calcular $V_{\min(h)}$ e $V_{\max(h)}$

Variar D: calcular $V_{\min(D)}$ e $V_{\max(D)}$

$$\sigma V = [V_{\max} - V_{\min}] / 2$$

Primeira aproximação para a incerteza: *metade dessa variação*.

- **Como juntar** as duas variações?

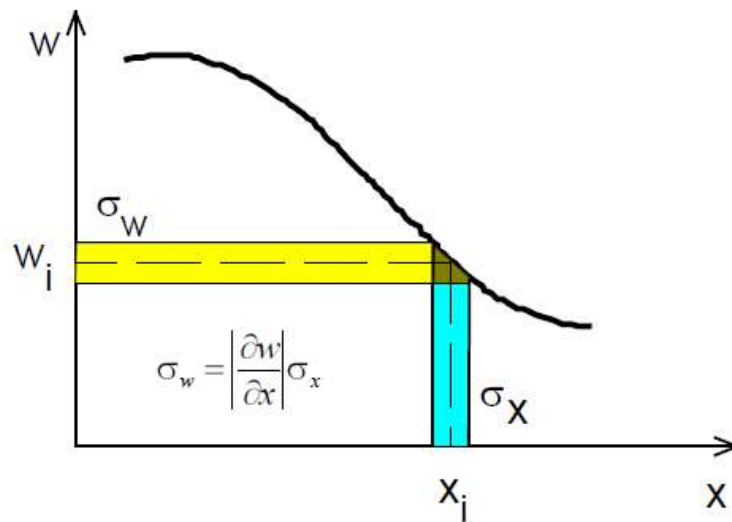
Composição quadrática:

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma_{V(h)}^2 + \sigma_{V(D)}^2}$$

26

IMF - AULA 3

Propagação de Incertezas



IMF - AULA 3

27

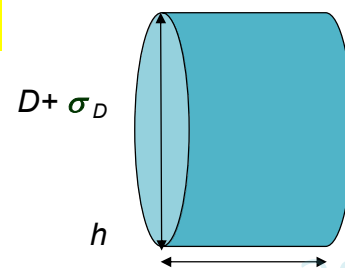
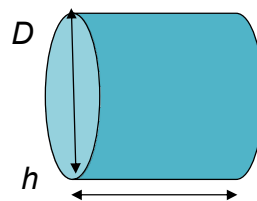
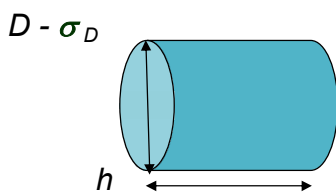
Propagação de incertezas

Neste caso iremos calcular:

- a **incerteza no volume devido à incerteza no raio** ($\sigma_{V(D)}$) e
- a **incerteza no volume devido a incerteza na altura** ($\sigma_{V(h)}$) e depois *combinar* as duas incertezas.

Incerteza no volume devido à incerteza no **diâmetro** (*estimativa*):

$$\sigma_{V(D)} = (V_{max} - V_{min})_{(D)} / 2$$



IMF - AULA 3

28

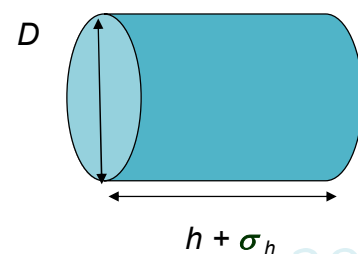
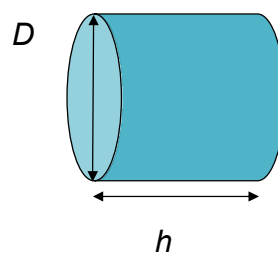
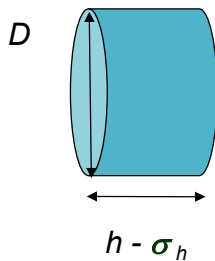
Propagação de incertezas

Incerteza no volume devido a incerteza na **altura** (estimativa):

$$V_{\min} (\text{devido a } \sigma_h) = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 (h - \sigma_h)$$

$$V_{\max} (\text{devido a } \sigma_h) = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 (h + \sigma_h)$$

$$\sigma_{V(h)} = (V_{\max} - V_{\min}) / 2$$



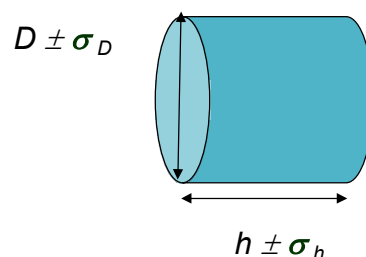
IMF - AULA 3

29

Propagação de incertezas

Ao final, combinamos as duas incertezas com uma **soma quadrática**, assumindo que a incerteza devido ao diâmetro é *independente* da incerteza devido à altura:

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma_{V(h)}^2 + \sigma_{V(D)}^2}$$



IMF - AULA 3

30

Incerteza relativa

Incerteza absoluta (σ_{abs}): Valor apresentado no resultado. Ex. 1:

$$\text{Volume} = 27,4 \pm 0,5 \text{ cm}^3$$

Incerteza relativa (σ_{rel}): Porcentagem da incerteza sobre o valor principal

$$\sigma_{rel} = \frac{\sigma_{abs}}{\text{valor principal}} = \frac{0,5}{27,4} = 0,018 \text{ ou } 1,8\%$$

Ex. 2: se o valor da incerteza representa 5% do valor medido:

$$\begin{aligned} \sigma_{abs} &= \text{valor principal} \times 0,05 \\ \sigma_{abs} &= 27,4 \times 0,05 = 1,4 \end{aligned}$$

Sequência de trabalho Análise de dados

- Cálculo dos volumes dos sólidos
- Cálculo da incerteza dos volumes dos sólidos:
 - Como varia o volume se:
 - a **altura** muda dentro do intervalo de incerteza?
 - o **diâmetro** muda dentro do intervalo de incerteza?
 - Juntar as *duas variações* (Tabela 3)
- Calcular as **densidades dos sólidos** para as duas situações (c/V_{\max} e V_{\min}) (Tabela 4 e Tabela 5)
- Calcular a **incerteza das densidades** para as duas situações ($d_{\max} - d_{\min}/2$) (Tabela 4 e Tabela 5)
- Comparar as densidades.

Propagação
de
incertezas

32

Cálculo da densidade e sua incerteza

$$d = \frac{m}{V}$$

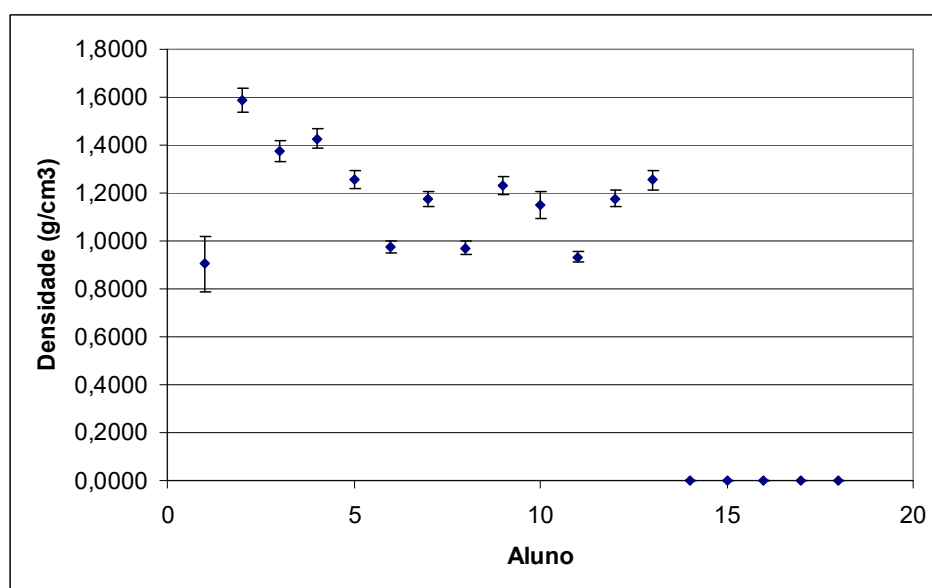
Considerando as incertezas da massa e do volume independentes, vamos utilizar a seguinte aproximação:

Propagação simultânea dos valores das incertezas do volume e da massa:

$$\sigma_d = \frac{d_+ - d_-}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{(m + \sigma_m)}{(V - \sigma_v)} - \frac{(m - \sigma_m)}{(V + \sigma_v)} \right]$$

Preenchimento dos dados na planilha geral

Gráfico para próxima aula: com todos os resultados da turma

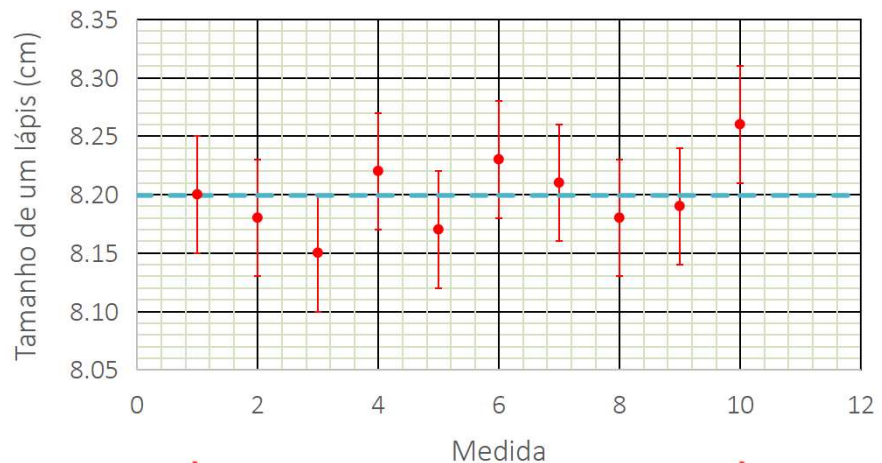


34

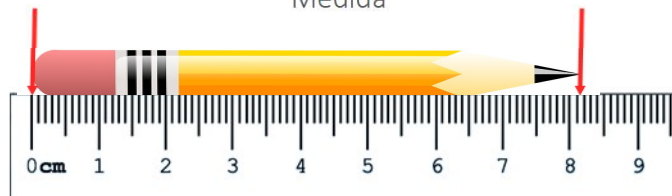
Representando valores: gráfico

Vamos considerar as seguintes medidas:

Medida	Tamanho de um lápis (cm)
1	$8,20 \pm 0,05$
2	$8,18 \pm 0,05$
3	$8,15 \pm 0,05$
4	$8,22 \pm 0,05$
5	$8,17 \pm 0,05$
6	$8,23 \pm 0,05$
7	$8,21 \pm 0,05$
8	$8,18 \pm 0,05$
9	$8,19 \pm 0,05$
10	$8,26 \pm 0,05$



Tamanho lápis:
 $8,199 \pm 0,010$ cm



Discussões

- É possível determinar quantos tipos de plástico se tem nas peças da turma?
- A melhoria da precisão das medidas da massa ajudou a melhorar os resultados finais de d ?

Valores de referência:

- Poliamida (nylon) $d = 1.09$ a 1.14 g/cm³
- Polietileno $d = 0.941$ a 0.965 g/cm³
- Polipropileno $d = 0.900$ a 0.915 g/cm³
- Acrílico $d = 1.17$ a 1.20 g/cm³
- PVC $d = 1.35$ a 1.45 g/cm³

36

Para a próxima aula (14/04):

- Entrega do Guia 2.1 com gráfico (**um por grupo**)
- No *Moodle* (aba Experimento # 2 - Densidade dos sólidos):
Fazer Exercício **individual** (até dia 14/04).
- Lembrete: **dia 07/04/23 não haverá aula** (Semana Santa)

37