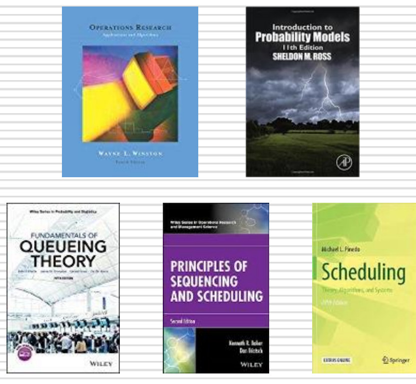
3. Teoria de Filas

Agenda:

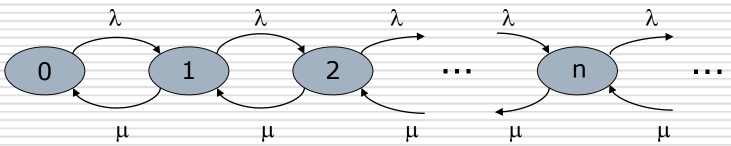
- *M/M/1*
- *M/M/c*
- *M/M/c//K/∞ (fila limitada)*
- *M/M/c//∞/K (população finita)*
- *M/G/∞*
- *M/G/1*
- *Redes de Filas*
- *Teoria de Scheduling*

Winston (2004, cap.20)



20.4 Fila *M/M/1*

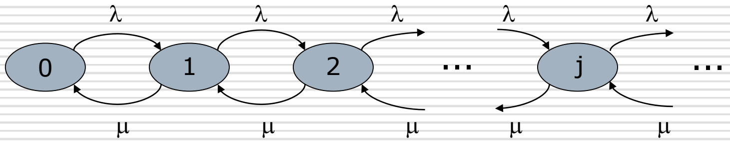
- A fila *M/M/1* pode ser modelada como um processo de nascimento e morte com taxa de chegada (λ) e taxa de atendimento (μ) constantes.



- Seja $\rho = \lambda / \mu$ o **índice de congestionamento**:
  - Se $\rho < 1$, então o sistema é ergódico e terá uma distribuição estacionária
  - Senão, a fila cresce continuamente e não há distribuição estacionária (não ergódico).

4

Distribuição Estacionária



$$\mu\pi_1 = \lambda\pi_0$$

$$\mu\pi_2 = \lambda\pi_1$$

$$\ldots$$

$$\mu\pi_j = \lambda\pi_{j-1}$$

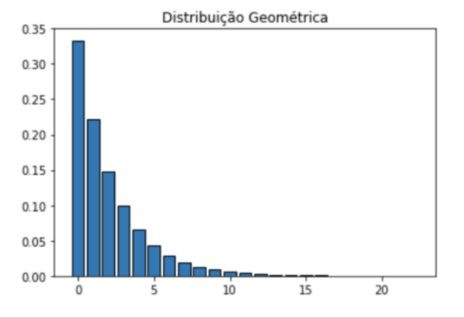
$$\ldots$$

$$\Rightarrow \pi_j = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \pi_0 = \rho^j \pi_0$$

5

Distribuição estacionária *(cont.)*

- Impondo: $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$
- Tém-se: $\pi_j = (1-\rho)\cdot\rho^j \qquad j = 0,1,2,\ldots$



6

Cálculo de *L*

- O número médio de clientes no sistema (*L*), em regime estacionário ($\rho < 1$), pode ser calculado por:

$$L = \sum_{j=0}^{\infty} j\pi_j = \sum_{j=1}^{\infty} j\rho^j (1-\rho) = (1-\rho)\rho \sum_{j=1}^{\infty} j\rho^{j-1}$$

que se simplifica em:

$$L = (1-\rho)\rho \frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

7

Cálculo de L_q

- Analogamente, o número médio de clientes na fila, é dado por:

$$L_q = \sum_{j=1}^{\infty} (j-1)\pi_j = \sum_{j=1}^{\infty} j\pi_j - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = L - (1-\pi_0)$$

ou seja,

$$L_q = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

8

Cálculo do L_s

- O número médio de clientes em atendimento, neste caso (*M/M/1*), seria:

$$L_s = 0\pi_0 + 1(\pi_1 + \pi_2 + \cdots) = 1 - \pi_0 = 1 - (1 - \rho) = \rho$$

- Verifica-se que:

$$L = L_q + L_s = \frac{\rho^2}{1-\rho} + \rho = \frac{\rho}{1-\rho}$$

9

Fórmula de Little: $L=\lambda W$

- Sejam:
  - λ = taxa efetiva de entrada no sistema (clientes/min)
  - L = número médio de clientes no sistema
  - L_q = número médio de clientes na fila
  - W = tempo médio total
  - W_q = tempo médio em fila

- Para todo sistema ergódico de filas, valem as seguintes igualdades:

$$L = \lambda \cdot W$$

$$L_q = \lambda \cdot W_q$$

10

Tempos Médios para Fila *M/M/1*

- Tempo Médio de Fila

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

- Tempo Médio Total

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

- Verifica-se que:

$$W = W_q + W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Para uma fila M/M/1, W também apresenta distribuição exponencial com taxa $\mu - \lambda$

11

Exemplo 2 – Posto de Combustível

- Considere um posto de combustível com uma única bomba. Suponha que o processo de chegadas seja Poisson, com taxa 7,5 clientes por hora e que os tempos de atendimento sejam v.a.i. com distribuição exponencial e média 4 min.

Determine os tempos médios de fila e total dos clientes.

12

Solução

1. Tem-se uma fila *M/M/1* com

λ = 7,5 carros / h e μ = 15 carros / h.

Logo, ρ = 0,50

2. Cálculo dos indicadores

$L = (0{,}50)/(1 - 0{,}50) = 1{,}0$ carros e

$W = L / \lambda = 1{,}0/7{,}5 = 0{,}133$ h ou 8 min

$W_q = W - 1/\mu = 4$ min

13

Exemplo 2 *(cont.)*

- Suponha que os clientes passem a abastecer seus carros com maior frequência, tal que:

  1. a taxa de chegadas suba para 15 carros/h e

  2. o tempo médio de serviço caia para 3 min e 20 s.

- Recalcule os tempos médios de fila e total dos clientes.

14

Solução

1. Tem-se:

$\lambda = 2(7,5) = 15$ cl. / h

$\mu = 60/3,333 = 18$ cl. / h

$\rho = 15/18 = 5/6$ ou 0,833.

2. Então:

$L = 0,833/(1 - 0,833) = 5,0$ carros e

$W = L / \lambda = 5/15 = 0,333$ h ou 20 min

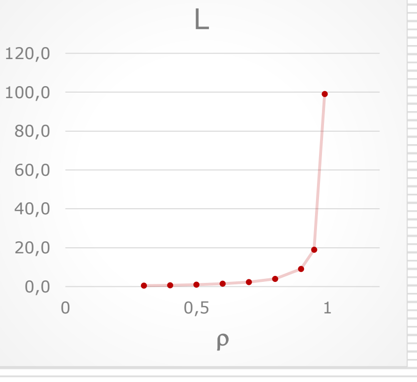
$W_q = W - 1/\mu = 20 - 3,333 = 16$ min e 40 s

Nesta situação, o tempo médio de fila é bastante superior (antes: 4 min, agora: 16 min e 40 s)

15

Relação entre ρ e *L* para a *M/M/1*

ρ	L
0,30	0,43
0,40	0,67
0,50	1,00
0,60	1,50
0,70	2,33
0,80	4,00
0,90	9,00
0,95	19,0
0,99	99,0



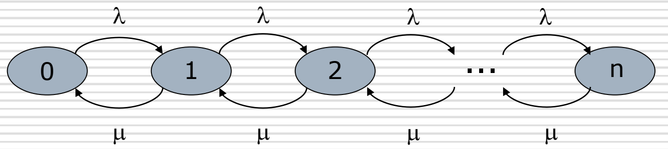
$$L = \frac{\rho}{1-\rho}$$

16

20.5 Fila Limitada (*M/M/1/GD/n/∞*)

- O modelo *M/M/1/GD/n/∞* é semelhante ao *M/M/1*, exceto pelo fato de que, quando há n clientes, novas chegadas são rejeitadas (não entram).

- Processo de Nascimento e Morte com n+1 estados



- Os sistemas *M/M/1/GD/n/∞* apresentam distribuição estacionária, mesmo que λ ≥ μ, devido à limitação do número máximo de clientes (espaço amostral finito)

17

Distribuição Estacionária

- Se $\lambda \neq \mu$, então:

$$\pi_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}} \qquad \pi_j = \rho^j \pi_0 \quad (j = 1,2,\ldots,n)$$

- Senão ($\lambda = \mu$):

$$\pi_j = \frac{1}{n+1} \qquad (j = 0,1,\ldots,n)$$

- A partir da distribuição estacionária, determinam-se L e L_q, e, a seguir, W e W_q.

$$W = \frac{L}{\lambda(1-\pi_n)} \quad \text{e} \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda(1-\pi_n)}$$

18

Exemplo 3 - Barbeiro

- Uma barbearia tem um único barbeiro e 5 lugares de espera. Quando a barbearia está cheia, novos clientes desistem de entrar.

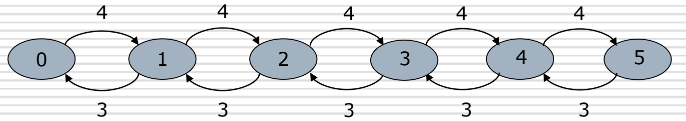
  Suponha que o processo de chegadas seja Poisson com taxa 4 clientes por hora e que os tempos de atendimento sejam v.a.i. exponenciais com média 20 min.

  Determine o tempo médio de fila e a porcentagem de clientes perdidos.

19

Solução

- Estado j: qtd de clientes na barbearia



$$4 \cdot \pi_0 = 3 \cdot \pi_1$$
$$4 \cdot \pi_1 = 3 \cdot \pi_2$$
$$4 \cdot \pi_2 = 3 \cdot \pi_3$$
$$4 \cdot \pi_3 = 3 \cdot \pi_4$$
$$4 \cdot \pi_4 = 3 \cdot \pi_5$$
$$\pi_0 + \pi_1 + \ldots + \pi_5 = 1$$

$\Rightarrow$

j	π_j
0	0,0722
1	0,0962
2	0,1283
3	0,1711
4	0,2281
5	0,3041
	1,0

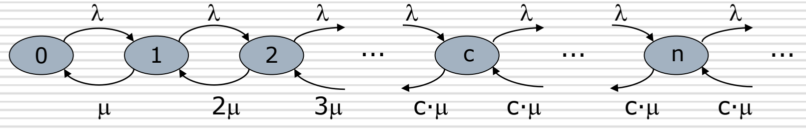
$\Rightarrow$

$$L = 3{,}30$$
$$L_q = 2{,}37$$
$$\lambda_{ef} = \lambda \cdot (1 - \pi_5)$$
$$= 2{,}78\ cl/h$$
$$W = 71\ min$$
$$W_q = 51\ min$$

20

20.6 Fila *M/M/c*

- Intervalo entre chegadas exponencial (com taxa λ), tempo de atendimento exponencial (com taxa μ), fila única e c servidores idênticos atendendo em paralelo.
- Se $j \leq$ c clientes estão presentes, então todos estão em atendimento; se $j >$ c clientes estão presentes, então todos os c servidores estão ocupados e j – c clientes aguardam em fila.
- A fila *M/M/c* pode ser modelada como um processo de nascimento e morte com:



21

Distribuição Estacionária

- Seja $\rho = \lambda / c\mu$ o índice de congestionamento.
- Para $\rho < 1$, tem-se:

$$\pi_j = \frac{(c\rho)^j \pi_0}{j!} \qquad (j = 1, 2, \ldots, c)$$

$$\pi_j = \frac{(c\rho)^j \pi_0}{c! c^{j-c}} \qquad (j = c, c+1, c+2, \ldots)$$

$$\pi_0 = \frac{1}{\left(\sum_{j=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^j}{j!} \right) + \frac{(c\rho)^c}{c!(1-\rho)}}$$

22

Distribuição Estacionária (cont.)

- Tamanho e tempo médio de fila:

$$P(j \geq c) = \frac{(c\rho)^c}{c!(1-\rho)}\pi_0$$

$$L_q = \frac{P(j \geq c)\rho}{1-\rho} \qquad W_q = \frac{L_q}{\lambda} \qquad L_q = \frac{(c\rho)^c \rho}{c!(1-\rho)^2}\pi_0$$

$$L_s = c\rho \qquad W_s = \frac{1}{\mu}$$

$$L = L_q + L_s \qquad W = \frac{L}{\lambda}$$

23

Exemplo 9 – Caixa (p.1089)

- M/M/2 com: λ=80 e μ=50 cl./h (ρ=0,80), L=?, W=?

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + (2 \cdot 0{,}8)^1 + \frac{(2 \cdot 0{,}8)^2}{2!(1-0{,}8)}} = 0{,}1111$$

$$L_q = \frac{(2 \cdot 0{,}8)^2 \cdot 0{,}8}{2!(1-0{,}8)^2} \cdot 0{,}1111 = 2{,}844$$

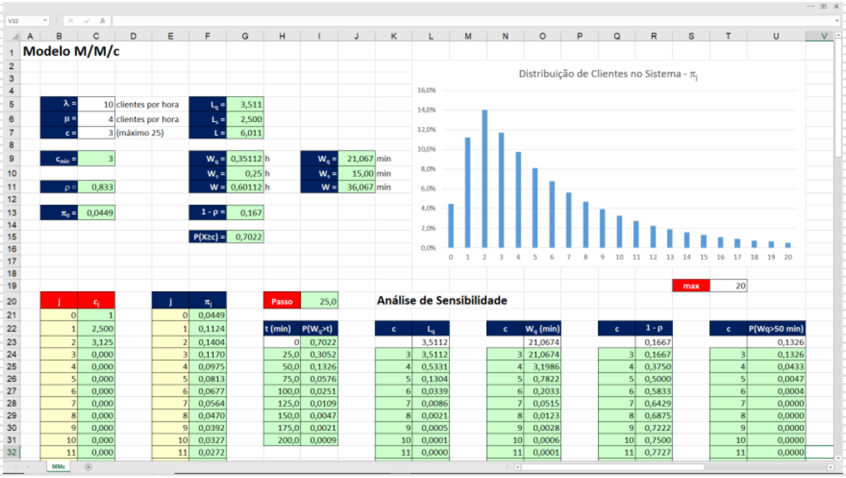
$$W_q = \frac{2{,}844}{80} = 0{,}03556\,h \quad (2{,}13\,\text{min})$$

$$L_s = \frac{80}{50} = 1{,}6 \qquad W_s = \frac{1}{50} = 0{,}02\,h \quad (1{,}2\,\text{min})$$

$$L = 2{,}844 + 1{,}6 = 4{,}444 \quad W = 2{,}13 + 1{,}20 = 3{,}33\,\text{min} \quad 1 - \rho = 0{,}2\ (\textit{ociosidade})$$

24

Planilha – M/M/c



Modelo M/M/c

λ =	10	clientes por hora	L_q =	3,511			
μ =	4	clientes por hora	L_s =	2,500			
c =	3	(máximo 25)	L =	6,011			
c_{min} =	3		W_q =	0,35112	h	W_q = 21,067	min
			W_s =	0,25	h	W_s = 15,00	min
ρ =	0,833		W =	0,60112	h	W = 36,067	min
π_0 =	0,0449		1 - ρ =	0,167			
			P(X≥c) =	0,7022			

j	c_j
0	1
1	2,500
2	3,125
3	0,000
4	0,000
5	0,000
6	0,000
7	0,000
8	0,000
9	0,000
10	0,000
11	0,000

j	π_j
0	0,0449
1	0,1124
2	0,1404
3	0,1170
4	0,0975
5	0,0813
6	0,0677
7	0,0564
8	0,0470
9	0,0392
10	0,0327
11	0,0272

Passo 25,0

t (min)	$P(W_q>t)$
0	0,7022
25,0	0,3052
50,0	0,1326
75,0	0,0576
100,0	0,0251
125,0	0,0109
150,0	0,0047
175,0	0,0021
200,0	0,0009

max 20

Análise de Sensibilidade

c	L_q	c	W_q (min)	c	1 - ρ	c	P(Wq>50 min)
	3,5112		21,0674		0,1667		0,1326
3	3,5112	3	21,0674	3	0,1667	3	0,1326
4	0,5331	4	3,1986	4	0,3750	4	0,0433
5	0,1304	5	0,7822	5	0,5000	5	0,0047
6	0,0339	6	0,2033	6	0,5833	6	0,0004
7	0,0086	7	0,0515	7	0,6429	7	0,0000
8	0,0021	8	0,0123	8	0,6875	8	0,0000
9	0,0005	9	0,0028	9	0,7222	9	0,0000
10	0,0001	10	0,0006	10	0,7500	10	0,0000
11	0,0000	11	0,0001	11	0,7727	11	0,0000

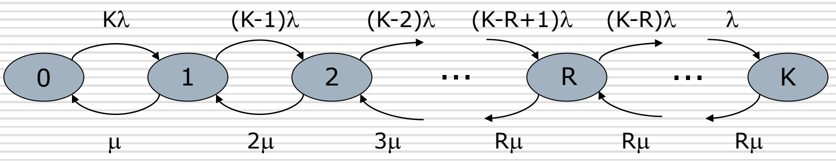
25

20.9 População Finita: Problema de Reparo de Máquinas (*M/M/R/GD/∞/K*)

- No PRM, há *K* máquinas e *R* técnicos $(R \leq K)$.
- O tempo que uma máquina permanece em operação é uma v.a. exponencial com taxa λ.
- Sempre que uma máquina quebra, é mandada para manutenção, onde são reparadas.
- O tempo de reparo tem distribuição exponencial com taxa *μ.*
- As máquinas consertadas voltam à operação, quando estarão novamente sujeitas à falha.

26

- O problema de reparo das máquinas pode ser modelado por processos de nascimento e morte, onde o estado j indica j máquinas quebradas (0,1,...,K).
- Cada **chegada** corresponde a uma quebra de máquina e cada **atendimento** a um reparo.
- No estado *j*, há *K–j* máquinas em operação e min (*j*,*R*) técnicos trabalhando.



27

- Dado que cada técnico conserta máquinas à taxa μ, a taxa de atendimento μ_j é dada por

$$\mu_j = \min\{j\mu, R\mu\} \qquad (j = 0,1,2,\ldots,K)$$

- Definindo $\rho = \lambda / \mu$, a distribuição estacionária será:

$$\pi_j = \binom{K}{j}\rho^j \pi_0 \qquad (j = 0,1,\ldots,R)$$

$$\pi_j = \frac{\binom{K}{j}\rho^j j!\,\pi_0}{R!\,R^{j-R}} \qquad (j = R+1, R+2, \ldots K)$$

28

Resolver π_j numericamente (B&D finito)

- Impondo a restrição de soma unitária, obtém-se a distribuição estacionária

$$\sum_{j=0}^{K} \pi_j = 1$$

- A partir da distribuição estacionária, determinam-se:
  - *L* = num. médio de máquinas quebradas
  - L_q = num. médio de máquinas aguardando reparo
  - *W* = tempo médio de máquina quebrada (*downtime*)
  - W_q = tempo médio aguardando início de reparo

$$L = \sum_{j=0}^{K} j\pi_j \quad L_q = \sum_{j=R}^{K} (j-R)\pi_j \quad W = \frac{L}{\lambda} \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

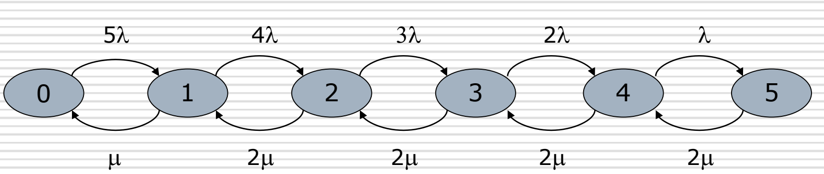
29

Exemplo 12 – Viaturas Policiais (p.1101)

- Frota com K=5 viaturas, uma quebra a cada 30 dias (λ=1/30). R=2 técnicos fazem a manutenção, que consome, em média 3 dias (μ=1/3). Pede-se:

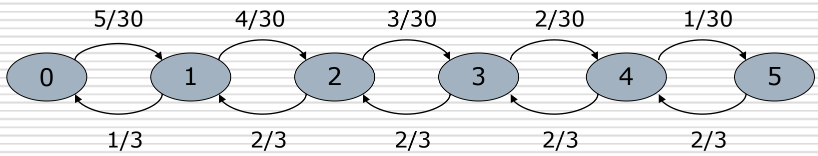
1. Número médio de viaturas em operação,
2. Tempo médio de espera na fila de cada viatura,
3. Ociosidade de cada um dos mecânicos.

- Estado j: viaturas em manutenção



30

Solução



$$\pi_1 = 0{,}5\pi_0 \quad \pi_2 = 0{,}1\pi_0 \quad \pi_3 = 0{,}015\pi_0 \quad \pi_4 = 0{,}0015\pi_0 \quad \pi_5 = 0{,}000075\pi_0$$

$$\pi_0 = 0{,}618 \quad \pi_1 = 0{,}309 \quad \pi_2 = 0{,}062 \quad \pi_3 = 0{,}009 \quad \pi_4 = 0{,}0009 \quad \pi_5 = 0{,}00005$$

$$L = \sum_{j=0}^{5} j\pi_j = 0{,}465 \qquad K - L = 5 - 0{,}465 = 4{,}54 \; maq.\, em\; operação$$

$$\lambda_{ef} = \sum_{j=0}^{5} \lambda_j \pi_j = 0{,}151 \qquad W = \frac{L}{\lambda_{ef}} = \frac{0{,}465}{0{,}151} = 3{,}07\; dias \qquad W_q = W - W_s = 0{,}07\; dias$$

$$ocios. = 1 \cdot \pi_0 + 0{,}5 \cdot \pi_1 = 0{,}773$$

31

Solução (cont.)

j	c_j	π_j	$j\,\pi_j$	λ_j	$\lambda_j\,\pi_j$	ocios.	ocios. π_j
0	1	0.6186	0	0.1667	0.1031	1	0.6186
1	0.5	0.3093	0.3093	0.1333	0.0412	0.5	0.1546
2	0.1	0.0619	0.1237	0.1000	0.0062	0	0
3	0.015	0.0093	0.0278	0.0667	0.0006	0	0
4	0.0015	0.0009	0.0037	0.0333	0.0000	0	0
5	0.000075	0.00005	0.0002	0	0	0	0
	1.616575		0.4648		0.1512		0.7732
			em reparo		taxa média		ocios. média

K - L = 4.54 em oper. W = 3.07 dias Wq = 0.07 dias

32

20.7 Fila *M/G/∞*

- Existem muitos exemplos de sistemas nos quais os clientes nunca precisam esperar pelo início do serviço.
- Nesses sistemas, há sempre um servidor disponível para cada chegada e podemos considerar um sistema com **infinitos servidores**.
- Usando a notação de Kendall-Lee, tem-se uma fila G/G/∞.

35

M/G/∞

- **Se:**
  - Os intervalos entre chegadas **A** são v.a.i. **exponenciais** com E(**A**) = 1 / λ (Poisson, com taxa de chegada λ),
  - Quando um cliente chega, ele entra imediatamente em serviço e o tempo de serviço **S** de cada cliente é dado por uma distribuição **genérica** e **independente** dos demais, com E(**S**) = 1 / μ
- **Então:**

$$W = \frac{1}{\mu} \qquad L = \frac{\lambda}{\mu} \qquad \pi_j = e^{-(\lambda/\mu)} \cdot \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!}$$

(j – estado, tem distribuição de Poisson, com média λ / μ)

36

20.8 Fila *M/G/1*

- Processo de Chegada
  - Os intervalos entre chegadas **A** são v.a.i. **exponenciais** com E(**A**) = 1 / λ (Poisson, com taxa de chegada λ),
- Processo de Atendimento
  - Servidor único, atendimento pela ordem de chegada
  - Os tempos de serviço **S** dos clientes é dado por uma distribuição **genérica** e **independente**, com

$$E(\mathbf{S}) = 1/\mu \quad \text{e} \quad \sigma^2 = V(\mathbf{S})$$

- O modelo *M/G/1* não constitui um processo de nascimento e morte, pois os tempos de permanência em cada estado não apresentam distribuição exponencial.

37

M/G/1

- A determinação da distribuição estacionária não é simples para a *M/G/1*.
- Fórmulas de Pollaczek–Khinchin para fila *M/G/1*

$$L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} \qquad W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$L = L_q + \rho \qquad W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

- Adicionalmente, π_0, parcela do tempo durante a qual o servidor fica ocioso, é igual a $1-\rho$.

38

Efeito da Variância

- Utilizando as fórmulas de P-K, compare o desempenho de duas filas com chegadas Poisson à taxa de λ=5 cl/h e tempos de atendimento exponencial e constante, com taxa de 8 cl/h.
- M/M/1: $V(S)=(1/8)^2$

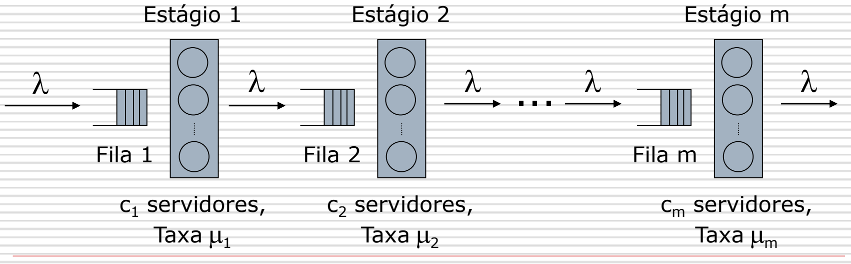
  $L_q = 25/24 = 1{,}04 \quad W_q = 5/24$ h = 12,5 min
- M/D/1: $V(S)=0$

  $L_q = 25/48 = 0{,}52 \quad W_q = 5/48$ h = 6,25 min
- D/D/1: $L_q = 0$, $W_q = 0$

39

20.10 Redes de Filas

- Nos modelos de filas isoladas, cada cliente é atendido por um servidor e, ao final do atendimento, deixa o sistema.
- Em muitas situações, os clientes necessitam atendimento em diferentes postos (ou estágios) de serviço, que constituem uma rede de filas.
- Abaixo, apresenta-se um **rede de filas em série** com m estágios de atendimento



40

Teorema

- **Se:**
  1. o processo de chegadas no estágio 1 é Poisson com taxa λ
  2. cada estágio tem c_j servidores e capacidade ilimitada da fila
  3. o tempo de serviço em cada estágio é exponencial com taxa μ_j
  4. em todos os estágios, a capacidade de atendimento é maior que a taxa de chegadas λ, ou seja, $\rho_j = \lambda / c_j\mu_j < 1$ para todo j

- **Então:**
  1. os intervalos entre chegadas em cada estágio também terão distribuição exponencial (chegada Poisson) com taxa λ
  2. a rede pode ser decomposta e analisada separadamente como se fossem m filas M/M/c independentes

41

Exemplo 13 – Linha de Montagem (p.1105)

- M/M/1 -> M/M/3

$$\lambda = 54 \quad \mu_1 = 60 \quad \mu_2 = 20 \quad (cl/h)$$

$$\rho_1 = 0{,}9 \quad L_q^1 = 8{,}1 \quad W_q^1 = 0{,}15\,h$$

$$\rho_2 = 0{,}9 \quad \pi_0 = 0{,}0249 \quad L_q^2 = 7{,}35 \quad W_q^2 = 0{,}136\,h$$

$$W_q = W_q^1 + W_q^2 = 0{,}286\,h$$

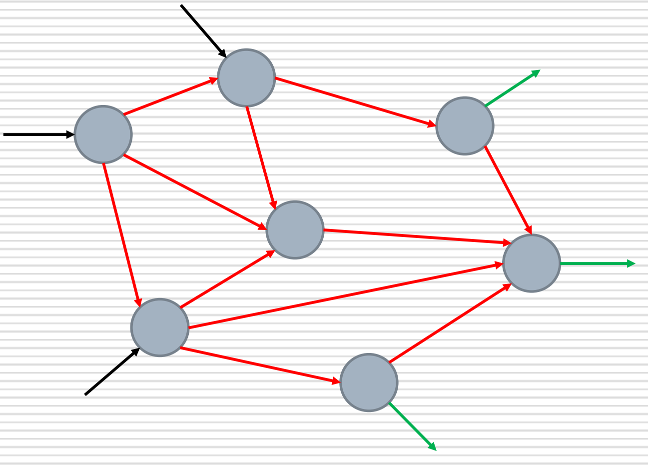
42

Rede Aberta de Filas

- **Redes Abertas de Filas** são um caso mais geral que as filas em série.
- Considere um sistema de filas com m postos ou nós. Suponha que:
  1. cada posto i tem c_i servidores exponenciais e taxa μ_i.
  2. clientes externos chegam ao posto i conforme um processo de Poisson com taxa γ_i.
  3. terminado o atendimento em i, o cliente segue para o posto j, com probabilidade p_{ij} ou deixa o sistema com probabilidade $1 - \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$
- **Problema**:
  - Como dimensionar os m postos de atendimento, equilibrando custos e nível de serviço?

43

Rede Aberta de Filas



44

- Seja λ_j a taxa total de chegadas ao posto j.
- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ podem ser determinadas pela solução do seguinte sistema linear:

$$\lambda_j = \gamma_j + \sum_{i=1}^{m} p_{ij}\lambda_i \quad (j = 1,2,\ldots,m)$$

- Suponha que $c_j \mu_j > \lambda_j$ em todos os nós.
- Neste caso, o sistema também pode ser decomposto em m sistemas M/M/c, com taxa de chegada λ_j e de atendimento μ_j.

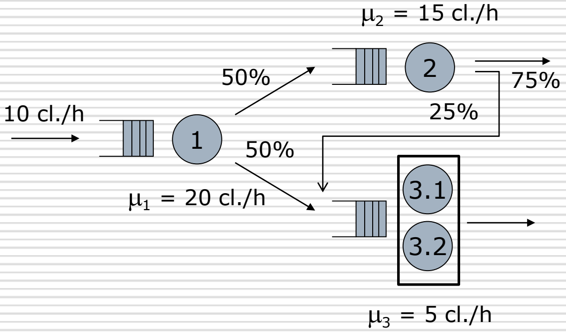
45

- Demonstra-se também que as quantidades de agentes em cada um dos postos são v.a. independentes.
- Analisando cada posto separadamente, determina-se o número médio de agentes nele. O número médio total de agentes na rede, L, é dado pela soma do número médio de agentes em cada posto.
- Para cálculo do *W*, tempo médio total de permanência dos agentes na rede, basta aplicar a fórmula de Little ($L=\lambda W$), considerando o sistema como um todo.
- Se houver algum posto j com $\lambda_j \geq c_j \mu_j$, então o sistema não terá distribuição estacionária.

46

Exemplo

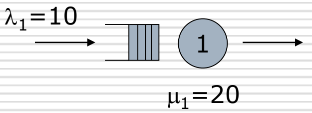
- Considere uma rede com m=3 postos de atendimento, uma taxa de chegadas externas de 10 cl/h no posto 1 e zero nos demais. As taxas de serviço e fluxos estão indicados abaixo. Determine o tempo médio de fila em cada posto.



$$\lambda_1 = 10$$
$$\lambda_2 = 0{,}5 \cdot \lambda_1$$
$$\lambda_3 = 0{,}5 \cdot \lambda_1 + 0{,}25 \cdot \lambda_2$$

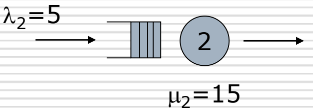
$$\lambda_1 = 10{,}0 \qquad \rho_1 = 0{,}5$$
$$\lambda_2 = 5{,}0 \qquad \rho_2 = 0{,}333$$
$$\lambda_3 = 6{,}25 \qquad \rho_3 = 0{,}625$$

Solução



$$\rho = 0{,}5 \quad L_q = \frac{0{,}5^2}{1-0{,}5} = 0{,}5$$

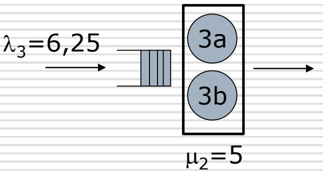
$$W_q = \frac{0{,}5}{10} = 0{,}05\,h = 3\,\text{min}$$



$$\rho = 0{,}333 \quad L_q = \frac{0{,}333^2}{1-0{,}333} = 0{,}167$$

$$W_q = \frac{0{,}167}{5} = 0{,}0333\,h = 2\,\text{min}$$

Solução (cont.)



$$c = 2 \quad \rho = \frac{6{,}25}{2 \cdot 5} = 0{,}625$$

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + 2 \cdot 0{,}625 + \dfrac{(2 \cdot 0{,}625)^2}{2!(1 - 0{,}625)}} = 0{,}2308$$

$$L_q = \frac{(2 \cdot 0{,}625)^2 \cdot 0{,}625}{2!(1 - 0{,}625)^2} \cdot 0{,}2308 = 0{,}8013$$

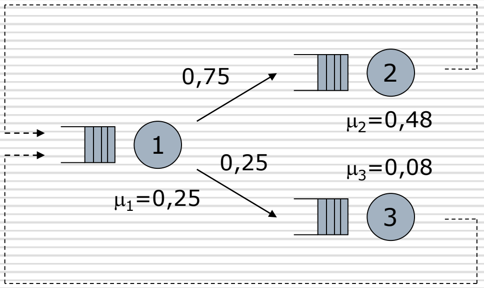
$$W_q = \frac{0{,}8013}{6{,}25} = 0{,}1282\, h = 7{,}69 \min$$

20.13 Redes Fechadas de Filas

- Sistemas onde o número total de agentes permanece constante, sem entradas nem saídas, podem ser analisados como redes fechadas de filas.
- Exemplos:
  - Frota dedicada operando de forma cíclica entre m terminais;
  - Sistemas de produção com limite de estoque em processo (ConWiP), onde as ordens concluídas no final da linha são substituídas por outras na entrada, mantendo constante os estoques em processo;
  - Uma rede fechada de computadores, onde o número de usuários é fixo e o tempo inativo dos usuários é modelado por um estágio com infinitos servidores em paralelo.

Exemplo 17 – FMS (p.1120)

- N=10, m=3
- μ_1=0,25 (4 min) μ_2=0,48 (2,083 min) μ_3=0,08 (12,5 min)
- S = {(0,0,10), (0,1,9), (0,2,8), ... , (10,0,0)}



$$\nu_j = \sum_{i=1}^{m} \nu_i p_{ij}$$

$$\pi_N(\mathbf{x}) = \frac{a_1^{x_1} a_2^{x_2} \cdots a_m^{x_m}}{G(N)}$$

$$a_i = \frac{\nu_i}{\mu_i}$$

53

Exemplo 17: solução

- Balanço de Fluxo

$$\nu_1 = \nu_2 + \nu_3$$
$$\nu_2 = 0{,}75 \cdot \nu_1$$
$$\nu_3 = 0{,}25 \cdot \nu_1$$

$$\nu_1 = 1{,}0 \quad \nu_2 = 0{,}75 \quad \nu_3 = 0{,}25$$

- Número de Estados

$$\binom{N+m-1}{m-1} = \binom{12}{2} = 66$$

- Distribuição Estacionária

#	x_1	x_2	x_3	p(x)
1	0	0	10	0,01228143
2	0	1	9	0,00614071
3	0	2	8	0,00307036
4	0	3	7	0,00153518
5	0	4	6	0,00076759
6	0	5	5	0,00038379
7	0	6	4	0,00019190
8	0	7	3	0,00009595
9	0	8	2	0,00004797
10	0	9	1	0,00002399
11	0	10	0	0,00001199
12	1	0	9	0,01572023
13	1	1	8	0,00786011
14	1	2	7	0,00393006
15	1	3	6	0,00196503
16	1	4	5	0,00098251
17	1	5	4	0,00049126
...	...	...	...	...
66	10	0	0	0,14499350

54

Exemplo 17: solução (cont.)

- Distribuições marginais

x_1	$p(x_1)$
0	0,02455
1	0,03141
2	0,04017
3	0,05131
4	0,06542
5	0,08308
6	0,10465
7	0,12963
8	0,15487
9	0,16991
10	0,14499

x_2	$p(x_2)$
0	0,61897
1	0,23699
2	0,09017
3	0,03402
4	0,01269
5	0,00466
6	0,00167
7	0,00058
8	0,00019
9	0,00005
10	0,00001

x_3	$p(x_3)$
0	0,23793
1	0,18587
2	0,14520
3	0,11340
4	0,08852
5	0,06900
6	0,05361
7	0,04128
8	0,03105
9	0,02186
10	0,01228

- A seguir, as medidas de desempenho de cada estágio podem ser calculadas.

Exemplo 17: solução (cont.)

- As medidas de desempenho de cada posto podem então serem calculadas.

	Fila Média	Utilização	Vazão
Maq 1	5,72078	0,97545	0,244
Maq 2	0,22860	0,38103	0,183
Maq 3	1,93207	0,76207	0,061

Análise do Valor Médio

- Método mais simples e recursivo para a análise de Redes de Fechadas de Filas
- Dois princípios básicos:
  - (processo de chegadas) a distribuição do número de agentes em cada posto, vista por um agente no instante de sua chegada em um dado posto, é igual a distribuição estacionária do número agentes em cada posto quando há n-1 agentes na rede
  - (fórmula de Little) aplica-se a fórmula de Little para a rede como um todo e individualmente para cada posto
- https://en.wikipedia.org/wiki/Mean_value_analysis

59

Análise do Valor Médio – Caso 1
m postos com um único servidor cada

- Rede Fechada de Filas com n clientes e m nós
- Em cada nó, há um único servidor e o tempo de atendimento é exponencial com taxa μ_j
- $P=[p_{ij}]$ – probabilidade de um cliente ir de "i" para "j"
- Caso particular: Rede Circular
  - p_{ij} = 1 para j=i+1 e p_{m1} =1; caso contrário, p_{ij}=0
- $\nu=\nu P$ – taxa relativa de chegadas aos nós
  - Para o caso de Rede Circular: ν_j=1 para todo j
- $L_j(n)$ – número médio de clientes em j quando há n clientes na rede
- $W_j(n)$ – tempo médio de permanência dos clientes em j quando há n clientes na rede
- $\lambda(n)$ – fluxo médio quando há n clientes na rede

60

Análise do Valor Médio - Caso 1

- Inicialização

$$L_j(0) = 0, \quad j = 1,2,\dots,m$$

- Para n=1 até N, faça:

$$W_j(n) = \frac{L_j(n-1)+1}{\mu_j}, \quad j = 1,2,\dots,m$$

$$\lambda(n) = \frac{n}{\sum_{j=1}^{m} W_j(n)\cdot \nu_j}$$

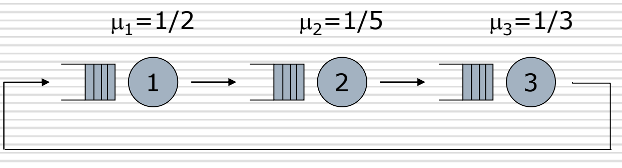
$$L_j(n) = \lambda(n)\cdot \nu_j \cdot W_j(n), \quad j = 1,2,\dots,m$$

- Caso particular: rede circular onde ν_j=1 para todo j

61

Exemplo 1 – Linha ConWip

- n jobs, m=3 estágios, rede circular (ν_j=1 para todo j)
- Em cada estágio, tempos exponenciais com médias: 2, 5 e 3 min, respectivamente
- Determine a vazão e o tempo médio de ciclo em função do número de jobs no sistema



62

Solução

1/μ1	1/μ2	1/μ3
2	5	3

n	W1	W2	W3	Wt	lbd	L1	L2	L3
0						0	0	0
1	2.000	5.000	3.000	10.000	0.100	0.200	0.500	0.300
2	2.400	7.500	3.900	13.800	0.145	0.348	1.087	0.565
3	2.696	10.435	4.696	17.826	0.168	0.454	1.756	0.790
4	2.907	13.780	5.371	22.059	0.181	0.527	2.499	0.974
5	3.054	17.494	5.922	26.471	0.189	0.577	3.305	1.119
6	3.154	21.523	6.356	31.032	0.193	0.610	4.161	1.229
7	3.220	25.807	6.687	35.713	0.196	0.631	5.058	1.311
8	3.262	30.292	6.932	40.486	0.198	0.645	5.986	1.370
9	3.289	34.928	7.109	45.327	0.199	0.653	6.935	1.412
10	3.306	39.677	7.235	50.218	0.199	0.658	7.901	1.441
11	3.317	44.505	7.322	55.143	0.199	0.662	8.878	1.461
12	3.323	49.389	7.382	60.094	0.200	0.664	9.862	1.474
13	3.327	54.312	7.422	65.061	0.200	0.665	10.852	1.483
14	3.330	59.261	7.449	70.039	0.200	0.666	11.845	1.489
15	3.331	64.227	7.467	75.025	0.200	0.666	12.841	1.493
16	3.332	69.206	7.479	80.016	0.200	0.666	13.838	1.495
17	3.333	74.192	7.486	85.010	0.200	0.666	14.837	1.497
18	3.333	79.183	7.491	90.007	0.200	0.667	15.835	1.498
19	3.333	84.177	7.494	95.004	0.200	0.667	16.835	1.499
20	3.333	89.173	7.496	100.003	0.200	0.667	17.834	1.499

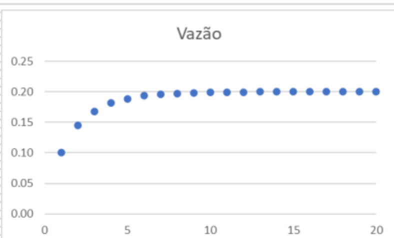
$$W_j(n) = \frac{L_j(n-1)+1}{\mu_j}$$

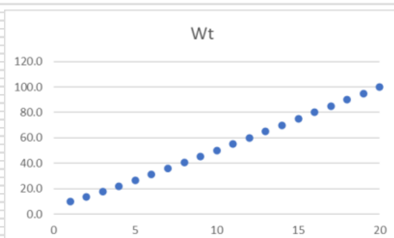
$$\lambda(n) = \frac{n}{\sum_{j=1}^{3} W_j(n)}$$

$$L_j(n) = \lambda(n) \cdot W_j(n)$$

63

Solução (cont.)





64

Análise do Valor Médio - Caso 2
Servidor único ou infinitos servidores

- Cada nó pode ter um único ou infinitos servidores
- Nos nós com infinitos servidores, não há espera pelo atendimento (não há fila)
- O tempo de permanência em cada nó será:

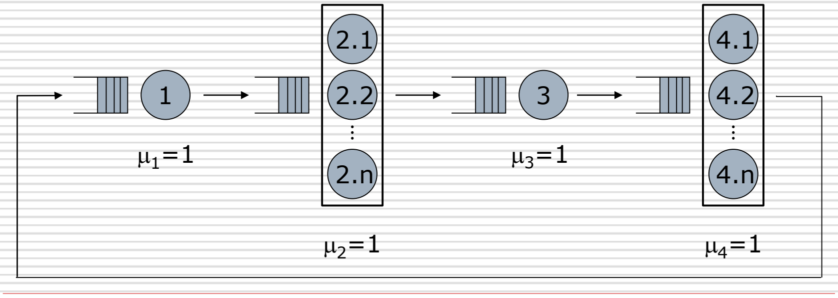
$$W_j(n) = \begin{cases} \dfrac{L_j(n-1)+1}{\mu_j}, & se\ c_j = 1 \\ \dfrac{1}{\mu_j}, & se\ c_j = \infty \end{cases}$$

- Os demais passos permanecem iguais
- É possível generalizar para outros valores de c_j (Caso 3)

65

Exemplo 2 – Frota Circular

- n jobs, m=4 estágios, rede circular (ν_j=1 para todo j)
- Estágios ímpares com servidor único e os pares com n servidores
- Cada estágio, tempo exponencial com taxa μ=1 job/h
- Determine a vazão e o tempo médio de ciclo em função do número de jobs no sistema



66

Solução

	1	2	3	4
cj	1	∞	1	∞
1/μj	1	1	1	1

n	W1	W2	W3	W4	Wt	lbd	L1	L2	L3	L4
0							0	0	0	0
1	1.000	1.000	1.000	1.000	4.000	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250
2	1.250	1.000	1.250	1.000	4.500	0.444	0.556	0.444	0.556	0.444
3	1.556	1.000	1.556	1.000	5.111	0.587	0.913	0.587	0.913	0.587
4	1.913	1.000	1.913	1.000	5.826	0.687	1.313	0.687	1.313	0.687
5	2.313	1.000	2.313	1.000	6.627	0.755	1.745	0.755	1.745	0.755
6	2.745	1.000	2.745	1.000	7.491	0.801	2.199	0.801	2.199	0.801
7	3.199	1.000	3.199	1.000	8.398	0.834	2.666	0.834	2.666	0.834
8	3.666	1.000	3.666	1.000	9.333	0.857	3.143	0.857	3.143	0.857
9	4.143	1.000	4.143	1.000	10.286	0.875	3.625	0.875	3.625	0.875
10	4.625	1.000	4.625	1.000	11.250	0.889	4.111	0.889	4.111	0.889
11	5.111	1.000	5.111	1.000	12.222	0.900	4.600	0.900	4.600	0.900
12	5.600	1.000	5.600	1.000	13.200	0.909	5.091	0.909	5.091	0.909
13	6.091	1.000	6.091	1.000	14.182	0.917	5.583	0.917	5.583	0.917
14	6.583	1.000	6.583	1.000	15.167	0.923	6.077	0.923	6.077	0.923
15	7.077	1.000	7.077	1.000	16.154	0.929	6.571	0.929	6.571	0.929
16	7.571	1.000	7.571	1.000	17.143	0.933	7.067	0.933	7.067	0.933
17	8.067	1.000	8.067	1.000	18.133	0.938	7.562	0.938	7.562	0.938
18	8.562	1.000	8.562	1.000	19.125	0.941	8.059	0.941	8.059	0.941
19	9.059	1.000	9.059	1.000	20.118	0.944	8.556	0.944	8.556	0.944
20	9.556	1.000	9.556	1.000	21.111	0.947	9.053	0.947	9.053	0.947

$$W_{2j-1}(n) = \frac{L_{2j-1}(n-1)+1}{\mu_{2j-1}}$$

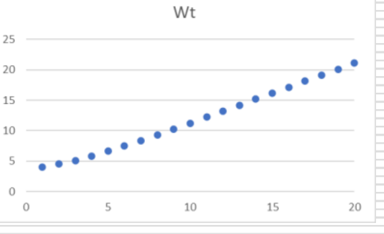
$$W_{2j}(n) = \frac{1}{\mu_{2j}} \qquad j = 1,2$$

$$\lambda(n) = \frac{n}{\sum_{j=1}^{4} W_j(n)}$$

$$L_j(n) = \lambda(n) \cdot W_j(n)$$

67

Solução (cont.)

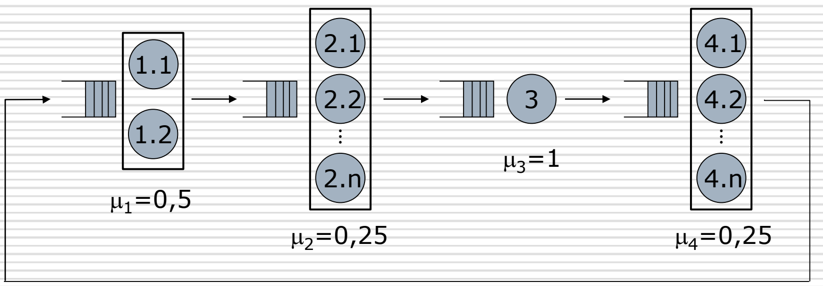


68

Exemplo 3 – Frota Circular

Implementar (qquer cj)

- Frota com n veículos, operando entre dois terminais
  - Terminal 1: tempo de carga exponencial com média 2h e capacidade para atender 2 veículos por vez
  - Terminal 2: tempo de descarga exponencial com média 1h e capacidade para atender 1 veículos por vez
  - Viagens: tempos exponenciais com média de 4h



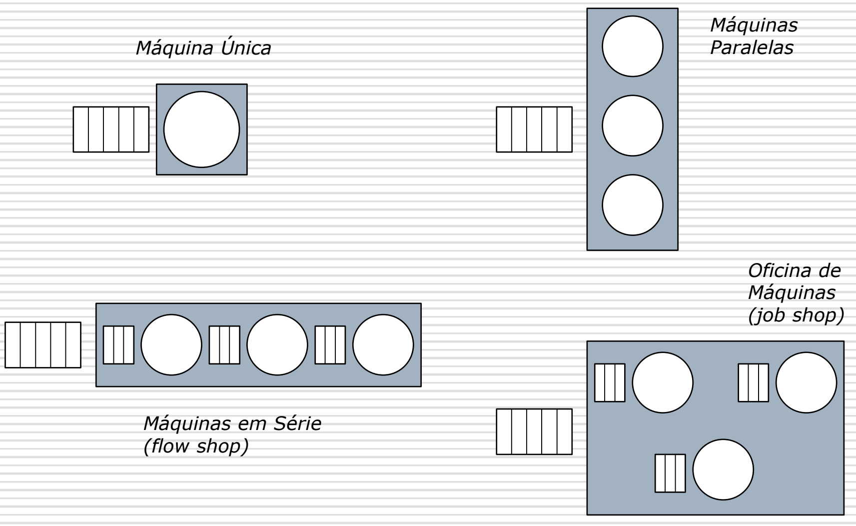
69

Programação de Operações

(Scheduling)

72

Problemas de Programação de Máquinas



73

Filas determinadas

- Na teoria de filas, os modelos pressupõem processos de chegadas dinâmicos e tempos de atendimento aleatórios
- Um processo de chegadas dinâmico é aquele em que os *jobs* chegam ao longo do tempo, normalmente de forma aleatória
- As análises são feitas principalmente em regime estacionário, com alguns indicadores de desempenho calculados
- A seguir, consideraremos um problema em que os jobs são todos conhecidos e disponíveis no tempo zero, com os tempos de processamento predefinidos
- Assim, a fila pode ser predeterminada, ou seja, a ordem de processamento dos *jobs* podem ser escolhida, visando otimizar algum indicador de desempenho
- Problemas deste tipo são tratados na **Teoria de *Scheduling***, onde a variável de decisão é exatamente definir a ordem de processamento dos *jobs* nas máquinas

74

Exemplo:
Permutation Flow Shop Problem (PFSP)

- Considere uma linha com m=2 máquinas e n=5 jobs que devem ser processados sequencialmente nas máquinas com os tempos de processamento dados na tabela abaixo. Suponha que todos os jobs estejam disponíveis no instante zero e que a sequência de processamento deva ser a mesma em todas as máquinas. Determine uma sequência dos jobs para minimizar o tempo total de processamento dos n jobs nas m máquinas.

Jobs	**Tempo Maq. 1**	**Tempo Maq. 2**
A	6	3
B	1	3
C	8	6
D	4	6
E	2	5

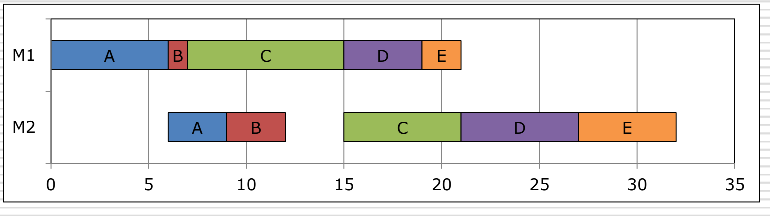
Sequência:

?	?	?	?	?
1	2	3	4	5

75

Solução inicial

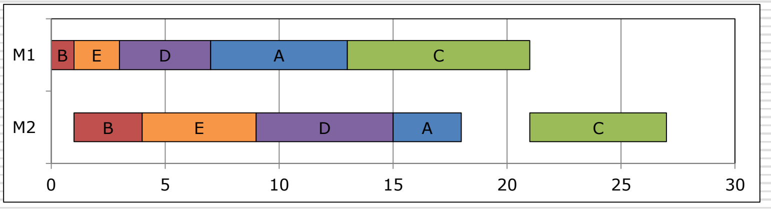
Jobs	**Tempo Maq. 1**	**Tempo Maq. 2**
A	6	3
B	1	3
C	8	6
D	4	6
E	2	5



76

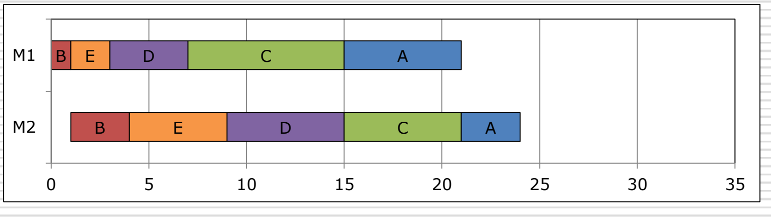
Solução pela regra SPT – *Shortest Processing Time First*

Jobs	Tempo Maq. 1	Tempo Maq. 2
A	6	3
B	1	3
C	8	6
D	4	6
E	2	5



Solução ótima

Jobs	Tempo Maq. 1	Tempo Maq. 2
A	6	3
B	1	3
C	8	6
D	4	6
E	2	5



Formulação Matemática do PFSP Cmax

- Índices
  - i – *job*
  - j – posição
  - k – máquina
- Parâmetros
  - m – número de máquinas
  - n – número de *jobs*
  - $[p_{ik}]$ – tempos de processamento dos n jobs nas m máquinas
- Variáveis de Decisão
  - x_{ij} – 1, se o *job* i está na posição j e 0, caso contrário
  - s_{jk} – *start time* do *job* da posição j na máquina k
  - c_{jk} – *completion time* do *job* da posição j na máquina k
  - $c_{nm} = C_{max}$ – *completion time* do último *job* na última na máquina k

79

Formulação Matemática do PFSP Cmax

$$\min c_{nm}$$

$$s.a.$$

$$c_{jk} \geq s_{jk} + \sum_{i=1}^{n} x_{ij} p_{ik} \quad j = 1,\dots,n \quad k = 1,\dots,m$$

$$s_{jk} \geq c_{j-1,k} \quad j = 2,\dots,n \quad k = 1,\dots,m$$

$$s_{jk} \geq c_{j,k-1} \quad j = 1,\dots,n \quad k = 2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = 1,\dots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1,\dots,n$$

$$s_{jk}, c_{jk} \geq 0, \; x_{ij} = 0/1$$

80

Próxima aula

- Controle de Estoques
  - Winston (2004, cap.15 e 16)
    - 15.1, 15.2, 16.3 e 16.6

81