7600053 - Introdução à Física de Partículas e Campos (2023)

Relatividade Restrita

Material baseado no Cap. 3 do Griffiths, complementado por algumas analogias com rotações e considerações gerais.

Transformação de Lorentz

Para garantir que as leis físicas sejam as mesmas para qualquer referencial inercial, é suficiente impor a seguinte transformação de coordenadas x, y, z, t de um sistema S para um sistema S', movendo-se com velocidade v em relação a S' (ao longo da direção x).

De acordo com a *transformação de Lorentz*, as coordenadas x', y', z', t' no sistema S' são dadas em termos de x, y, z, t por

$$
\begin{aligned}
x' &= \gamma(x - vt)\,, && (1)\\
y' &= y\,, && (2)\\
z' &= z\,, && (3)\\
t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)\,, && (4)
\end{aligned}
$$

onde c é a *velocidade da luz* e o fator γ é um número positivo —maior[1] do que 1— dado por $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Como seria esperado, as transformações acima tomam a forma familiar das transformações de Galileu no limite em que $v \ll c$.

Claramente, essas relações podem ser invertidas, fornecendo

$$
\begin{aligned}
x &= \gamma(x' + vt')\,, && (5)\\
y &= y'\,, && (6)\\
z &= z'\,, && (7)\\
t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)\,. && (8)
\end{aligned}
$$

Note que as equações "invertidas" correspondem a considerar o referencial S' em repouso e o referencial S se movendo no eixo x-x' com velocidade $-v$. Faz sentido, né!

[1] Sim, vamos supor/concluir que c é a maior velocidade permitida. Vamos também constatar (veja a quarta consequência das transformações de Lorentz, mais abaixo) que c é a mesma para qualquer referencial inercial.

Agora use as relações (1)–(8) e deduza as seguintes **consequências** bizarras da transformação de Lorentz.

(i) A **simultaneidade** é um conceito relativo! Ter $t_A = t_B$ para eventos A e B *não* implica ter $t'_A = t'_B$ (a não ser que os eventos aconteçam no mesmo ponto, i.e. quando $x_A = x_B$). Verifique, usando a Eq. (4) acima, que

$$t'_A \;=\; t'_B + \frac{\gamma v}{c^2}(x_B - x_A)\,. \tag{9}$$

(ii) Um objeto em movimento (ou seja, em repouso em S') sofre **contração de Lorentz** ao ser observado em S. Verifique, usando a Eq. (1), que o comprimento observado L de uma régua em movimento, de comprimento L' e orientada horizontalmente, é dado por

$$L \;=\; L'/\gamma\,. \tag{10}$$

Dica: suponha que as extremidades da régua sejam medidas simultaneamente no sistema S e relacione as posições dessas medidas com o comprimento observado.

O comprimento real (no caso, L') do objeto, medido em seu referencial de repouso, é chamado de *comprimento próprio*. Note que os eventos de medir ambas as extremidades da régua, anotando suas posições no sistema S, não serão simultâneos para alguém em S', e estarão separados por L'. Obtenha assim alternativamente a Eq. (10), partindo das Eqs. (4) e (5).

(iii) A duração t medida em S para um evento que ocorre em S' com duração τ —chamado de *tempo próprio*— sofre **dilatação temporal**, sendo dada por

$$t \;=\; \gamma\tau\,. \tag{11}$$

Verifique a expressão acima, a partir da Eq. (8). É comum resumir esse efeito dizendo que relógios em movimento se atrasam, funcionam mais devagar, e os eventos duram mais. Por exemplo, uma partícula relativística instável "vive" mais antes de decair, viajando por um percurso mais longo do que o esperado, explicando como múons conseguem atravessar a atmosfera e ser observados ao nível do mar. Em compensação, do ponto de vista do múon, sua vida será "mais curta", mas a distância percorrida também parecerá menor, pois sofrerá efeito da contração de Lorentz! ;-)

Alternativamente, obtenha o resultado (11) considerando que diferença entre as posições de início e final do evento vistas em S pode ser obtida pela Eq. (5), e então substituída na Eq. (4) para fornecer a duração t observada.

(iv) A **adição de velocidades** obedece à relação

$$u \;=\; \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}\,. \tag{12}$$

Verifique a relação acima a partir de $u = dx/dt$, usando as Eqs. (5) e (8).

Note que, de acordo com a Eq. (12), a velocidade u de um objeto em relação ao solo é dada pela soma de sua a velocidade u' em relação ao sistema S' e a velocidade v do sistema em relação ao solo (como esperado no limite não relativístico), porém dividindo-se a expressão por um fator de correção. Em particular, se o objeto em questão tiver velocidade c, ela será a mesma em qualquer sistema S', como pode ser visto tomando u (ou u') igual a c. Da mesma forma, a adição de velocidades jamais fornece valor superior a c, como pode ser visto tomando-se o caso extremo $u' = v = c$: em vez de $u = 2c$, como resultaria se tivéssemos apenas a expressão no numerador, obtemos $u = c$. Esses resultados "bizarros" não devem parecer surpreendentes, já que podem inclusive ser usados como ponto de partida para derivar a transformação de Lorentz. Nesse sentido, eles não são simples consequências da transformação, eles estavam "embutidos" em nossa afirmação inicial de que as leis físicas devem ser as mesmas para qualquer referencial inercial!

Quadrivetores

Podemos representar a transformação de Lorentz, que relaciona as coordenadas com e sem "linha" na forma matricial, associando a variável temporal e as componentes do vetor posição $\mathbf{r} = (x, y, z)$ a um *quadrivetor* posição espaço-temporal, com componentes definidas por

$$x^0 \equiv ct\,,\ x^1 \equiv x\,,\ x^2 \equiv y\,,\ x^3 \equiv z\,. \tag{13}$$

A transformação de coordenadas fica escrita, assim, para cada componente μ do quadrivetor x (sendo $\mu = 0, 1, 2, 3$), na forma compacta

$$x^{\mu\prime} \;=\; \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^{\mu}_{\nu}\, x^{\nu} \;\equiv\; \Lambda^{\mu}_{\nu}\, x^{\nu}\,, \tag{14}$$

onde introduzimos na última passagem a *convenção de soma de Einstein* (i.e. índices repetidos são somados, como variável "muda") e a matriz Λ é dada por

$$\Lambda \;=\; \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \tag{15}$$

com $\beta \equiv v/c$. Você deve verificar que a expressão compacta definida acima, i.e. a aplicação da matriz Λ ao quadrivetor do sistema S, reproduz as relações vistas anteriormente para obter as coordenadas no sistema S'.

Analogia com Rotações

De certa forma, a transformação acima se parece com uma "rotação" envolvendo as primeiras duas componentes do quadrivetor x: o tempo e a coordenada[2] x. De fato, a mudança nas coordenadas de um vetor bidimensional $\mathbf{r} = (x, y)$ para um sistema com eixos dados por uma rotação (por ângulo θ) dos eixos originais pode ser representada pela multiplicação do vetor original por uma matriz[3]

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} . \tag{16}$$

A aplicação de R "mistura" as coordenadas originais do vetor no sistema rodado. Por exemplo, um vetor $\mathbf{r} = (1, 0)$, originalmente na direção x, passará a ter coordenadas $(\cos\theta, -\sin\theta)$ (correspondendo a rodar o vetor no sentido oposto ao dos eixos). Para um vetor $\mathbf{r}$ em três dimensões, a rotação acima afetaria apenas as duas primeiras coordenadas, e escreveríamos a matriz R como

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \tag{17}$$

ilustrando que a terceira direção não participa da rotação e tornando R bastante semelhante à matriz (quadridimensional) Λ, da Eq. (15). Ok, devemos notar que a matriz Λ é simétrica, enquanto R é antissimétrica. Ao mesmo tempo, a "inversa" de uma rotação é obtida trocando o sinal dos elementos com seno (ou seja, tomando uma rotação por ângulo $-\theta$) e a inversa da transformação de Lorentz trocando o sinal da velocidade, ou seja tomando $\beta \to -\beta$. Nos dois casos teremos uma matriz com sinal invertido para os elementos fora da diagonal. Além disso, as duas matrizes têm determinante 1. Parece que temos mais semelhanças[4] do que diferenças ;-)

Exercício: nos dois casos, o vetor no sistema transformado é obtido multiplicando o vetor original pela matriz de transformação: $R(\theta)$ na rotação ou $\Lambda(\beta)$ na transformação de Lorentz. A realização de duas transformações sucessivas equivale a aplicar ao vetor original o *produto* das duas matrizes de transformação, que corresponde à matriz da transformação resultante. Claramente, realizar a transformação inversa após uma dada transformação deve restaurar a situação original. Verifique, então, que tanto a transformação conjunta $R(-\theta)\,R(\theta)$ quanto $\Lambda(-\beta)\Lambda(\beta)$ correspondem à matriz identidade. A diferença é que R é uma matriz ortogonal, ou seja sua inversa é também a sua transposta, o que não vale para Λ.

[2] Vamos utilizar, de agora em diante, a letra x para indicar tanto a coordenada x^1 quanto o quadrivetor posição, e o símbolo $\mathbf{x}$ ou $\mathbf{r}$ para o vetor posição espacial!

[3] Note que a matriz de rotação usual, com sinal invertido para os senos, corresponde a manter os eixos fixos e rodar as coordenadas do vetor (rotação ativa). Aqui estamos considerando uma rotação passiva, rodando os eixos e mantendo o vetor fixo. As duas estão relacionadas por $\theta \to -\theta$.

[4] Ainda não se convenceu? Faça em (15) a mudança de variáveis $\beta = \tanh\phi$, que implica $\gamma = \cosh\phi$. Suponha agora um ângulo imaginário $\phi = i\theta$ e reescreva a transformação considerando "tempo euclidiano", i.e. variável temporal dada por ict. Como ficou a expressão para Λ? (OMG!)

Seguindo nossa analogia, esperaríamos ter para o quadrivetor uma grandeza invariante sob a transformação, como o módulo de $\mathbf{r}$ em relação a rotações. De fato, o módulo quadrado de $\mathbf{r}$, dado pelo produto escalar do vetor com ele mesmo ou, em linguagem matricial, pelo produto do vetor transposto pelo vetor original, é independente do sistema, já que

$$|\mathbf{r}'|^2 \,=\, x'^2 + y'^2 + z'^2 \,=\, \mathbf{r}'^T\mathbf{r}' \,=\, (R\,\mathbf{r})^T\,R\,\mathbf{r} \,=\, \mathbf{r}^T(R^TR)\,\mathbf{r} \,=\, \mathbf{r}^T\mathbf{r} \,=\, x^2+y^2+z^2 \,=\, |\mathbf{r}|^2\,, \tag{18}$$

onde T indica transposto.

No caso da transformação de Lorentz, devemos definir o "módulo" do vetor de forma peculiar, impondo para o equivalente do vetor transposto acima que suas coordenadas espaciais tenham sinal invertido, ou seja

$$x^2 \,=\, x\cdot x \equiv\, x_\mu\, x^\mu \,=\, c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2\,, \tag{19}$$

onde

$$x_0 \equiv ct\,,\ x_1 \equiv -x\,,\ x_2 \equiv -y\,,\ x_3 \equiv -z\,. \tag{20}$$

Será que isso faz sentido? A grandeza definida acima é de fato invariante, pois temos

$$x'^2 \,=\, x'\cdot x' \,=\, c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \,=\, c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \,=\, x\cdot x \,=\, x^2\,, \tag{21}$$

como pode ser testado diretamente a partir das expressões para as coordenadas linha, Eqs. (1)–(4). Em particular, ela é nula se as coordenadas correspondem à propagação da luz, já que $\mathbf{r}^2 = c^2t^2$ descreve a evolução temporal de uma frente de onda esférica com velocidade c.

Para estender nossa discussão, verifique que o novo vetor de coordenadas x_μ se transforma de S para S' por meio da matriz $\widetilde{\Lambda} \equiv \Lambda(-\beta)$, ou seja,

$$x'_\mu \,=\, \widetilde{\Lambda}^\nu_\mu\, x_\nu\,, \tag{22}$$

onde

$$\widetilde{\Lambda} \,=\, \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,. \tag{23}$$

Teremos, então

$$x'^2 \,=\, x'\cdot x' \,=\, x'_\mu\, x^{\mu\prime} \,=\, \widetilde{\Lambda}^\nu_\mu\, x_\nu\, \Lambda^\mu_\eta\, x^\eta \,=\, x_\nu\, (\widetilde{\Lambda}^T\Lambda)^\nu_\eta\, x^\eta \,=\, x_\nu\, x^\nu \,=\, x\cdot x \,=\, x^2\,, \tag{24}$$

onde usamos que $\widetilde{\Lambda}^T = \widetilde{\Lambda} = \Lambda^{-1}$. Note que precisamos introduzir acima a transposta de $\widetilde{\Lambda}$, para poder associar o índice repetido μ respectivamente a colunas da primeira e linhas da segunda matriz no produto. Essa sutileza ficaria clara escolhendo uma notação mais detalhada para as matrizes de transformação, associando a ordem dos índices a linhas e colunas. Tal notação é utilizada em alguns livros-textos. Nesse caso, teríamos $\Lambda^\mu{}_\nu$ em (15) e $\widetilde{\Lambda}_\mu{}^\nu = (\widetilde{\Lambda}^T)^\nu{}_\mu$ em (22), facilitando a obtenção da Eq. (24).

A passagem do vetor com índices superiores x^μ para seu correspondente "covetor", ou vetor dual, de componentes x_μ, pode ser representada em termos do chamado *tensor métrico* g, da seguinte forma

$$x_\mu \,=\, g_{\mu\nu}\, x^\nu \,, \tag{25}$$

onde g é a matriz diagonal $(1, -1, -1, -1)$. Dizemos que a aplicação de g "abaixa" os índices, produzindo o análogo do vetor transposto $\mathbf{r}^T$ na Eq. (18), i.e. o objeto apropriado para definirmos grandezas *escalares*, ou invariantes pela transformação de Lorentz, a partir de um quadrivetor. Tais grandezas são obtidas quando índices superiores e inferiores correspondentes são "contraídos" através de uma soma, de maneira análoga ao produto escalar de vetores usuais. Note que g é claramente invariante, e é a sua própria inversa, podendo assim ser usado também para "levantar" índices, i.e. temos

$$x^\mu \,=\, g^{\mu\nu}\, x_\nu \,, \tag{26}$$

onde adotamos agora a notação com dois índices superiores para a matriz diagonal g. Dessa forma temos consistência entre os índices "livres" (não contraídos) em cada expressão e as propriedades de transformação do objeto a eles relacionado. O número de índices livres revela o *posto* do objeto —ou *tensor*— em questão. Um escalar é um tensor de posto nulo, um quadrivetor tem posto 1, e assim por diante.

Podemos agora extrair/resumir algumas **propriedades** gerais interessantes do material desenvolvido acima.

- Um quadrivetor propriamente dito —também chamado de quadrivetor *contravariante*— é um objeto que se transforma de S para S' como x^μ, i.e. de acordo com a Eq. (14). Mais em geral, podemos *definir* um quadrivetor a como um objeto que sofre a transformação

$$a^{\mu\prime} \,=\, \Lambda^\mu_\nu\, a^\nu \tag{27}$$

  quando "traduzido" de S para S'.

- Por outro lado, esperamos que o covetor de a^μ —chamado de quadrivetor *covariante*— cujas componentes a_μ serão dadas por

$$a_\mu \,=\, g_{\mu\nu}\, a^\nu \,, \tag{28}$$

  se transforme sob a matriz $\widetilde{\Lambda}$, como dado na Eq. (22) para x_μ. De fato, temos

$$a'_\mu \,=\, g_{\mu\nu}\, a^{\nu\prime} \,=\, g_{\mu\nu}\, \Lambda^\nu_\eta\, a^\eta \,=\, g_{\mu\nu}\, \Lambda^\nu_\eta\, g^{\eta\alpha}\, a_\alpha \,=\, (g\Lambda g)^\alpha_\mu\, a_\alpha \,=\, \widetilde{\Lambda}^\alpha_\mu\, a_\alpha \,, \tag{29}$$

  como esperado.

- Fica claro, então, que o invariante $x \cdot x = x_\mu\, x^\mu$, obtido anteriormente para o quadrivetor posição, é apenas um caso especial de *produto escalar*, dado para o caso de dois quadrivetores genéricos a e b por

$$a \cdot b \,\equiv\, a_\mu\, b^\mu = a^\mu\, b_\mu \,. \tag{30}$$

O produto escalar é um invariante de Lorentz, i.e. gera objetos escalares através da contração apropriada de índices superiores e inferiores. De fato, como na Eq. (24) acima, temos

$$a' \cdot b' \,=\, a'_\mu \, b^{\mu\prime} \,=\, a_\nu \, (\widetilde{\Lambda}^T \Lambda)^\nu_\eta \, b^\eta \,=\, a_\nu \, b^\nu \,=\, a \cdot b \,. \tag{31}$$

- Em particular, para todo quadrivetor temos o invariante dado por seu módulo $a^2 = a_\mu a^\mu$. (Note que, ao contrário do módulo usual, a grandeza a^2 pode ser negativa.) Por analogia com o quadrivetor posição em (21), classificamos os quadrivetores como: tipo tempo, se $a^2 > 0$; tipo luz, se $a^2 = 0$ e tipo espaço, se $a^2 < 0$.

Note: Se quisermos reproduzir para o produto escalar de quadrivetores a notação matricial utilizada em (18), basta definir o quadrivetor dual $\widetilde{x} \equiv gx$, e escrever o invariante x^2 como $\widetilde{x}^T x$, i.e. tomamos x como "vetor coluna" e seu covetor $\widetilde{x}$ como "vetor linha". Temos, assim,

$$\begin{aligned} x'^2 \,=\, (\widetilde{x}^T x)' \;&=\; (g\,x')^T x' \,=\, (g\,\Lambda\,x)^T \Lambda\,x \,=\, x^T \Lambda^T g^T \Lambda\,x \,=\, x^T (g^T g)\,\Lambda^T g^T \Lambda\,x \\ &=\; (g\,x)^T (g\,\Lambda\,g) \Lambda\,x \,=\, \widetilde{x}^T \Lambda^{-1} \Lambda\,x \,=\, \widetilde{x}^T x \,=\, x^2 \,, \end{aligned} \tag{32}$$

onde usamos que $g^T = g^{-1}$ e que tanto Λ quanto g são simétricas. Vemos que o produto escalar envolve um vetor transposto, como no caso das rotações, mas tal vetor é obtido pela aplicação adicional da matriz g. Podemos pensar no vetor $\widetilde{x}^T$ como elemento de um espaço dual, em que a transformação de Lorentz é dada pela matriz $\widetilde{\Lambda}^T$, agindo sobre o vetor linha pela direita. Nesse sentido, temos também uma certa analogia com o conceito de kets (vetores do espaço de Hilbert) e bras (vetores do espaço dual) da mecânica quântica: o objeto dual é definido de forma que a combinação dele com o vetor original seja um escalar.

Colisões

Para podermos agora analisar colisões de interesse para a física de partículas, vamos precisar de uma definição relativística para o momento $\mathbf{p}$ e a energia (cinética). O ideal é que o momento seja associado a um quadrivetor, pois assim estará garantida a preservação da lei da conservação do momento total em colisões para qualquer referencial. Por exemplo, se tivermos $p_A + p_B = p_C + p_D$ (colisão de partículas A, B gerando C, D) em S, será trivialmente verdade que $p'_A + p'_B = p'_C + p'_D$, por simples aplicação de Λ aos dois lados da expressão original! Note que a conservação é válida separadamente para cada coordenada p^μ do quadrivetor momento total, sendo $\mathbf{p}$ associado apenas à parte vetorial. Resumindo, temos as perguntas: 1) Como definir $\mathbf{p}$, a partir da massa (tomada como invariante) e da velocidade, de modo que ele faça parte de um quadrivetor? e 2) Qual o significado da componente p^0 que será associada a $\mathbf{p}$ para formar esse quadrivetor?

O quadrivetor desejado é dado por

$$p \,=\, m\,\gamma\,\frac{dx}{dt} \,=\, m\,\gamma\,(c, \mathbf{v})\,, \tag{33}$$

onde γ se refere à velocidade $\mathbf{v}$ da partícula estudada e x é seu quadrivetor posição.

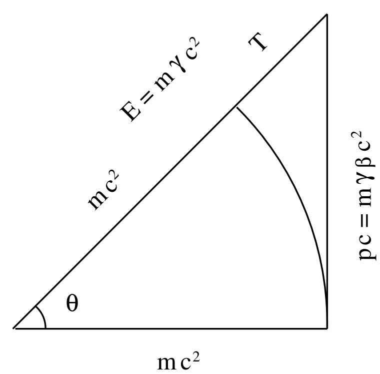
Vejamos por que essa definição é apropriada. Temos claramente um quadrivetor, com propriedades de transformação dadas pelas de dx, já que a grandeza $dt/\gamma = d\tau$ no denominador é um invariante [τ é o tempo próprio, introduzido em (11)]. Além disso, a definição se reduz à usual no limite de baixas velocidades, em que $\gamma \approx 1$. Note que o módulo p^2 é um invariante, como esperado, dado por $m^2\gamma^2(c^2 - v^2) = m^2c^2$.

Ok, e qual o significado da coordenada $p^0 = m\gamma c$? Com base em sua dimensão, vamos chamá-la temporariamente de E/c, e tentar associá-la à energia cinética da partícula. Tomando o limite não relativístico $v \ll c$ e mantendo apenas a ordem mais baixa em v/c, temos

$$E \,=\, m\,\gamma\,c^2 \,\approx\, m\,c^2\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right) \,=\, m\,c^2 + \frac{mv^2}{2}\,. \tag{34}$$

Obtivemos, portanto, o resultado notável de que E pode ser associada à energia cinética da partícula no limite não relativístico, acrescida de uma *energia de repouso* mc^2, fixa e invariante. Vamos então adotar esse novo "zero" de energia (que na verdade é enorme!) incorporando-o por uma redefinição da energia da partícula, como uma parcela escondida de sua energia total. A energia cinética no caso geral será dada por $T = E - mc^2 = mc^2(\gamma - 1)$.

Resumindo: as colisões relativísticas serão estudadas impondo conservação do *quadrivetor energia-momento* $p = (E/c, \mathbf{p})$ total, sendo invariante a grandeza $p^2 = m^2c^2 = E^2/c^2 - \mathbf{p}^2$. Essa expressão define a relação entre energia e momento relativísticos, que pode ser ilustrada por meio da figura abaixo.



Vamos exemplificar a utilidade das expressões desenvolvidas acima, nos casos mais simples de processos de decaimento e colisão. Note a **semelhança** entre os dois casos.

Exemplo 1: Uma partícula de massa m_1 decai em duas outras partículas, de massas m_2 e m_3. Calcule o momento de cada partícula emergente no referencial do centro de massa.

> Primeiramente, vamos escrever o quadrivetor momento para as três partículas em relação ao centro de massa, notando que deve haver conservação do quadrimomento total, i.e. deve valer $p_1^\mu = p_2^\mu + p_3^\mu$ para cada componente μ.

Temos então

$$
\begin{aligned}
p_1 &= (m_1 c,\, 0)\,, &(35)\\
p_2 &= (E_2/c,\, \mathbf{p})\,, &(36)\\
p_3 &= (E_3/c, -\mathbf{p})\,, &(37)
\end{aligned}
$$

sendo

$$E_2 + E_3 \,=\, m_1\, c^2\,. \tag{38}$$

Lembrando agora que o módulo quadrado de um quadrimomento é um invariante de Lorentz, dado para uma partícula de massa m por $m^2 c^2$, podemos escrever

$$p_3^2 \,=\, m_3^2\, c^2 \,=\, (p_1 - p_2)^2 \,=\, p_1^2 + p_2^2 - 2\, p_1 \cdot p_2 \,=\, m_1^2\, c^2 + m_2^2\, c^2 - 2\, m_1\, E_2\,. \tag{39}$$

Isolando $E_2 = \sqrt{m_2^2\, c^4 + \mathbf{p}^2 c^2}$ acima e tomando o quadrado dos dois lados, obtemos

$$|\mathbf{p}| \,=\, \frac{c}{2\, m_1}\, \sqrt{m_1^4 + m_2^4 + m_3^4 - 2\, m_1^2\, m_2^2 - 2\, m_1^2\, m_3^2 - 2\, m_2^2\, m_3^2}\,. \tag{40}$$

Note que a expressão dentro da raiz (simétrica em m_1, m_2, m_3) pode também ser escrita como $[m_1^2 - (m_2 + m_3)^2][m_1^2 - (m_2 - m_3)^2]$, ilustrando a relação entre as massas. Em particular, para que a raiz seja bem definida deve valer a condição $m_1 > m_2 + m_3$, como esperado.[5]

Exemplo 2: Considere agora a colisão de duas partículas, de energias respectivamente E_1 e E_2 em relação ao centro de massa. Se os produtos da colisão forem duas partículas, de massas m_3 e m_4, qual será o momento de cada uma delas em relação ao centro de massa?

Como acima, vamos escrever o quadrivetor momento (no centro de massa) para as partículas envolvidas

$$
\begin{aligned}
p_1 &= (E_1/c,\, \mathbf{p}_i)\,, &(41)\\
p_2 &= (E_2/c, -\mathbf{p}_i)\,, &(42)\\
p_3 &= (E_3/c, \mathbf{p}_f)\,, &(43)\\
p_4 &= (E_4/c, -\mathbf{p}_f)\,, &(44)
\end{aligned}
$$

onde impusemos a conservação do (tri)momento. Para obter $|\mathbf{p}_f|$, basta notar que o quadrimomento inicial total $p_1 + p_2$ é exatamente análogo ao caso anterior!

[5]Na verdade, precisamos primeiro argumentar que o fator $m_1^2 - (m_2 - m_3)^2$ é positivo, e portanto o sinal da expressão dentro da raiz será determinado por $m_1^2 - (m_2 + m_3)^2$. Isso é garantido notando que devemos ter $m_1 > m_2$ e $m_1 > m_3$ para que sejam positivas as energias E_2 e E_3, facilmente obtidas pelas Eqs. (39) e (38). Esse ponto não está muito claro no enunciado do Ex. 3.19 do Griffiths, e há também um erro na expressão para $|\mathbf{p}|$.

De fato, temos

$$p_{tot} \;=\; p_1 + p_2 \;=\; \left(\frac{E_1 + E_2}{c},\, 0\right) \;=\; p_3 + p_4\,. \tag{45}$$

Podemos então reescrever a Eq. (39) para $p_3 = p_{tot} - p_4$ e o resultado para $|\mathbf{p}_f|$ será obtido diretamente da Eq. (40) substituindo m_1 por $(E_1 + E_2)/c^2$ e m_2 por m_4. Simples assim!