2. Cadeias de Markov

Referências:

- Winston, Operations Research, 4.ed., cap.17
- Ross, Intr. Probability Models, 4.ed., cap.4
- https://en.wikipedia.org/wiki/Markov_chain

Exemplo de uma Cadeia de Markov

- Considere um indivíduo vive perambulando entre três cidades.

  Seja p_{ij} = Prob (ir para a cidade j, dado que hoje está em i)

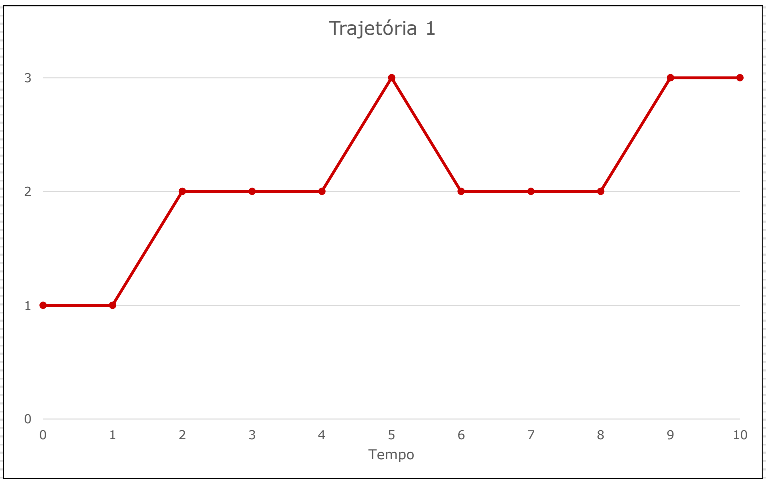
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0{,}80 & 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}75 & 0{,}15 \\ 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}50 \end{bmatrix}$$

1. Dado que ele está na cidade 1 hoje, qual a probabilidade de, dois dias, estar na cidade 3? (14,5%)

2. Em regime, quanto tempo ele deve permanecer em cada cidade? (40%, 40%, 20%)

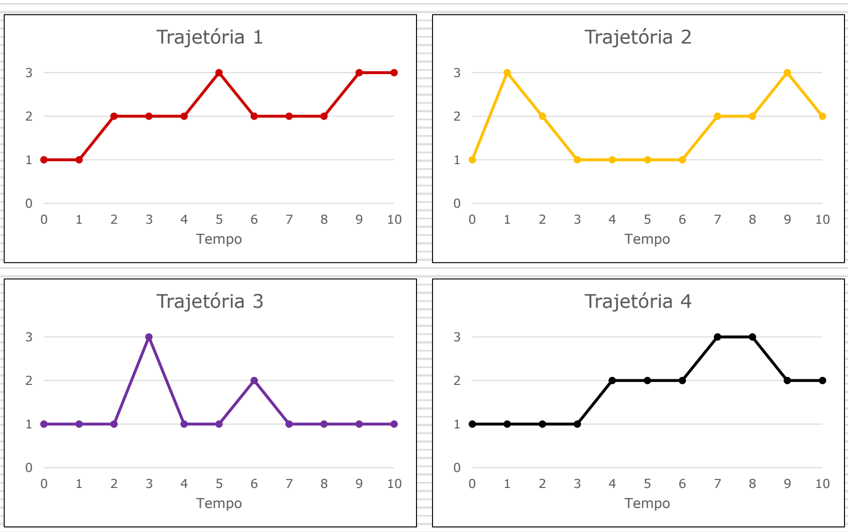
4

Random Walk



5

Trajetórias possíveis...



6

Definições

- Processo Estocástico: sequência de variáveis aleatórias que determinam os estados de um sistema ao longo do tempo.
- Exemplos:
  1. Estoque de um produto no final do dia
  2. Número de clientes na fila do caixa
  3. Volume de um reservatório no final do mês
  4. Cotação de um título na Bolsa de Valores

- Os processos podem ser em **tempo discreto** ($\{X_n, n=0,1,2…\}$) ou em **tempo contínuo** ($\{X(t), t \geq 0\}$)

- O espaço amostral, conjunto dos valores possíveis da variável de estado, também pode ser classificado em **discreto** ou **contínuo.**

7

Cadeia de Markov

Um processo estocástico $\{X_n, n=0,1,...\}$ é uma **Cadeia de Markov** em tempo discreto se

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = k_{n-1}, \ldots, X_0 = k_0) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

para todo $i, j, k_0, \ldots, k_{n-1}$ e todo n.

Interpretação: os estados futuros dependem exclusivamente do estado atual "i" e independem de quaisquer que tenham sido os estados anteriores.

8

Probabilidades de Transição Estacionárias

Uma Cadeia de Markov é estacionária se, para todo n:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(X_1 = j \mid X_0 = i) = p_{ij}$$

(probabilidades não mudam com o tempo)

Seja $\mathbf{P} = [\, p_{ij} \,]_{m \times m}$, a matriz das probabilidades de transição, então: $p_{ij} \geq 0$ e $\sum_j p_{ij} = 1$

Exemplo:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}80 & 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}75 & 0{,}15 \\ 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}50 \end{bmatrix}$$

9

Exemplos de Cadeias de Markov

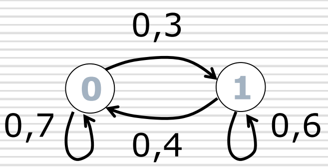
1. Previsão do Tempo
2. Andarilho
3. Reparo de Máquinas
4. *Random Walk*
5. Apostador

10

Exemplo 1 – Previsão do Tempo

Estados: 0 (Chuva) 1 (Sol)

Diagrama de Transição



Matriz das Probabilidades

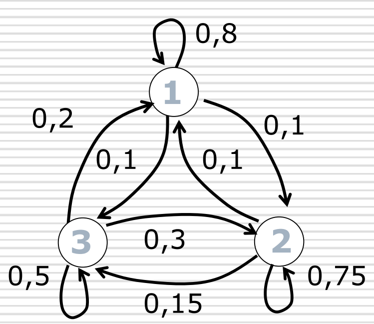
$$P = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix}$$

11

Exemplo 2 – Andarilho

X_n = cidade onde se encontra (x=1, 2 e 3)

Diagrama de Transição



Matriz das Probabilidades

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0{,}80 & 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}75 & 0{,}15 \\ 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}50 \end{bmatrix}$$

12

Exemplo 3 – Reparo de Equipamentos

Considere uma célula com duas máquinas.

Cada máquina, quando começa o dia funcionando, tem 10% de chance de quebrar durante o dia.

Uma máquina quebrada, é reparada no dia seguinte, até o final do dia.

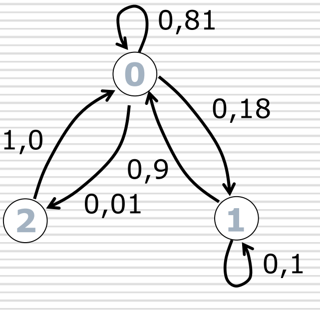
Seja X_k o número de máquinas quebradas no início do dia k, determine as probabilidades de transição entre os estados.

13

Diagrama e Matriz Transição-Estado

Diagrama Transição-Estado:

X_k = qtd de máquinas quebradas no início do dia k



Matriz Transição-Estado

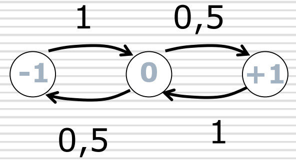
$\mathbf{P} = [\, p_{ij} \,]_{3x3}$ No exemplo → $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0{,}81 & 0{,}18 & 0{,}01 \\ 0{,}90 & 0{,}10 & 0{,}0 \\ 1{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \end{bmatrix}$

14

Exemplo 4 – *Random Walk*

X_n = posição (x= −1, 0, +1)

Diagrama de Transição



Matriz das Probabilidades

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

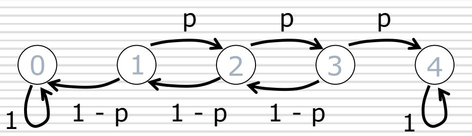
Caso geral:
2m+1 estados e probabilidades "p" e "1-p" de deslocamento para a direita e a esquerda, respectivamente.

15

Exemplo 5 – Apostador

Xn = qtd de grana para apostar (x=0,1,...,4; 0<p<1)

Diagrama de Transição entre Estados



Matriz das Probabilidades

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Caso geral: x=0,1,2,...,n ou ainda sem limite superior (p<0,5)

16

Probabilidades de Estados

Objetivo: caracterizar a dinâmica do processo estocástico (cadeia de Markov) no regime transitório e permanente

Probabilidades de Estados

Considere uma CMTD com espaço amostral

$$\boldsymbol{S} = \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Sejam $\pi(n) = [\pi_1(n), \ldots, \pi_m(n)]$ as probabilidades de cada um dos m estados do espaço $\boldsymbol{S}$ após n transições.

Então: $\pi(1) = \pi(0)\,\mathbf{P}$

$\pi(2) = \pi(1)\,\mathbf{P}$

...

$\pi(n) = \pi(n-1)\,\mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \pi(n) = \pi(0)\,\mathbf{P}^n$

onde $\pi(0)$ é a distribuição do estado inicial.

18

Exemplo do Andarilho

Considere a seguinte distribuição inicial:

$\pi(0) = [1{,}0 \quad 0{,}0 \quad 0{,}0]$

Então: $\pi(1) = \pi(0) \cdot \mathrm{P}$

$$\pi(1) = \begin{bmatrix} 1{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}80 & 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}75 & 0{,}15 \\ 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}50 \end{bmatrix}$$

$= [0{,}80 \quad 0{,}10 \quad 0{,}10]$

prob. de estar em 1, 2 e 3, um dia depois,

dado que estava no estado 1 em n=0.

19

Exemplo do Andarilho (cont.)

Para n= 2:

$\pi(2) = \pi(1) \cdot \mathrm{P}$

$$\pi(2) = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}80 & 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}75 & 0{,}15 \\ 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}50 \end{bmatrix}$$

$= [0{,}670 \quad 0{,}185 \quad 0{,}145]$

prob. de estar em 1, 2 e 3, dois dias depois,

dado que estava no estado 1 em n=0.

20

Exemplo do Andarilho (cont.)

0,80	0,10	0,10
0,10	0,75	0,15
0,20	0,30	0,50

n	$\pi_1(n)$	$\pi_2(n)$	$\pi_3(n)$
0	1,0	0,0	0,0
1	0,8000	0,1000	0,1000
2	0,6700	0,1850	0,1450
3	0,5835	0,2493	0,1673
4	0,5252	0,2955	0,1794
5	0,4856	0,3279	0,1865
⋮	⋮	⋮	⋮
∞	0,4000	0,4000	0,2000

21

Exemplo do Andarilho (cont.)

0,80	0,10	0,10
0,10	0,75	0,15
0,20	0,30	0,50

n	$\pi_1(n)$	$\pi_2(n)$	$\pi_3(n)$
0	0,0	1,0	0,0
1	0,1000	0,7500	0,1500
2	0,1850	0,6175	0,1975
3	0,2493	0,5409	0,2099
4	0,2955	0,4935	0,2110
5	0,3279	0,4630	0,2091
⋮	⋮	⋮	⋮
∞	0,4000	0,4000	0,2000

22

Exemplo do Andarilho (cont.)

0,80	0,10	0,10
0,10	0,75	0,15
0,20	0,30	0,50

n	$\pi_1(n)$	$\pi_2(n)$	$\pi_3(n)$
0	0,0	0,0	1,0
1	0,2000	0,3000	0,5000
2	0,2900	0,3950	0,3150
3	0,3345	0,4198	0,2458
4	0,3587	0,4220	0,2193
5	0,3730	0,4181	0,2088
⋮	⋮	⋮	⋮
∞	0,4000	0,4000	0,2000

23

Exemplo do Random Walk

0,0	1,0	0,0
0,5	0,0	0,5
0,0	1,0	0,0

n	$\pi_1(n)$	$\pi_2(n)$	$\pi_3(n)$
0	1,0	0,0	0,0
1	0,00	1,00	0,00
2	0,50	0,00	0,50
3	0,00	1,00	0,00
4	0,50	0,00	0,50
⋮	⋮	⋮	⋮
	0,50	0,00	0,50
	0,00	1,00	0,00

24

Exemplo do Apostador (1)

1,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,75	0,00	0,25	0,00	0,00
0,00	0,75	0,00	0,25	0,00
0,00	0,00	0,75	0,00	0,25
0,00	0,00	0,00	0,00	1,00

n	$\pi_0(n)$	$\pi_1(n)$	$\pi_2(n)$	$\pi_3(n)$	$\pi_4(n)$
0	0	0	1	0	0
1	0,0000	0,7500	0,0000	0,2500	0,0000
2	0,5625	0,0000	0,3750	0,0000	0,0625
3	0,5625	0,2813	0,0000	0,0938	0,0625
4	0,7734	0,0000	0,1406	0,0000	0,0859
5	0,7734	0,1055	0,0000	0,0352	0,0859
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
∞	0,9000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1000

25

Exemplo do Apostador (2)

1,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,75	0,00	0,25	0,00	0,00
0,00	0,75	0,00	0,25	0,00
0,00	0,00	0,75	0,00	0,25
0,00	0,00	0,00	0,00	1,00

n	$\pi_0(n)$	$\pi_1(n)$	$\pi_2(n)$	$\pi_3(n)$	$\pi_4(n)$
0	0	1	0	0	0
1	0,7500	0,0000	0,2500	0,0000	0,0000
2	0,7500	0,1875	0,0000	0,0625	0,0000
3	0,8906	0,0000	0,0938	0,0000	0,0156
4	0,8906	0,0703	0,0000	0,0234	0,0156
5	0,9434	0,0000	0,0352	0,0000	0,0215
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
∞	0,9750	0,0000	0,0000	0,0000	0,0250

26

Exemplo do Apostador (3)

1,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,75	0,00	0,25	0,00	0,00
0,00	0,75	0,00	0,25	0,00
0,00	0,00	0,75	0,00	0,25
0,00	0,00	0,00	0,00	1,00

n	$\pi_0(n)$	$\pi_1(n)$	$\pi_2(n)$	$\pi_3(n)$	$\pi_4(n)$
0	0	0	0	1	0
1	0,0000	0,0000	0,7500	0,0000	0,2500
2	0,0000	0,5625	0,0000	0,1875	0,2500
3	0,4219	0,0000	0,2813	0,0000	0,2969
4	0,4219	0,2109	0,0000	0,0703	0,2969
5	0,5801	0,0000	0,1055	0,0000	0,3145
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
∞	0,6750	0,0000	0,0000	0,0000	0,3250

27

Probabilidades de Transição em n passos

Exemplo 2: Previsão do Tempo

Espaço Amostral: S = {0 (chuva), 1 (sol)}

Matriz de Transição: $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix}$

A matriz **P** apresenta as probabilidades de transição em um único passo.

Quais seriam as probabilidades de transição em dois ou mais passos?

28

Probabilidades de Transição em n-Passos

Seja $\{X_n: n = 0, 1, \ldots\}$ uma Cadeia de Markov com espaço amostral $\boldsymbol{S}$ e matriz de transição entre $\mathbf{P}$. Então, define-se a probabilidade de transição de i para j em n passos:

$$P(X_n = j \mid X_0 = i) = p_{ij}^{(n)}$$

A matriz das probabilidades de transição em n-passos $\mathbf{P}^{(n)}$ é dada por:

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n$$

29

Probabilidades de Transição em 2 Passos

- Exemplo 2 (cont.): Previsão do Tempo

$$\mathbf{P}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0{,}61 & 0{,}39 \\ 0{,}52 & 0{,}48 \end{bmatrix}$$

- A partir da matriz de transição em 2 passos, tem-se:

$p_{00}^{(2)} = 0{,}61$ é a probabilidade de estar chovendo depois de amanhã, dado que está chovendo hoje.

$p_{01}^{(2)} = 0{,}39$ é a probabilidade de fazer sol depois de amanhã, dado que está chovendo hoje.

30

Probabilidades de Transição em n-Passos
Previsão do Tempo

n	Matriz de Transição, $\mathbf{P}^{(n)}$
1	$\begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 0{,}61 & 0{,}39 \\ 0{,}52 & 0{,}48 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 0{,}583 & 0{,}417 \\ 0{,}556 & 0{,}444 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 0{,}5749 & 0{,}4251 \\ 0{,}5668 & 0{,}4332 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} 0{,}5725 & 0{,}4275 \\ 0{,}5700 & 0{,}4300 \end{bmatrix}$

31

Probabilidades de Transição em n-Passos
Previsão do Tempo (cont.)

n	Matriz de Transição, $\mathbf{P}^{(n)}$
6	$\begin{bmatrix} 0{,}5717 & 0{,}4283 \\ 0{,}5710 & 0{,}4290 \end{bmatrix}$
7	$\begin{bmatrix} 0{,}5715 & 0{,}4285 \\ 0{,}5713 & 0{,}4287 \end{bmatrix}$
8	$\begin{bmatrix} 0{,}5715 & 0{,}4285 \\ 0{,}5714 & 0{,}4286 \end{bmatrix}$
9	$\begin{bmatrix} 0{,}5714 & 0{,}4286 \\ 0{,}5714 & 0{,}4286 \end{bmatrix}$
10	$\begin{bmatrix} 0{,}5714 & 0{,}4286 \\ 0{,}5714 & 0{,}4286 \end{bmatrix}$

32

Interpretação

- Neste exemplo:

$p_{00}^{(10)} = p_{10}^{(10)} = 0{,}5714$

$p_{01}^{(10)} = p_{11}^{(10)} = 0{,}4286$

Ou seja, o estado futuro, para n grande, é independente do estado inicial.

Neste caso, temos uma distribuição estacionária dos estados.

33

Distribuição Estacionária

Sob determinadas condições, a probabilidade de estar em estado futuro qualquer torna-se independente do estado inicial.

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \qquad j=1,2,\ldots,m$$

Esta distribuição assintótica é denominada Distribuição em Regime Estacionário.

$$\boldsymbol{\pi} = [\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m]$$

34

Exemplo do Andarilho

$$P=\begin{bmatrix} 0{,}80 & 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}75 & 0{,}15 \\ 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}50 \end{bmatrix} \qquad P^8=\begin{bmatrix} 0{,}4274 & 0{,}3767 & 0{,}1959 \\ 0{,}3767 & 0{,}4199 & 0{,}2034 \\ 0{,}3917 & 0{,}4068 & 0{,}2015 \end{bmatrix}$$

$$P^2=\begin{bmatrix} 0{,}6700 & 0{,}1850 & 0{,}1450 \\ 0{,}1850 & 0{,}6175 & 0{,}1975 \\ 0{,}2900 & 0{,}3950 & 0{,}3150 \end{bmatrix} \qquad P^{16}=\begin{bmatrix} 0{,}4013 & 0{,}3989 & 0{,}1998 \\ 0{,}3989 & 0{,}4010 & 0{,}2002 \\ 0{,}3996 & 0{,}4003 & 0{,}2001 \end{bmatrix}$$

$$P^4=\begin{bmatrix} 0{,}5252 & 0{,}2955 & 0{,}1794 \\ 0{,}2955 & 0{,}4935 & 0{,}2110 \\ 0{,}3587 & 0{,}4220 & 0{,}2193 \end{bmatrix} \qquad P^{32}=\begin{bmatrix} 0{,}4000 & 0{,}4000 & 0{,}2000 \\ 0{,}4000 & 0{,}4000 & 0{,}2000 \\ 0{,}4000 & 0{,}4000 & 0{,}2000 \end{bmatrix}$$

35

Reparo de Máquinas

$$P=\begin{bmatrix} 0{,}81 & 0{,}18 & 0{,}01 \\ 0{,}90 & 0{,}10 & 0{,}0 \\ 1{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \end{bmatrix} \qquad P^8=\begin{bmatrix} 0{,}8264 & 0{,}1653 & 0{,}0083 \\ 0{,}8264 & 0{,}1653 & 0{,}0083 \\ 0{,}8264 & 0{,}1653 & 0{,}0083 \end{bmatrix}$$

$$P^2=\begin{bmatrix} 0{,}8281 & 0{,}1638 & 0{,}0081 \\ 0{,}8190 & 0{,}1720 & 0{,}0090 \\ 0{,}8100 & 0{,}1800 & 0{,}0100 \end{bmatrix} \qquad P^{16}=\begin{bmatrix} 0{,}8264 & 0{,}1653 & 0{,}0083 \\ 0{,}8264 & 0{,}1653 & 0{,}0083 \\ 0{,}8264 & 0{,}1653 & 0{,}0083 \end{bmatrix}$$

$$P^4=\begin{bmatrix} 0{,}8265 & 0{,}1653 & 0{,}0083 \\ 0{,}8264 & 0{,}1654 & 0{,}0083 \\ 0{,}8263 & 0{,}1654 & 0{,}0083 \end{bmatrix} \qquad P^{32}=\begin{bmatrix} 0{,}8264 & 0{,}1653 & 0{,}0083 \\ 0{,}8264 & 0{,}1653 & 0{,}0083 \\ 0{,}8264 & 0{,}1653 & 0{,}0083 \end{bmatrix}$$

36

Random Walk (1)

$$P=\begin{bmatrix} 0{,}0 & 1{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}5 & 0{,}0 & 0{,}5 \\ 0{,}0 & 1{,}0 & 0{,}0 \end{bmatrix} \qquad P^8=\begin{bmatrix} 0{,}50 & 0{,}00 & 0{,}50 \\ 0{,}00 & 1{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}50 & 0{,}00 & 0{,}50 \end{bmatrix}$$

$$P^2=\begin{bmatrix} 0{,}50 & 0{,}00 & 0{,}50 \\ 0{,}00 & 1{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}50 & 0{,}00 & 0{,}50 \end{bmatrix} \qquad P^{16}=\begin{bmatrix} 0{,}50 & 0{,}00 & 0{,}50 \\ 0{,}00 & 1{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}50 & 0{,}00 & 0{,}50 \end{bmatrix}$$

$$P^4=\begin{bmatrix} 0{,}50 & 0{,}00 & 0{,}50 \\ 0{,}00 & 1{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}50 & 0{,}00 & 0{,}50 \end{bmatrix} \qquad P^{32}=\begin{bmatrix} 0{,}50 & 0{,}00 & 0{,}50 \\ 0{,}00 & 1{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}50 & 0{,}00 & 0{,}50 \end{bmatrix}$$

37

Random Walk (2)

$$P^{32}=\begin{bmatrix} 0{,}50 & 0{,}00 & 0{,}50 \\ 0{,}00 & 1{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}50 & 0{,}00 & 0{,}50 \end{bmatrix}$$

$$P^{33}=\begin{bmatrix} 0{,}00 & 1{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}50 & 0{,}00 & 0{,}50 \\ 0{,}00 & 1{,}00 & 0{,}00 \end{bmatrix}$$

$$P^{34}=\begin{bmatrix} 0{,}50 & 0{,}00 & 0{,}50 \\ 0{,}00 & 1{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}50 & 0{,}00 & 0{,}50 \end{bmatrix}$$

$$P^{35}=\begin{bmatrix} 0{,}00 & 1{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}50 & 0{,}00 & 0{,}50 \\ 0{,}00 & 1{,}00 & 0{,}00 \end{bmatrix}$$

38

Ruína do Apostador

Considere o Problema do Apostador, com p=0,25:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}75 & 0 & 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}75 & 0 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{\infty} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}975 & 0 & 0 & 0 & 0{,}025 \\ 0{,}900 & 0 & 0 & 0 & 0{,}100 \\ 0{,}675 & 0 & 0 & 0 & 0{,}325 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Qual é o significado deste resultado?

Não há uma distribuição estacionária neste caso.

39

Interpretação

- Algumas cadeias de Markov apresentam uma **distribuição estacionária**, outras não.
- Uma Cadeia de Markov **finita** apresenta distribuição estacionária se for **irredutível** e **aperiódica**.
- As cadeias que apresentam distribuição estacionária são chamadas de **ergódicas**.
- Aqui, consideraremos apenas o caso de Cadeias de Markov com um número finito de estados (**cadeias finitas**)

40

Intervalo – 5 min

41

42

Cadeia de Markov Ergódica

Teorema: toda Cadeia de Markov **finita**, **irredutível** e **aperiódica** possui uma distribuição estacionária, que é independente das condições iniciais.

A distribuição estacionária é dada pela solução do sistema de equações lineares:

$$\pi = \pi \, \mathrm{P}$$

$$\sum \pi_j = 1$$

As cadeias de Markov que apresentam distribuição estacionária são chamadas **cadeias ergódicas**.

43

Definições: Acessibilidade e Comunicação

- Um estado *j* é **acessível** a partir de *i* se existe n, tal que $p_{ij}(n) > 0$ ($i \to j$)
- Dois estado *i* e *j* **comunicam-se**, se *i* é acessível a partir do estado *j* **e** vice-versa. ($i \leftrightarrow j$)
- Todo estado i comunica-se consigo mesmo ($i \leftrightarrow i$)
- Propriedade: se $i \leftrightarrow k$ e $k \leftrightarrow j$, então $i \leftrightarrow j$

44

Definição: Classe

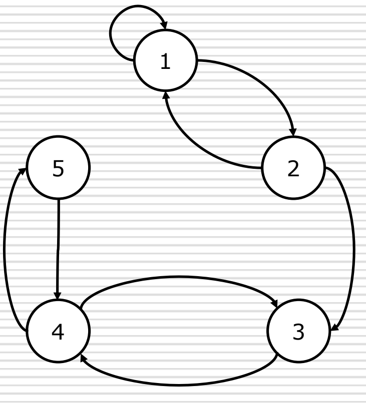
- **Classe** é qualquer subconjunto de estados do espaço amostral que se comunicam entre si e não se comunicam com nenhum outro estado fora da classe.

- Se todos os estados de uma Cadeia de Markov comunicam-se (isto é, a cadeia apresenta uma única classe), então a cadeia é **irredutível**.

45

Exemplo 6

- Quantas classes temos na cadeia abaixo?



Duas classes:

$C_1 = \{1; 2\}$

$C_2 = \{3; 4; 5\}$

46

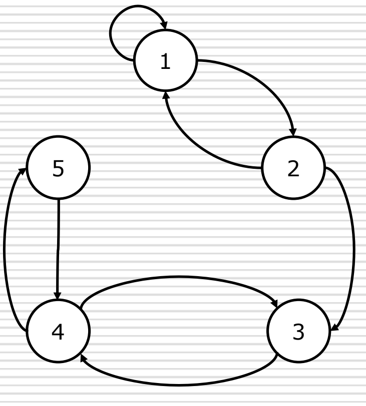
Definições: Recorrência e Transitoriedade

- Um estado *i* é **transitório** se existir um estado *j* que seja acessível a partir de *i*, mas o estado *i* não seja acessível a partir do estado j.
- Um estado não transitório é chamado de **recorrente**.
- Se *i* é **recorrente** (**transitório**) e comunica-se com *j*, então *j* também será **recorrente** (**transitório**)
- A **recorrência** (**transitoriedade**) é uma propriedade da **classe** (não apenas dos estados)
- Toda Cadeia de Markov finita e irredutível é recorrente, isto é, todos os seus estados são recorrentes.

47

Exemplo 6 (cont.)

- Quais classes são recorrentes? Quais são transitórias?



C_1 = {1; 2} é transitória

C_2 = {3; 4; 5} é recorrente

48

Definição: Periodicidade

- Define-se, para cada estado *i*, um **período** d_i como sendo o máximo divisor comum entre os valores de n para os quais $p_{ii}^{(n)}$ é positivo, ou seja,

  $p_{ii}^{(n)} > 0$ se, e somente se, $n = d_i, 2\,d_i, 3\,d_i, \ldots$

- Se $d_i = 1$, então o estado i é classificado com **aperiódico**.

- A **periodicidade** também é uma propriedade da **classe**.

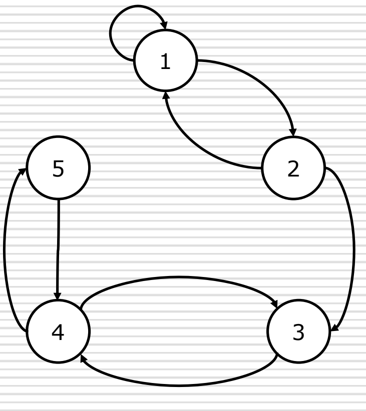
  Se $i \leftrightarrow j$, então *i* e *j* têm o mesmo período d_i.

- As cadeias irredutíveis podem, então, ser classificadas em **periódicas** e **aperiódicas**.

49

Exemplo 6 (cont.)

- Quais classes são periódicas?



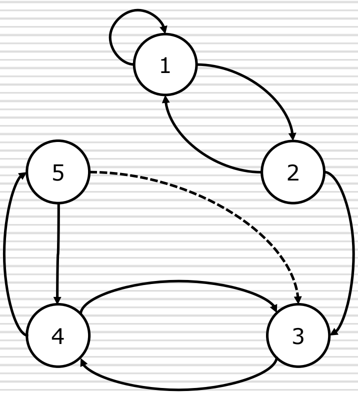
$C_1 = \{1;\ 2\}$ é transitória

$C_2 = \{3;\ 4;\ 5\}$ é recorrente e periódica

50

Exemplo 6b

- Se $p_{53}>0$, quais classes são periódicas?



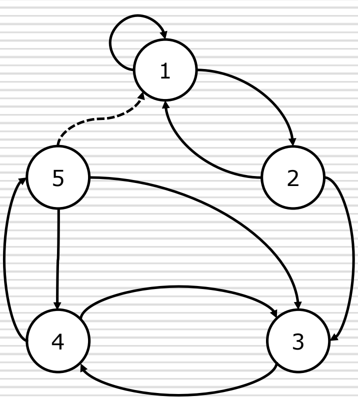
C_1 = {1; 2} é transitória

C_2 = {3; 4; 5} é recorrente e **aperiódica**

51

Exemplo 6c

- Incluindo $p_{51}>0$, quantas classes teremos?



Uma única classe:

C_1 = {1; 2; 3; 4; 5}

recorrente e **aperiódica**

Cadeia Finita, Irredutível e Aperiódica, ou seja, a cadeia é **Ergódica**

52

Cadeia de Markov Ergódica

Teorema: toda Cadeia de Markov finita, irredutível e aperiódica possui uma distribuição estacionária, que é independente das condições iniciais.

A distribuição estacionária é dada pela solução do sistema de equações lineares:

$$\pi = \pi\, \mathrm{P}$$

$$\sum \pi_j = 1$$

As cadeias de Markov que apresentam distribuição estacionária são chamadas **cadeias ergódicas**.

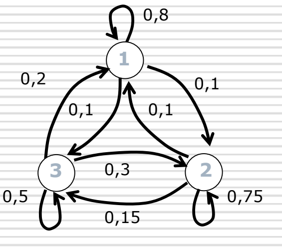
53

Exemplo do Andarilho

Matriz P

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0{,}80 & 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}75 & 0{,}15 \\ 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}50 \end{bmatrix}$$

Diagrama Transição-Estado



A cadeia é finita, irredutível e aperiódica, portanto, é **ergódica** e possui **distribuição estacionária**.

54

Exemplo do Andarilho (cont.)

- Cálculo das Probabilidades Estacionárias

$$[\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3] = [\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3] \cdot \begin{bmatrix} 0{,}80 & 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}75 & 0{,}15 \\ 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}50 \end{bmatrix}$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

55

Exemplo do Andarilho (cont.)

$\pi_1 = 0{,}80\pi_1 + 0{,}10\pi_2 + 0{,}20\pi_3$

$\pi_2 = 0{,}10\pi_1 + 0{,}75\pi_2 + 0{,}30\pi_3$

$\pi_3 = 0{,}10\pi_1 + 0{,}15\pi_2 + 0{,}50\pi_3$

$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$

4 equações e 3 incógnitas.

➔ Descartar uma das três primeiras equações e resolver o sistema de equações lineares restante

➔ Tem-se: $\pi_1 = 0{,}40$ $\pi_2 = 0{,}40$ $\pi_3 = 0{,}20$

56

Exemplo do Apostador

Os estados 1, 2 e 3 apresentam período 2.

	0	1	2	3	**4**
0	1	0	0	0	0
1	1-*p*	0	*p*	0	0
2	0	1-*p*	0	*p*	0
3	0	0	1-*p*	0	*p*
4	0	0	0	0	1

Três classes: {0}, {1, 2, 3} e {4}, portanto, a CM **não é ergódica**.

57

Distribuição Estacionária - Interpretação

- Em uma cadeia ergódica, $\pi = [\, \pi_j \,]$ é a distribuição de probabilidade de se observar o sistema em cada um dos estados j, após um grande número de passos.
- As probabilidades limite π_j também pode ser interpretadas como porcentagem do tempo em que, no longo prazo, o processo permanece em cada j.
- Quando a CM é finita, irredutível e periódica, tem-se também uma distribuição $\pi = [\, \pi_j \,]$, dada pela solução do sistema $\pi = \pi \cdot P$. Neste caso, os valores deve ser interpretados apenas como a porcentagem do tempo em que a cadeia permanece em j (devido ao período).

58

"Mean First Passage Times"

Seja m_{ij} = número médio de passos para, partindo do estado i, chegar pela primeira vez ao estado j.

Para uma **cadeia ergódica**, os valores de m_{ij} são dados pela solução do seguinte sistema linear:

$$m_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} m_{kj}$$

Em particular, para i=j:

$$m_{jj} = \frac{1}{\pi_j}$$

61

Exemplo do Andarilho – m_{jj}

Determine o tempo médio de retorno a cada cidade no problema do Andarilho.

A partir da distribuição estacionária:

$$\pi_1 = 0{,}40 \quad \pi_2 = 0{,}40 \quad \pi_3 = 0{,}20$$

tem-se:

$$m_{11} = \frac{1}{\pi_1} = 2{,}5$$

$$m_{22} = \frac{1}{\pi_2} = 2{,}5$$

$$m_{33} = \frac{1}{\pi_3} = 5{,}0$$

62

Exemplo do Andarilho – m_{ij}

$$m_{12} = 1 + p_{11}m_{12} + p_{13}m_{32}$$
$$m_{13} = 1 + p_{11}m_{13} + p_{12}m_{23}$$
$$m_{21} = 1 + p_{22}m_{21} + p_{23}m_{31}$$
$$m_{23} = 1 + p_{21}m_{13} + p_{22}m_{23}$$
$$m_{31} = 1 + p_{32}m_{21} + p_{33}m_{31}$$
$$m_{32} = 1 + p_{31}m_{12} + p_{33}m_{32}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{M} = \begin{bmatrix} 2{,}5 & 7{,}5 & 8{,}75 \\ 8{,}125 & 2{,}5 & 7{,}5 \\ 6{,}875 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$m_{11} = \frac{1}{\pi_1} \quad m_{22} = \frac{1}{\pi_2} \quad m_{33} = \frac{1}{\pi_3}$$

63

Exemplo 3b – Reparo em 2 dias

Considere uma célula com duas máquinas.

Cada máquina, quando começa o dia funcionando, tem 10% de chance de quebrar durante o dia.

O conserto de uma máquina consome dois dias de trabalho de um único técnico habilitado. Assim, há a possibilidade de uma máquina ficar em fila.

O problema pode ser formulado como uma CMTD?

64

Modelagem

Duas máquinas, um técnico, dois dias de reparo por máquina.

Definição dos estados: $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$

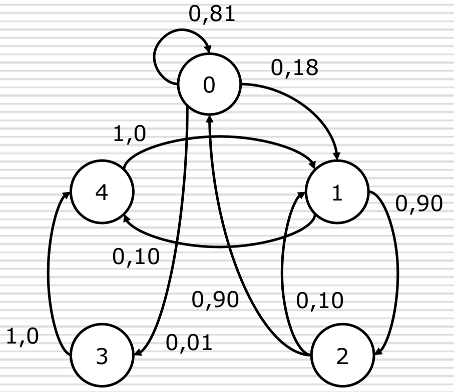
s_1 = número de máquinas em reparo

s_2 = número de dias em reparo da primeira máquina

#	Estado	Definição
0	$\mathbf{s}_0 = (0, 0)$	Nenhuma máquina quebrada
1	$\mathbf{s}_1 = (1, 1)$	Uma máquina quebrada, no primeiro dia de reparo
2	$\mathbf{s}_2 = (1, 2)$	Uma máquina quebrada, no segundo dia de reparo
3	$\mathbf{s}_3 = (2, 1)$	Duas máquinas quebradas e uma no primeiro dia de reparo
4	$\mathbf{s}_4 = (2, 2)$	Duas máquinas quebradas e uma no segundo dia de reparo

65

Matriz Transição entre Estados

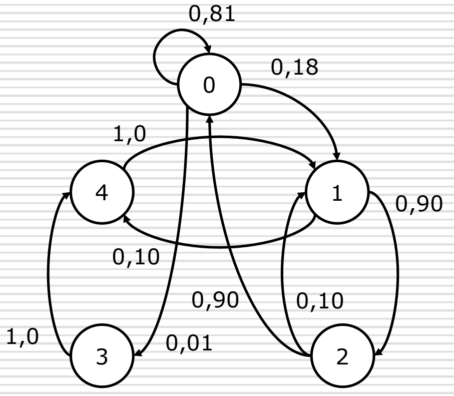


$$P = \begin{bmatrix} 0{,}81 & 0{,}18 & 0 & 0{,}01 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}90 & 0 & 0{,}10 \\ 0{,}90 & 0{,}10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cadeia Finita, Irredutível e Aperiódica

66

Solução



$$\pi = \pi \, \mathrm{P}$$

$$\sum \pi_j = 1$$

$$\pi = \begin{bmatrix} 0{,}6715 & 0{,}1575 & 0{,}1418 & 0{,}0067 & 0{,}0225 \end{bmatrix}$$

67

3. Cadeias de Markov em Tempo Contínuo

Dinâmica da Cadeia de Markov: um Processo Estocástico

3.1 Cadeias de Markov em Tempo Contínuo

- Uma Cadeia de Markov em Tempo Contínuo é uma sequência de variáveis aleatórias inteiras $\{X(t)\ ,\ t \geq 0\}$, que satisfazem a seguintes propriedade:

  $P[X(s+t)=j \mid X(s)=i, X(u_{n-1})=i_{n-1},\ldots, X(u_0)=i_0, 0\leq u_k<s]$

  $= P[X(s+t) = j \mid X(s) = i]$

- A Cadeia de Markov será Estacionária se, além da propriedade acima, atender a seguinte condição:

  $P[X(s+t)=j \mid X(s)=i] = P[\ X(t)=j \mid X(0)=i] = P_{ij}(t)$

  para todo s e t>0.

69

Definição alternativa

- Uma Cadeia de Markov em Tempo Contínuo é uma sequência de v.a. inteiras $\{X(t)\ ,\ t \geq 0\}$ que satisfazem:
  1) o tempo de permanência em cada estado i é uma variável aleatória exponencial com taxa ν_i
  2) a próxima transição será para um estado j (j ≠ i), com probabilidade p_{ij}
- Dadas as distribuições dos tempos e as probabilidades, define-se a matriz das taxas de transição entre estados:

$$Q = [q_{ij}]_{mxm} \qquad \begin{aligned} q_{ii} &= -\nu_i \\ q_{ij} &= \nu_i p_{ij} \end{aligned}$$

Onde q_{ii} representa a taxa de saída do estado i

e q_{ij}, a taxa de transição do estado i para o estado j

70

Equações de Komolgorov

Probabilidades de Transição entre Estados

$$P_{ij}(t+\Delta t) = \sum_{k \neq j} P_{ik}(t) \cdot [q_{kj}\Delta t + o(\Delta t)]$$

$$+ P_{ij}(t) \cdot [1 - \upsilon_j \Delta t + o(\Delta t)]$$

Com $\Delta t \to 0$, tem-se:

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - \upsilon_j P_{ij}(t)$$

71

Regime Estacionário

- Seja: $\pi_j = \lim_{t \to \infty} P_{ij}(t)$
- Se a Cadeia de Markov for ergódica, haverá uma distribuição estacionária dada pela solução do seguinte sistema de equações lineares:

$$\upsilon_j \pi_j = \sum_{k \neq j} q_{kj} \pi_k \qquad \pi \cdot Q = 0$$

ou

$$\sum \pi_j = 1 \qquad \sum \pi_j = 1$$

- As equações acima representam o equilíbrio nos fluxos de entrada e saída em cada estado j.

72

Exemplo 1 – Andarilho (em tempo contínuo)

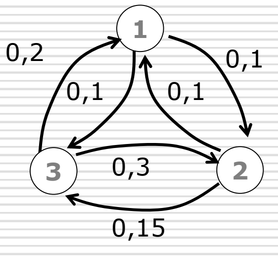
- 3 cidades
- Tempos de permanência em cada cidade, v.a. exponenciais, com médias:
  - 5 dias, para cidade 1 ($\nu_1 = {}^1/_5 = 0{,}2$),
  - 4 dias, para cidade 2 ($\nu_2 = {}^1/_4 = 0{,}25$),
  - 2 dias, para cidade 3 ($\nu_3 = {}^1/_2 = 0{,}5$).
- Probabilidades de Transição: $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} - & 0{,}50 & 0{,}50 \\ 0{,}40 & - & 0{,}60 \\ 0{,}40 & 0{,}60 & - \end{bmatrix}$
- Determine a distribuição estacionária do processo

73

Exemplo 1 – Andarilho (cont.)

- X(t)= cidade onde está no instante t (t≥0)

Diagrama de Transição



Matriz das Taxas de Transição

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & -0{,}25 & 0{,}15 \\ 0{,}20 & 0{,}30 & -0{,}50 \end{bmatrix}$$

- Equação de balanço para o estado 1:

$$0{,}20\,\pi_1 = 0{,}10\,\pi_2 + 0{,}20\,\pi_3$$

74

Solução

Taxas:

$$\nu_1 = 1/5 \qquad \nu_2 = 1/4 \qquad \nu_3 = 1/2$$

Matriz Q:

$$Q = \begin{bmatrix} -0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & -0,25 & 0,15 \\ 0,2 & 0,30 & -0,5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -0,2\,\pi_1 + 0,1\,\pi_2 + 0,2\,\pi_3 &= 0 \\ 0,1\,\pi_1 - 0,25\,\pi_2 + 0,3\,\pi_3 &= 0 \\ 0,1\,\pi_1 + 0,15\,\pi_2 - 0,5\,\pi_3 &= 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1 \end{aligned}$$

Resolvendo: $\pi \cdot Q = 0 \qquad \sum \pi_j = 1$

tem-se: $\pi = \begin{bmatrix} 0,40 & 0,40 & 0,20 \end{bmatrix}$

75

Exemplo 1 – Andarilho (novos tempos)

- Tempos de permanência em cada cidade, v.a. exponenciais, com médias iguais a 1 dia
- Probabilidades de Transição:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} - & 0,50 & 0,50 \\ 0,50 & - & 0,50 \\ 0,50 & 0,50 & - \end{bmatrix}$$

- Como fica a distribuição estacionária?

76

Solução

Taxas:

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 1$$

Matriz Q:

$$Q = \begin{bmatrix} -1{,}0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -1{,}0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & -1{,}0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo: $\pi \cdot Q = 0 \qquad \sum \pi_j = 1$

tem-se: $\pi = [0{,}333 \quad 0{,}333 \quad 0{,}333]$

77

3.2 Processos de Nascimento e Morte (*Birth-and-Death*)

- Estado: $X(t)$ = qtd de clientes no sistema em t (x=0,1,2,...)
- Transições apenas entre estados adjacentes:

  "nascimento" = transição de i para i+1 (chegada),

  "morte" = transição de i para i-1 (partida).
- Eventos:

  1) dado $X(t) = n$, o tempo até a próxima **chegada** (nascimento) tem distribuição exponencial com taxa

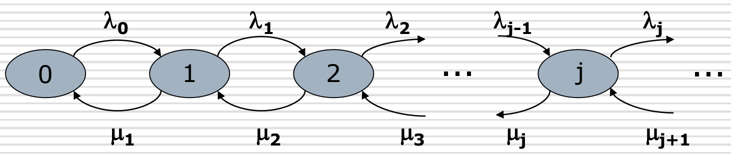
  $\lambda_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$

  2) dado $X(t) = n$, o tempo até a próxima **partida** (morte) tem distribuição exponencial com taxa

  $\mu_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$

78

Processos de Nascimento e Morte são Cadeias de Markov em Tempo Contínuo



- O tempo médio de permanência em cada estado é uma v.a. exponencial com taxas v_j dadas por:

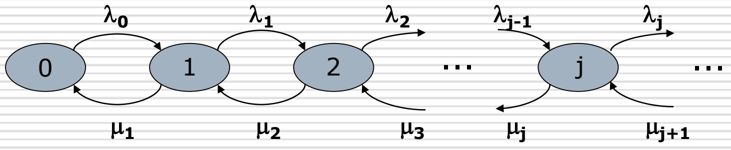
$$v_0 = \lambda_0 \qquad v_j = \lambda_j + \mu_j \qquad j = 1, 2, \ldots$$

- As probabilidades de transição entre estados são:

$$p_{01} = 1 \qquad p_{j,j+1} = \frac{\lambda_j}{\lambda_j + \mu_j} \quad p_{j,j-1} = \frac{\mu_j}{\lambda_j + \mu_j} \qquad j = 1, 2, \ldots$$

79

Diagrama e Matriz das Taxas de Transição entre Estados



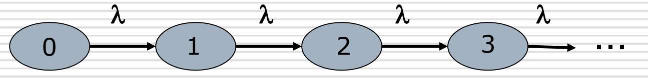
Matriz Q:

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3 + \mu_3) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

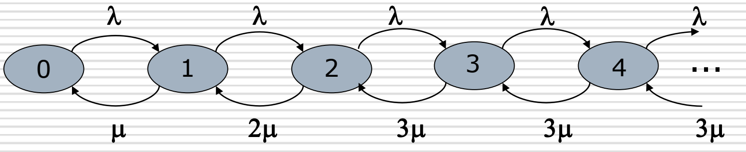
80

Casos Particulares de Processos de Nascimento e Morte

- Processo de Poisson (nascimento puro)



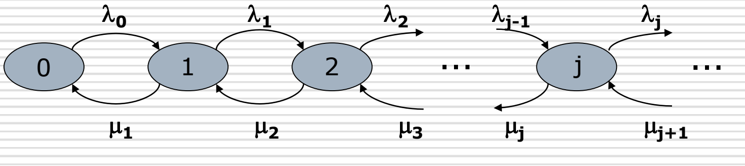
- Fila M/M/3



81

Distribuição Estacionária

- Análise em regime estacionário para os processos de nascimento e morte.



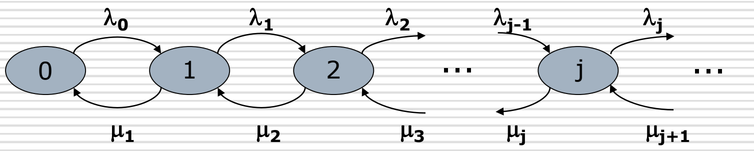
- Equações de Balanço:

  Fluxo de entrada = Fluxo de saída

- Seja π_j = prob. em regime estacionário do estado j.

82

Equações de Balanço



Saída de 0 → $\lambda_0\pi_0 = \mu_1\pi_1$ ← Entrada em 0

Saída de 1 → $(\lambda_1+\mu_1)\pi_1 = \lambda_0\pi_0 + \mu_2\pi_2$ ← Entrada em 1

$\vdots$

Saída de *j* → $(\lambda_j+\mu_j)\pi_j = \lambda_{j-1}\pi_{j-1} + \mu_{j+1}\pi_{j+1}$ ← Entrada em *j*

$\vdots$

Equivalente a: $\pi \cdot Q = 0$

83

Equações de Balanço *(cont.)*

$$\pi_{j+1} = \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}\pi_j$$

Equação 0 → $\mu_1\pi_1 = \lambda_0\pi_0$

Equação 1 → $\mu_2\pi_2 = \lambda_1\pi_1$

Equação 2 → $\mu_3\pi_3 = \lambda_2\pi_2$

$\vdots$

Equação j → $\mu_{j+1}\pi_{j+1} = \lambda_j\pi_j$

$\vdots$

Solução: $$\pi_j = \left[\frac{\lambda_{j-1}\lambda_{j-2}\cdots\lambda_0}{\mu_j\mu_{j-1}\cdots\mu_1}\right]\pi_0$$

84

Solução

Seja $C_j = \dfrac{\lambda_{j-1}\lambda_{j-2}\cdots\lambda_0}{\mu_j\mu_{j-1}\cdots\mu_1}$ para j = 1, 2, ...

Assim, tem-se: $\pi_j = C_j\pi_0$ (j = 1, 2, . . .)

Como $\Sigma_j\pi_j = 1$, determina-se π_0 pela expressão

$$\pi_0 = 1 / (1 + \Sigma_j C_j)$$

e, a seguir, os demais π_j's.

85

Exemplo 8 – Reparo de Máquinas

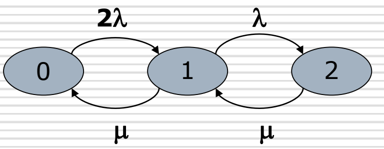
- 2 máquinas, 1 técnico
- Tempo entre quebras de uma máquina
  - V.A. Exponencial com taxa λ (média $1/\lambda$)
- Tempo de Reparo
  - V.A. Exponencial com taxa μ (média $1/\mu$)
- Determine a distribuição estacionária do processo

86

Exemplo 8 – Reparo de Máquinas (cont.)

- X(t)= quantidade de máquinas em manutenção (t≥0)

Diagrama de Transição



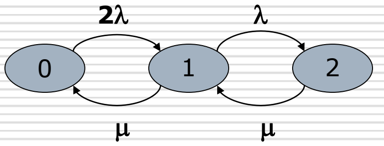
Matriz das Taxas de Transição

$$Q = \begin{bmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

- $P_{ij}(t) = P(X(t) = j \mid X(0) = i)$
- Distribuição Estacionária: $\pi_j = \lim_{t\to\infty} P_{ij}(t)$

87

Exemplo 8 – Reparo de Máquinas (cont.)



$$2\lambda\ \pi_0 = \mu\ \pi_1$$

$$\lambda\ \pi_1 = \mu\ \pi_2$$

Então:

$$\pi_1 = (2\lambda/\mu)\ \pi_0$$

$$\pi_2 = (\lambda/\mu)\ \pi_1 = (2\lambda^2/\mu^2)\ \pi_0$$

Impondo que a soma dos π_j´s seja unitária, obtém-se:

$$\pi_0 = 1 / [1 + (2\lambda/\mu) + (2\lambda^2/\mu^2)]$$

88

Exemplo 8 – Reparo de Máquinas (cont.)

- Supondo que os tempos de reparo e falha tenham média 1 e 8h, respectivamente, tem-se:

  $\lambda = 0{,}125 \qquad \mu = 1{,}0$

  $\pi_0 = 0{,}780 \qquad \pi_1 = 0{,}195 \qquad \pi_2 = 0{,}025$

- Número médio de máquinas em reparo:

  $L = 0\ \pi_0 + 1\ \pi_1 + 2\ \pi_2 = 0{,}244$

- Fração do tempo do técnico ocupado = $1 - \pi_0 = 0{,}220$
- Fração do tempo da máquina operando

  $= \pi_0 + 0{,}5\ \pi_1 = 0{,}780 + 0{,}5\ (0{,}195) = 0{,}878$

89

Próxima aula

- Winston (2004, cap.20)
  - 20.1, 20.2, 20.3, 20.7, 20.8, 20.10 e 20.13

90