

Introdução às Medidas em Física

4300152
2ª Aula (24/03/2023)

Licenciatura IME – Turma 2023142

Ricardo Andrade Terini

rterini@if.usp.br

Bloco F – Conjunto Alessandro Volta – sl. 105

Agradecimentos aos profs. Nemitala Added e Elisabeth M. Yoshimura por cederem apresentações que serviram de inspiração para esta.

IMF - AULA 1

1

Experiência I - 2: Medidas de Tempo e o Pêndulo Simples

Objetivos: Revisão de conceitos da aula passada +

- Noções de estatística:
 - *Introdução aos erros aleatórios ou estatísticos*
 - *Média e desvio padrão*
- Introdução aos histogramas
 - *Ocorrências*
 - *Frequências*
 - *Densidade de probabilidade*
- **Experimento I-2:**
 - Realizar medidas de tempo repetidas e fazer a análise estatística dos resultados
 - Estudo do período de oscilação de um pêndulo

IMF - AULA 2

2

Referências para a aula de hoje:

- [Apostila do curso](#) (página principal do Moodle):
 - Capítulo 4: Interpretação Gráfica de Dados
 - Experiência I (Aulas 01 e 02) Calibração de Medidas e Pêndulo Simples.
- [Conceitos Básicos da Teoria de Erros](#) (texto, aba Material Didático / arquivos 2022)
 - Capítulo 1: Expressão de Medições Experimentais

Como realizar medições

- **Análise do instrumento de medida**

identificação do tipo e funcionamento

- **Fundo de escala e unidade**

seleção conveniente

- **Precisão e incerteza da medida**

- Instrumental

- Escala simples

- Duas escalas: principal e auxiliar (nônio ou vernier)

- Método

- Erros Aleatórios



IMF - AULA 2

relembrando

Algarismos significativos

Algarismos usados para representar o valor *medido*.

- Quantidade define confiabilidade e precisão da medida

345 s - 1030,0 mm - 0,052 m - 8,3 kg - 864,5 g

3 5 2 2 4

Para contar número de algarismos significativos de um valor, inicia-se pelo primeiro algarismo não nulo, da esquerda para a direita.

Arredondamento

Ex.: 3,1415926535 m

3 sig → 3,14 m 5 sig → 3,1416 m

Regra: **adiciona-se uma unidade** ao último algarismo significativo, se o valor do algarismo seguinte for ≥ 5 ; caso contrário, mantém-se o mesmo valor.

IMF - AULA 2

5

Cálculos com algarismos significativos

1. Soma ou diferença:

Resultado final deve ser escrito até a posição correspondente ao algarismo duvidoso de maior valor absoluto.

$$2,5 \times 10^4 + 1234 = 25 \begin{array}{|l} \text{||||} \\ \hline 1234 \\ \hline 26 \end{array} \begin{array}{|l} \text{||||} \\ \hline \hline \hline \end{array} \begin{array}{|l} \text{duvidoso} \\ \hline \hline \hline \end{array} \rightarrow 2,6 \times 10^4$$

2. Multiplicação ou divisão:

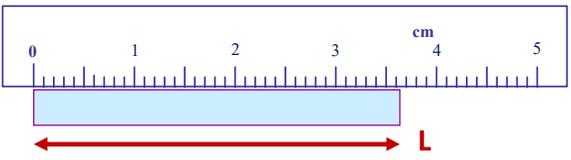
Resultado final deve ser escrito com o mesmo número de significativos do componente com menos significativos.

$$2,5 \times 10^4 \times 1234 = 25000 \begin{array}{|l} 1234 \\ \hline 30850000 \end{array} \rightarrow 3,1 \times 10^7$$



IMF - AULA 1

relembrando



Ex.: **Régua** (instr. analógico) - mede distâncias
 Fundo de escala = **5 cm**
 Precisão = menor divisão/2 = **0,05 cm** ou **0,5 mm**
 Para realizar a medida:

$L = (3,64 \pm 0,05) \text{ cm}$

duvidoso

7

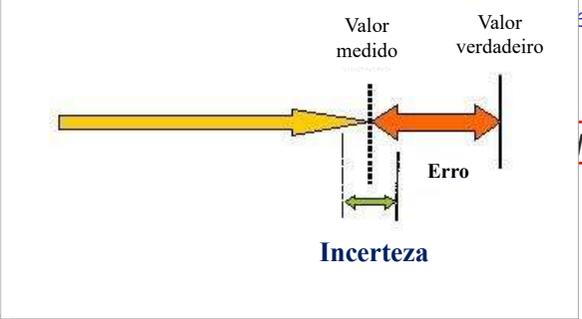
IMF - AULA 2

Conceitos envolvidos em uma medição experimental

Relembrando - Definição:

? $\text{Erro} = \text{valor verdadeiro} - \text{valor medido}$

Desconhecido...



erro,

o erro

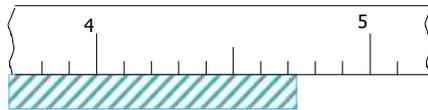
8

IMF - AULA 2

Incerteza instrumental

Como avaliar a incerteza?

Deve-se considerar a *dificuldade* de leitura e a *imprecisão* do equipamento



$(4,72 \pm ?) \text{ cm}$

E a incerteza?

...tenho "certeza"

Algarismo *duvidoso*: avaliar o melhor possível

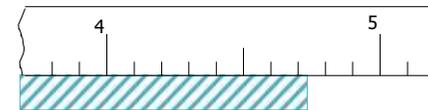
9

IMF - AULA 2

Incerteza instrumental

Como avaliar a incerteza?

Deve-se considerar a dificuldade de leitura e a imprecisão do equipamento.



$(4,72 \pm 0,05) \text{ cm}$

metade da menor divisão ($1 \text{ mm} \div 2 = 0,5 \text{ mm} = 0,05 \text{ cm}$)
(instrumento analógico)

10

IMF - AULA 2

Incerteza instrumental

Algarismos significativos



$(4,72 \pm 0,05)$ cm

Incerteza
instrumental

- Neste caso, são **3 algarismos significativos** no resultado e **1** na incerteza:
- - **4** e **7**: algarismos *corretos*; **2**: algarismo *duvidoso*
- - **5**: único *algarismo significativo da incerteza*.

IMF - AULA 2

11

Incerteza devido ao método

Quando repetimos as medições, será que todos os resultados caem na faixa das incertezas instrumentais?

Ex.: Todos os valores medidos para 10 oscilações do pêndulo caem entre +/- 0,01 s (res. do cronômetro) ?

Erros Estatísticos ou Aleatórios:

NÃO

- Resultam de **variações aleatórias** no resultado da medição, devido a fatores que não podem ser controlados;
- A estimativa desse erro é chamada de **incerteza estatística**;
- Essa incerteza é obtida por **métodos estatísticos**, como ocorre com o **desvio padrão da média**.

IMF - AULA 2

12

Procedimento Experimental

Aula 02 - 1ª. parte

Cada aluno usará um cronômetro e irá medir **5 vezes** o **tempo de 10 oscilações** do pêndulo colocado na sala, próximo ao professor. (*Tab. 1 - Guia 1-2*)

Resolução do cronômetro (\approx "menor divisão") = **0,01 s**.
Qual será a incerteza de sua medida?

Se repetirmos várias vezes a medição, obteremos sempre o mesmo resultado? **A variação nos valores obtidos será em torno de 0,01 s?**

- Que cuidados devemos tomar para realizar uma boa medição? ...



13

IMF - AULA 2

Procedimento experimental

- Qual será o resultado se utilizarmos um cronômetro com uma **resolução diferente**?
- Cada integrante do grupo deve também medir, pelo mesmo número de vezes, o período de oscilação do pêndulo usando um *relógio de pulso analógico* ou **outro cronômetro com resolução = 1 segundo**. (*Tab. 2 - Guia 1-2*)
- **Ao final, anotar os resultados das medidas de cada um na planilha geral...**

14

IMF - AULA 2

Incerteza devido ao método

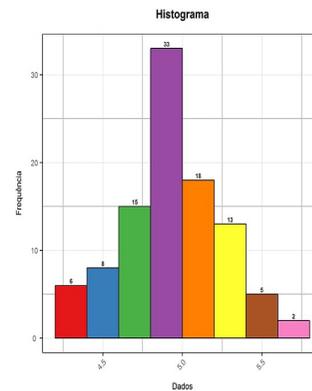
(como representar e analisar os resultados?)

Se o resultado experimental varia a cada nova medida, como representá-lo de forma organizada?

Graficamente:

- Tabelas
- Histogramas

Notas	Frequência (f)	Frequência relativa (f _r)
2,5 + 3,5	8	4%
3,5 + 4,5	22	11%
4,5 + 5,5	35	17,5%
5,5 + 6,5	41	20,5%
6,5 + 7,5	40	20%
7,5 + 8,5	34	17%
8,5 + 9,5	20	10%
Total	200	100%



IMF - AULA 2

Representação de resultados experimentais

Tabelas: itens necessários

Tabela III.1: Alguns valores experimentais para a *constante de gravitação* ao longo dos anos.

- Identificação
- Legenda
- Cabeçalho
- Unidades
- Incertezas

ano	$G \pm \sigma$ ($10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$)
1798	$6,75 \pm 0,05$
1930	$6,670 \pm 0,005$
1988	$6,67259 \pm 0,00085$

IMF - AULA 2

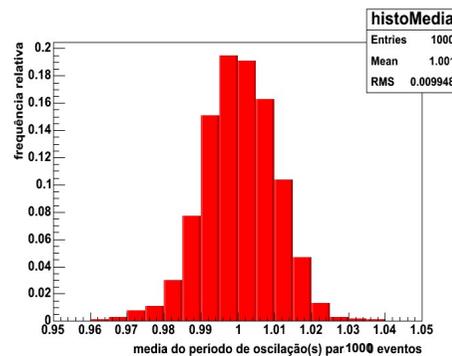
16

Representação de resultados experimentais

Histogramas

Tipo de gráfico onde:

- os **dados** são colecionados em "**canais**" (ou "bins", faixas de valores) de largura conveniente ao longo da abscissa, e...
- nas ordenadas está representado o **nº. de ocorrências (frequência)** dos valores que correspondem a cada canal, ou a **frequência relativa**.

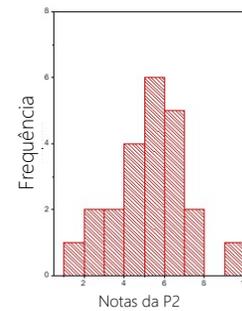


17

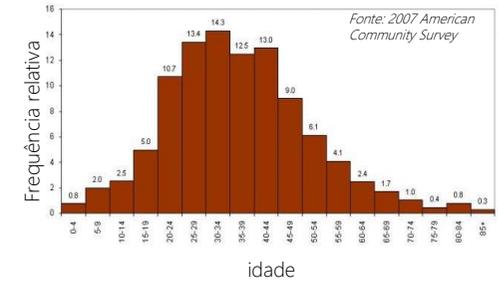
IMF - AULA 2

Representação de resultados experimentais

Histogramas



Distribuição Etária da População Brasileira Imigrante (%) - 2007



Fonte: 2007 American Community Survey

Eixo x (abscissa): intervalos de medidas, também chamados de "canais" ou "bins"

Eixo y (ordenadas): nº. de ocorrências (frequência) ou a frequência relativa (nº. de ocorrências pelo número total de dados N).

Incerteza devido ao método Histogramas

Exemplo:

1ª etapa : decidir a escala e a largura do canal do histograma.

- mínimo : 2 s
- máximo: 7 s
- largura do canal: 1 s

medida	período (s)
1	2,4
2	5,3
3	5,8
4	6,1
5	5,5
6	4,7
7	4,1
8	5,2

IMF - AULA 2

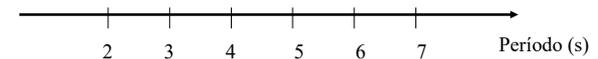
19

Incerteza devido ao método Histogramas

2ª etapa : calcular a *frequência* com que os dados aparecem em cada intervalo.

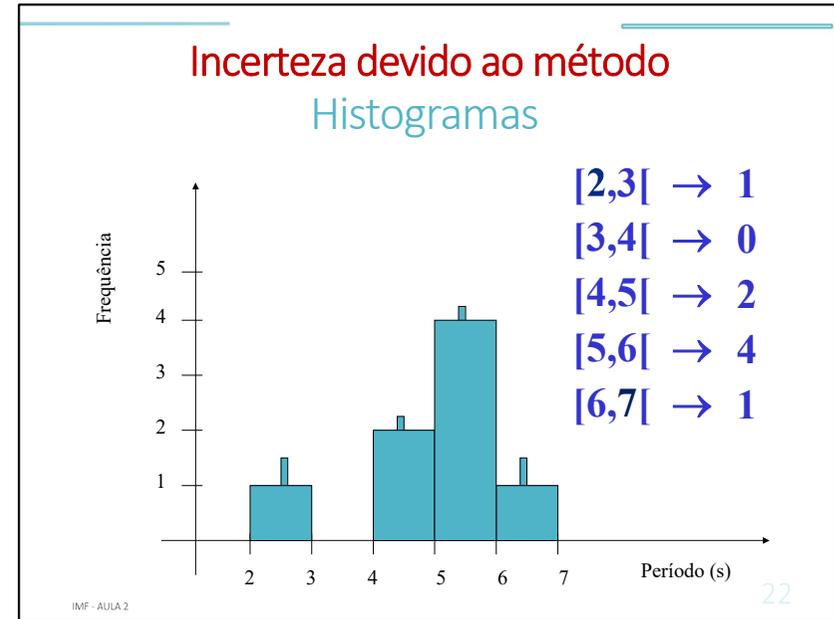
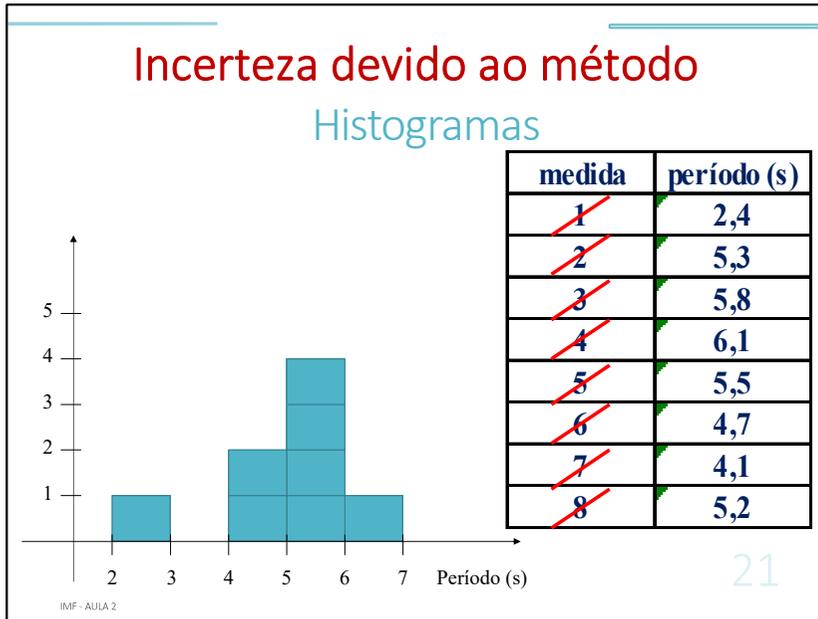
3ª etapa : preencher o histograma.

medida	período (s)
1	2,4
2	5,3
3	5,8
4	6,1
5	5,5
6	4,7
7	4,1
8	5,2



IMF - AULA 2

20



Incerteza devido ao método

Se o resultado experimental varia a cada nova medida, como representá-lo?...

(Outra opção) **Quantitativamente:**

Resultado da medida → **Média:**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

onde N medidas x_i foram realizadas.

Qual seria a média, no exemplo ?

medida	período (s)
1	2,4
2	5,3
3	5,8
4	6,1
5	5,5
6	4,7
7	4,1
8	5,2

Incerteza devido ao método

Quantitativamente:

- **Incerteza** → Indica a Flutuação dos dados
 - **Desvio Padrão:** (\neq desvio médio $\cong 0$)

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

onde N medidas x_i foram realizadas.

- Representa uma “média” (*quadrática*) do módulo da diferença entre as medidas e a média das medidas.
 - Qual seria o desvio padrão, no caso ?

Incerteza devido ao método

Mas, ao aumentar o número de medidas, nosso resultado (**a média**) não deveria ser melhor? Será que o desvio padrão é, de fato, a incerteza *da medida*?

E qual a Incerteza *da média* ? Quantitativamente:

– **Desvio Padrão da Média:**

$$\sigma_m = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

onde N medidas x_i foram realizadas.

Qual seria o desvio padrão da média, no exemplo ?

IMF - AULA 2

25

No exemplo: Medidas de período (T)

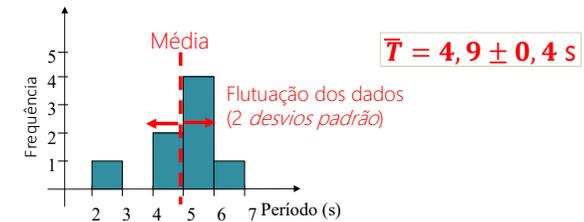
medida	T (s)
1	2,4
2	5,3
3	5,8
4	6,1
5	5,5
6	4,7
7	4,1
8	5,2

Média: $\bar{T} = \frac{\sum_{i=1}^N T_i}{N} = \frac{39,1}{8} = 4,8875 \text{ s}$

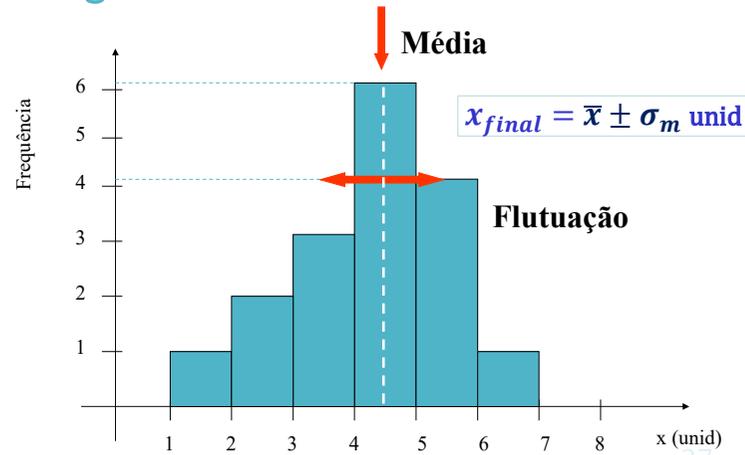
Desvio padrão: $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (T_i - \bar{T})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{9,79}{8-1}} = 1,2 \text{ s}$

Desvio padrão da média: $\sigma_m = \frac{s}{\sqrt{N}} = \frac{1,2}{\sqrt{8}} = 0,4 \text{ s}$

Representação final do resultado:



Representação dos Dados Histogramas



IMF - AULA 2

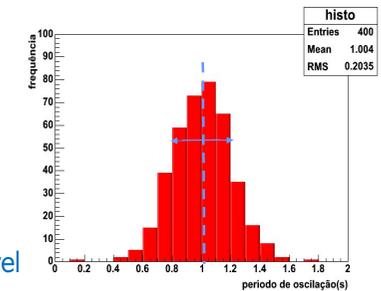
27

Erros Estatísticos ou Aleatórios

A princípio, que características deveríamos esperar para a **distribuição dos dados** obtidos?

R.: Simétrica em torno de um certo valor, e decrescer ao se afastar desse valor.
(~curva gaussiana)

Valor médio = valor mais provável

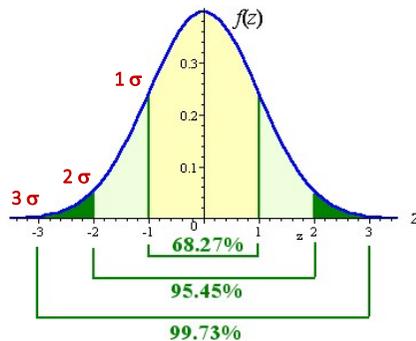


IMF - AULA 2

28

Interpretação de distribuições gaussianas - probabilidades

Grandezas físicas sujeitas a **erros aleatórios** costumam se distribuir de forma **simétrica** próxima a uma gaussiana (distribuição normal ou de Gauss)

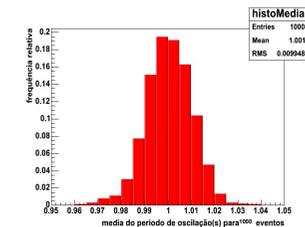
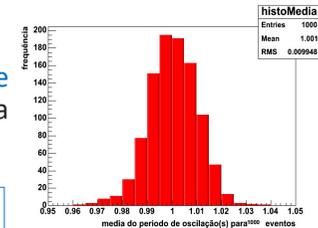


$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

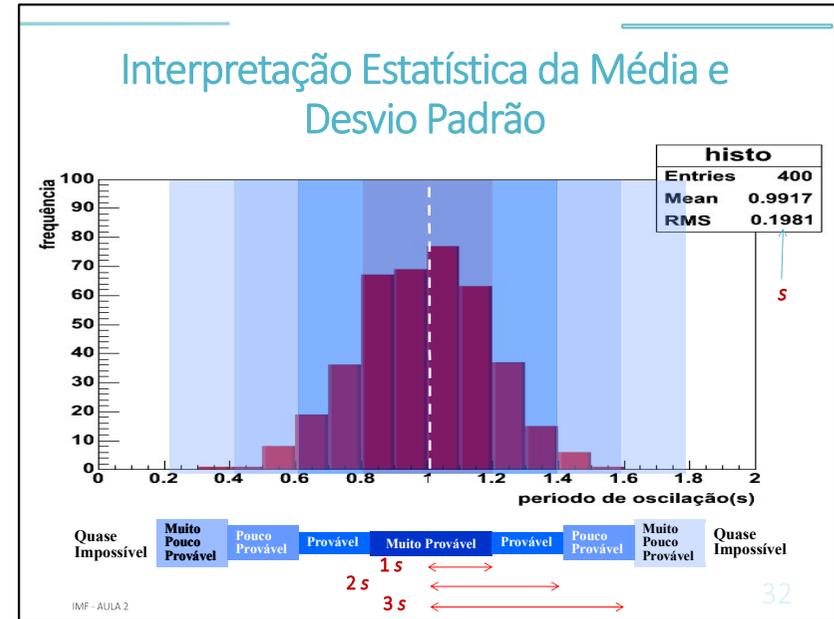
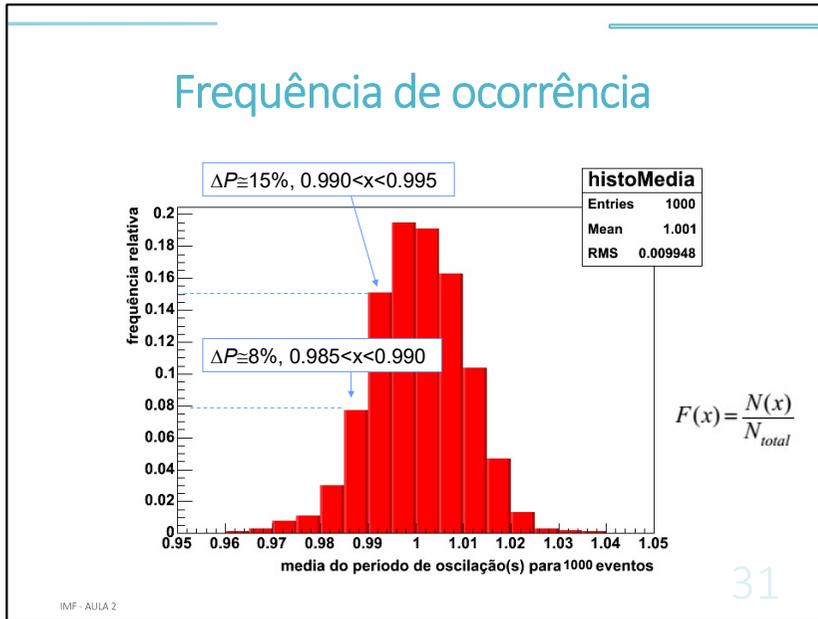
Distribuição normal
 $z = (x - \mu)/\sigma$

Frequência de ocorrência

- Qual o significado da **frequência de ocorrência**? Como ela é calculada a partir dos dados medidos?
- Opção: **Frequência relativa** $F(x) = \frac{N(x)}{N_{total}}$
- Podemos dizer que a **frequência relativa de cada canal** representa a **probabilidade de se obter uma medida entre o limite inferior e o limite superior do canal**.

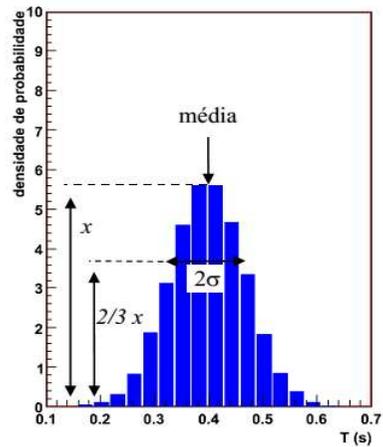


IMF - AULA 2



Interpretação Estatística da Média e Desvio Padrão

Obtenção de **média** e **desvio padrão** a partir da análise gráfica do histograma

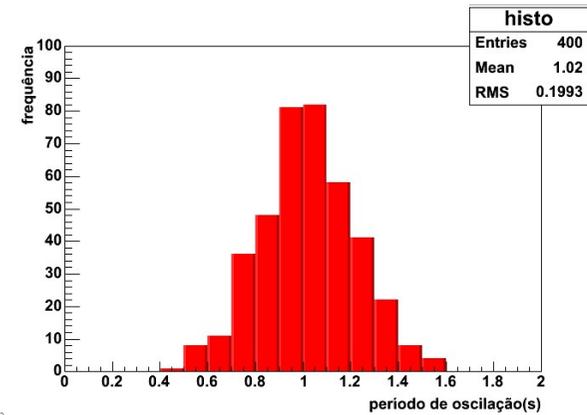


IMF - AULA 2

3

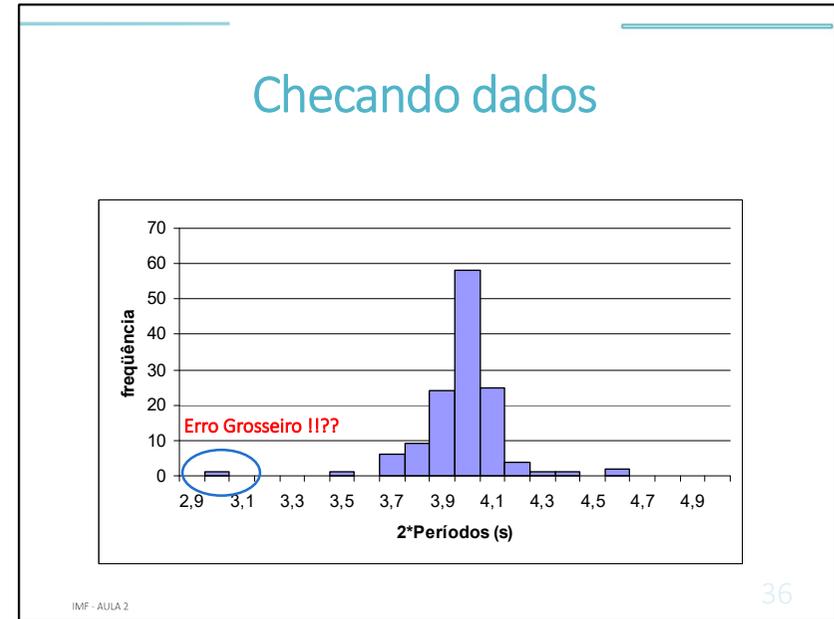
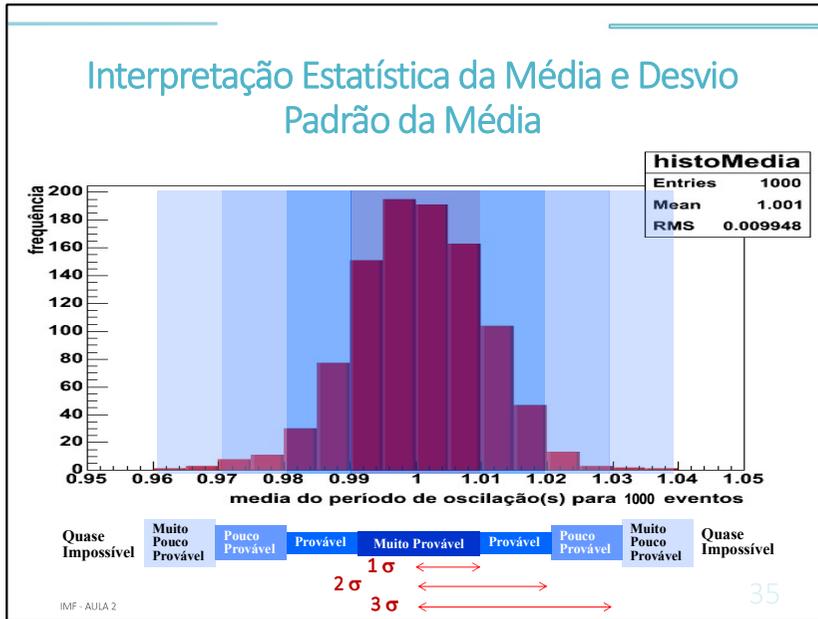
Média e Desvio Padrão da Média

A média e o desvio padrão da média são suficientes para descrever e distinguir um conjunto de dados?



IMF - AULA 2

34



Propriedades Gráficas

Média

Valor mais provável

Desvio Padrão (σ)

1/2 largura a 2/3 da altura máxima

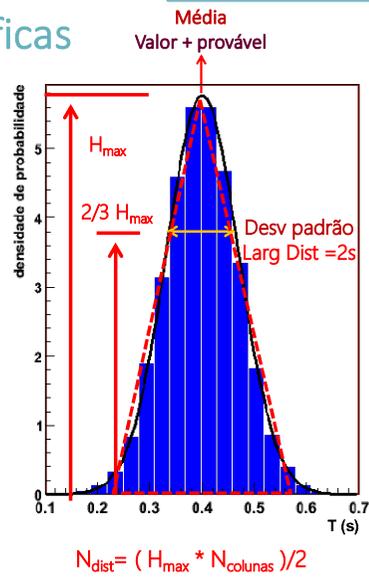
Incerteza da média

Incerteza estatística

Desvio padrão/raiz(N)

Total aproximado de eventos N:

(\approx Área de triângulo para aproximação de N)



Interpretação Estatística da Média e Desvio Padrão

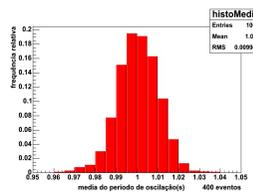
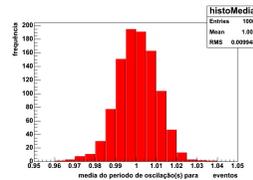
Exercício – aula 02 - em sala

IMF - AULA 2

38

Como construir um histograma

1. Escolher convenientemente a *largura dos canais do histograma, Δx* .
2. Escolher os *centros de cada canal, sem espaços vazios entre os canais*.
3. Contar o *nº. de ocorrências* para cada um dos canais, **N(x)** (*histograma de nº. de ocorrências*). Ocorrências na borda entre dois canais irão pertencer ao canal cujo centro tenha maior valor.
4. Para construir o *histograma de frequências relativas, F(x)*, dividir N(x) pelo total de medidas efetuadas.
5. Para construir o *histograma de densidade de probabilidades, H(x)*, dividir F(x) por Δx .



$$F(x) = \frac{N(x)}{N_{total}}$$

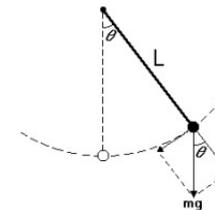
39

IMF - AULA 2

Período de um pêndulo simples

Um modelo bastante comum utilizado para relacionar o período T de um pêndulo com seu comprimento L é chamado de modelo do pêndulo simples e baseia-se nas seguintes hipóteses:

- a. o pêndulo é constituído por um ponto material suspenso por um fio inextensível e sem massa;
- b. apenas as forças peso e tração agem sobre o ponto material;
- c. utiliza-se ângulos de abertura pequenos ($\theta < 15^\circ$), tal que seja válida a aproximação $\sin(\theta) \sim \theta$ (em radianos), onde θ é o ângulo entre o fio e a vertical, durante a oscilação (figura 2.2).



Com base nessas hipóteses, pode-se deduzir a seguinte relação entre T e L:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (1)$$

onde g é a aceleração da gravidade.

40

IMF - AULA 1

Procedimento Experimental – 2ª. parte

Análise dos Dados

- I) Preencha a **tabela** (planilha geral) **com os dados coletados por todos os colegas da sala** com resolução de **0,01 s**;
- Calcule a **média, desvio padrão e desvio padrão da média** dos dados usados para fazer o histograma; - **USE UMA PLANILHA.**
- II) Construa (em papel milimetrado) **2 histogramas de frequência de ocorrência dos dados**, seguindo as instruções (**só para cronômetro de 0,01 s**) com:
 - os **dados do seu grupo**; (dica de como fazer no Excel: <https://youtu.be/ufQbAEixyuE>)
 - os **dados de toda a sala.**
- Como os valores numéricos medidos se comparam com os histogramas?

IMF - AULA 2

41

Análise dos Dados

- III) **Determine** a **média, o desvio padrão e o desvio padrão da média** de suas medidas com **cronômetro de resolução 0,01 s usando o histograma do seu grupo.**
- Repita para o **histograma da sala.**
- **Compare os resultados gráficos com os calculados.**
- IV) **Calcule** a **média, o desvio padrão e o desvio padrão da média** de suas medidas com **cronômetro de resolução 1 s.**
- Como se compara o desvio padrão obtido nestas medidas com aquele obtido com o cronômetro de 0,01 s? O que você pode concluir?

IMF - AULA 2

42

Comparação com o modelo

- **V)** O valor medido experimentalmente e o valor obtido através da expressão matemática do modelo são iguais?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

- Como é possível compará-los?
- Meça o comprimento do pêndulo da sala.
 - A medida do comprimento tem incerteza?
- Como você acha que isso vai afetar o valor do período obtido pela expressão matemática?

IMF - AULA 2

43

Para a próxima aula (31/03):

- Entrega do **Guia 1.2** (um por grupo)
- No Moodle (aba Experimento # 1 - Pêndulo simples):
Exercício **individual** (até dia 31/03).