

SEL0364 - Controle Não Linear Aplicado

Introdução aos sistemas não lineares

Prof^a Vilma Alves de Oliveira
Monitor: Lucas Jonys

Escola de Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo

Março de 2023



Controle não linear

- ❑ O controle não linear é um ramo que lida com a análise e projeto de sistemas de controle que possuem pelo menos uma componente não linear.

- ❑ Na parte da análise, desejamos determinar as características de um sistema não linear e seu comportamento no tempo.

- ❑ Na parte de projeto, uma planta deve ser controlada de forma a seguir algumas especificações em malha fechada.

- ❑ Por que Controle não linear?
 - ❑ Melhoria nos sistemas de controle existentes.
 - ❑ Análise de linearidades fortes (sistemas que não podem ser linearizados).
 - ❑ Incertezas no modelo.
 - ❑ Simplicidade de projeto.

Sistemas lineares

- Um sistema linear invariante no tempo pode ser representado matematicamente por um conjunto de equações diferenciais lineares, podendo ser escrito na forma $\dot{x} = Ax$, com $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ sendo a matriz do sistema e $x = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$ o vetor de estado.

- Propriedades dos sistemas lineares invariantes no tempo
 - Tem um único ponto de equilíbrio se A é não-singular.
 - O ponto de equilíbrio é estável se todos autovalores de A têm parte real negativa, independente da condição inicial.
 - A solução geral pode ser obtida analiticamente.
 - Na presença de entradas externas $u = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_m]^T$
 - Princípio da superposição é satisfeito.
 - Estabilidade assintótica implica em saída limitada se entrada limitada.
 - Entrada senoidal gera saída senoidal na mesma frequência.

Sistemas não lineares

- Um sistema não linear pode ser representado matematicamente por um conjunto de equações diferenciais não lineares, podendo ser rescrito na forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{cases}$$

- Na forma vetorial tem-se $\dot{x} = f(t, x, u)$, sendo $t \in \mathcal{R}$, $x \in \mathcal{R}^n$, $u \in \mathcal{R}^m$ e $f \in \mathcal{R}^n$. Note que para o sistema ser não-linear basta que apenas uma das funções f seja não linear.
- Características dos sistemas não lineares
 - Geralmente possuem múltiplos pontos de equilíbrio.
 - Ciclos limites (oscilações de amplitude e período fixos mesmo sem excitação externa).
 - Caos (saída extremamente sensível às condições iniciais).

Sistemas autônomos

- Se o sistema não depender explicitamente da variável independente (tempo t) ele é denominado sistema autônomo, sendo representado como $\dot{x} = f(x, u)$.

$$\ddot{x} = \ddot{x} + \dot{x} - x + 1. \quad (1)$$

- Todavia, se o sistema depender explicitamente do tempo t ele é dito não autônomo, ou variante no tempo.

$$\dot{x} = -\frac{x}{1+t}. \quad (2)$$

Definições



Pontos de equilíbrio

- Considere o sistema autônomo na forma $\dot{x} = f(x, u)$, em que u é o vetor das variáveis de controle.

Definição 1

Um estado x_e é um ponto de equilíbrio ou ponto de equilíbrio do sistema ou ponto de equilíbrio se uma vez $x(t)$ igual a x_e , $x(t)$ permanece em x_e para todo tempo futuro.

Definição 2

Diz-se que x_e é um ponto de equilíbrio para $u = u_e$, se $f(x_e, u_e) = 0$.

Pontos de equilíbrio

Definição 3

O ponto de equilíbrio $x = 0$ é estável se para $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|x(0)\| < \delta$, então $\|x(t)\| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$. Senão o equilíbrio é instável.

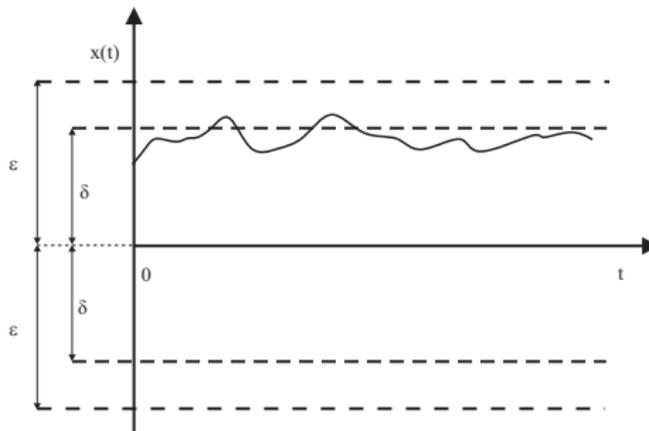


Figura 1: Ponto de equilíbrio estável.

Pontos de equilíbrio

Definição 4

Um ponto de equilíbrio $x = 0$ é assintoticamente estável se for estável e se em adição existe algum $\delta > 0$ tal que $\|x(0)\| < \delta$ implica $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

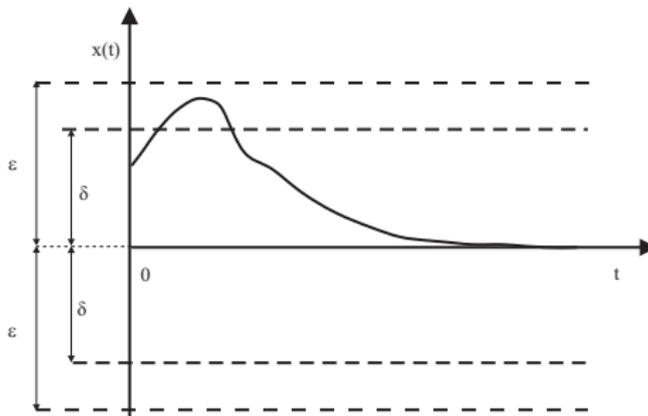


Figura 2: Ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Plano de fase

- Considere o seguinte sistema de segunda ordem:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}, \quad (3)$$

com $x = [x_1 \ x_2]^T$ a solução do sistema acima para $x_0 = [x_{10} \ x_{20}]^T$, ou seja, $x_0 = x(0)$. O lugar no plano x_1-x_2 da solução $x(t)$ para $t \geq 0$ é uma curva que passa pelo ponto x_0 . Esta curva é chamada de trajetória ou órbita do sistema a partir de x_0 . O plano x_1-x_2 é chamado plano de fase.

- Permite a análise do comportamento de um sistema linear para várias condições iniciais, sem necessidade de resolver analiticamente as equações.
- Só é aplicado para sistemas de segunda ordem pois os gráficos para sistemas de ordem superior são geometricamente e computacionalmente complexos. Todavia, muitos sistemas podem ser aproximados para um equivalente de segunda ordem.

Exemplo 1: Circuito diodo túnel

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0.5 [-h(x_1) + x_2] \\ \dot{x}_2 = 0.2 [-x_1 - 1.5x_2 + 1.2] \end{cases} \quad (4)$$

Suponha $h(x_1) = 17.76x_1 - 103.79x_1^2 + 229.62x_1^3 - 226.31x_1^4 + 83.72x_1^5$.

$$\begin{aligned} x' &= 0.5 (-(17.76x - 103.79x^2 + 229.62x^3 - 226.31x^4 + 83.72x^5) + y) \\ y' &= 0.2 (-x - 1.5y + 1.2) \end{aligned}$$

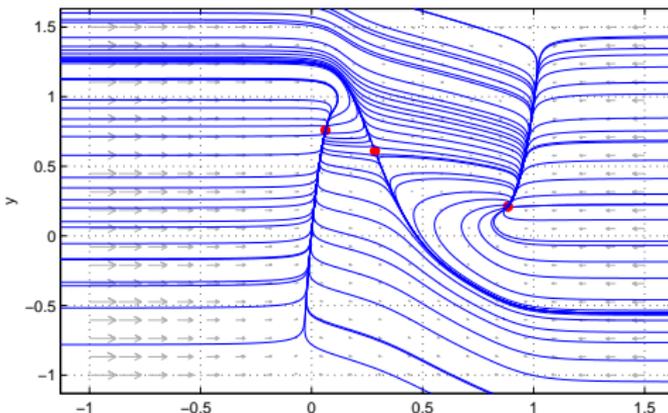


Figura 3: Plano de fase do circuito diodo túnel utilizando a função `pplane8` do MATLAB.

Exercício: Pêndulo simples amortecido

- A equação dinâmica do pêndulo simples amortecido é:

$$ml^2\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + mgl\text{sen}(\theta) = 0, \quad (5)$$

sendo m a massa do pêndulo, l o seu comprimento, c o coeficiente de atrito e g a aceleração da gravidade.

- Fazendo $x_1 = \theta$ e $x_2 = \dot{\theta}$, ela pode ser reescrita na forma espaço de estado como:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\text{sen}(x_1) - \frac{c}{ml^2}x_2 \end{cases} \quad (6)$$

- Para $g/l = 1$ e $c = 0$, plotar o plano de fase utilizando a função `pplane8`.

Linearização e estabilidade local



Linearização (Método indireto)

- Para estudar a estabilidade de um sistema não linear na vizinhança de um ponto de equilíbrio, este método consiste em fazer uma linearização em torno desse ponto via o chamado método indireto ou primeiro método de *Lyapunov*.
- Considere o sistema não linear $\dot{x} = f(x, u)$, sendo x_e e u_e o ponto de equilíbrio. Para uma pequena perturbação ζ e v :

$$\begin{cases} x = x_e + \zeta \\ u = u_e + v \end{cases} . \quad (7)$$

- Substituindo (7) em $\dot{x} = f(x, u)$:

$$\dot{\zeta} = f(x_e + \zeta, u_e + v). \quad (8)$$

Linearização (Método indireto)

- Assim, transforma-se o ponto de equilíbrio (ζ_e, v_e) no ponto de equilíbrio (x_e, u_e) . Supondo F na classe C^1 , no mínimo, a expansão de:

$$\dot{\zeta} = f(x_e + \zeta, u_e + v) \quad (9)$$

em uma série de Taylor em torno do ponto (x_e, u_e) fica:

$$\dot{\zeta} = f(x_e, u_e) + \nabla f_x(x_e, u_e)^T \zeta + \nabla f_u(x_e, u_e)^T v + \text{termos de ordem superior}, \quad (10)$$

sendo $\nabla f_x^T = \frac{\partial f}{\partial x}$ e $\nabla f_u^T = \frac{\partial f}{\partial u}$ as matrizes jacobianas de $f(x, u)$ com relação a x e a u , respectivamente.

Linearização (Método indireto)

- Dessa forma, desprezando os termos de ordem superior e lembrando que $f(x_e, u_e) = 0$:

$$\dot{\zeta} = f(x_e, u_e) + \nabla f_x(x_e, u_e)^T \zeta + \nabla f_u(x_e, u_e)^T v + \text{termos de ordem superior},$$

$$\dot{\zeta} = \nabla f_x(x_e, u_e)^T \zeta + \nabla f_u(x_e, u_e)^T v, \quad (11)$$

$$\dot{\zeta} = A\zeta + Bv, \quad (12)$$

com A e B sendo as matrizes jacobianas calculadas no ponto de equilíbrio:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x=x_e, u=u_e} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{x=x_e, u=u_e}$$

Classificação dos pontos de equilíbrio

- ❑ O ponto de equilíbrio agora é classificado analisando-se a natureza dos autovalores da matriz A correspondente.

Definição 5

Um ponto de equilíbrio é instável se um ou mais autovalores de A tiver parte real positiva.

Definição 6

Se todos os autovalores tiverem parte real não nula, então dizemos que o ponto de equilíbrio x_e é um ponto de equilíbrio hiperbólico, caso contrário, dizemos que x_e é um ponto de equilíbrio não hiperbólico.



Pontos de equilíbrio hiperbólicos

Definição 7

Se todos os autovalores de A tem parte real negativa, diz-se que x_e é assintoticamente estável, pois $x \rightarrow x_e$ quando $t \rightarrow \infty$, e então o ponto de equilíbrio é chamado de sumidouro (sink).

- Há dois tipos de sumidouro: se todos os autovalores tiverem parte imaginária nula um nó estável, caso contrário, tem-se um o foco estável.

Definição 8

Se todos os autovalores de A têm parte real positiva, então x se afasta de x_e quando $t \rightarrow \infty$, então x_e é um ponto de equilíbrio instável e é chamado de fonte (source).

- Há dois tipos de fontes: o foco instável, se algum autovalor tiver parte imaginária não nula; e o nó instável, no caso contrário.

Pontos de equilíbrio hiperbólicos

Definição 9

Se alguns dos autovalores, mas não todos, têm parte real positiva, enquanto o resto tem parte real negativa, x_e é chamado de ponto de sela. Como a sela tem alguns autovalores positivos, é também é instável.

Pontos de equilíbrio não hiperbólicos

Definição 10

Se um ou mais autovalores de A tiver parte real negativa enquanto os outros tiverem parte real nula, então x_e é um ponto de equilíbrio marginalmente estável.

Definição 11

Se todos os autovalores de A são puramente imaginários, o ponto de equilíbrio é então chamado de centro.

Resumo dos casos: sistema de segunda ordem

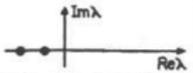
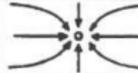
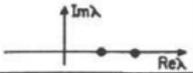
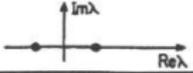
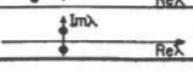
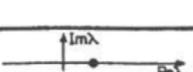
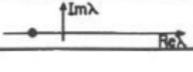
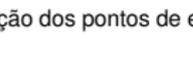
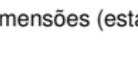
| Autovalores | Sinal da parte real | Representação no plano complexo | Ponto fixo | Exemplo | Estabilidade |
|---|--|---|--------------------------------------|--|-----------------------------------|
| $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ | $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ |  | nó (hiperbólico) |  | assintoticamente estável |
| | $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ |  | nó (hiperbólico) |  | instável |
| | $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ |  | sela (hiperbólico) |  | instável |
| $\lambda_1 = \lambda_2 = *$ (complexos conjugados) | positiva |  | foco (hiperbólico) |  | instável |
| | negativa |  | foco (hiperbólico) |  | assintoticamente estável |
| | nula |  | centro (elíptico) CASO DEGENERADO |  | estável (não assintoticamente) |
| $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ | nula | CASOS DEGENERADOS (elípticos) | | | |
| $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \in \mathbb{R}$ | positiva |  | "inflected node" (hiperbólico) |  | instável |
| | negativa |  | "inflected node" (hiperbólico) |  | assintoticamente estável |

Figura 4: Resumo da classificação dos pontos de equilíbrio em duas dimensões (estabilidade linear).

Resumo dos casos: sistema de segunda ordem

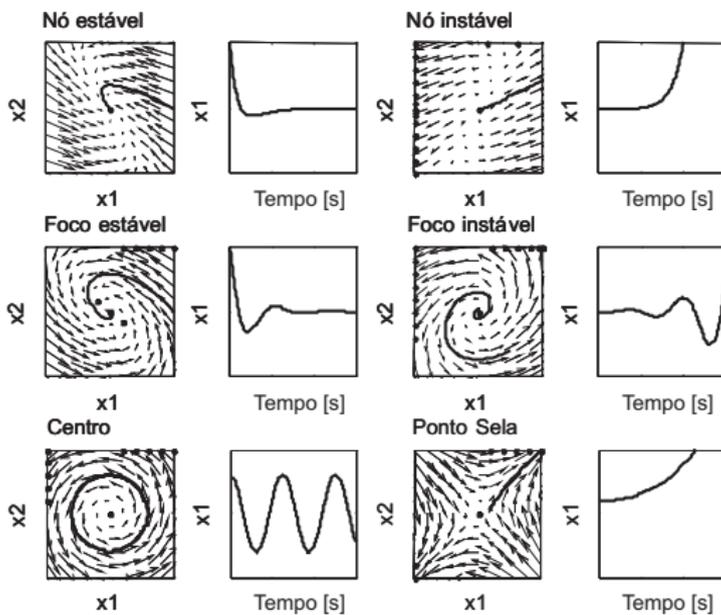


Figura 5: Trajetórias no plano de fase e trajetórias no tempo.

Primeiro método de *Lyapunov*

Tarefa: linearização

Considere o sistema

$$\ddot{x} + 0,6\dot{x} + 3x + x^2 = 0. \quad (13)$$

1. Faça sua representação em espaço de estados.
2. Determine os pontos de equilíbrio (PE).
3. Faça a linearização pelo primeiro método de *Lyapunov* e classifique os pontos de equilíbrio.
4. Plote o plano de fase para o sistema.
5. Plote a solução temporal das variáveis de estado considerando condições iniciais diferentes (próximas aos pontos de equilíbrio).
6. Discorra sobre a estabilidade dos pontos de equilíbrio por meio dos itens 3, 4 e 5.

Relação entre o sistema não linear e sua linearização

Teorema (Método de linearização de Lyapunov)

Se o sistema linearizado é assintoticamente estável então o ponto de equilíbrio do sistema não-linear é assintoticamente estável. Se o sistema linearizado é instável então o ponto de equilíbrio do sistema não linear é instável.

- Assim, pode ser feita uma relação direta entre a estabilidade local de um ponto de equilíbrio de um sistema não-linear com a estabilidade de seu correspondente sistema linear.
- Por exemplo, se a correspondente linearização de um sistema apresentar um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, então pode-se concluir que o ponto de equilíbrio correspondente do sistema não linear também é estável.
- Assim, justifica-se o uso de técnicas lineares para o controle de sistemas não-lineares na prática.

Relação entre o sistema não linear e sua linearização

Definição 12

Um ponto de equilíbrio estável segundo *Lyapunov* o qual não é assintoticamente estável é dito ser marginalmente estável.

- A correspondência entre o sistema não linear e o sistema linearizado não é válida para o caso do sistema linearizado apresentar um ponto de equilíbrio marginalmente estável ou um centro, sendo nesse caso necessária uma análise mais profunda do sistema não-linear.

Relação entre o sistema não linear e sua linearização

- Exemplo: Considere o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}, \quad (14)$$

cujo ponto de equilíbrio é $x_e = (0, 0)$. Utilizando o método indireto, a linearização em torno do ponto de equilíbrio retorna a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

cujos autovalores são $\lambda = \pm j$, o que caracteriza um centro.

- Todavia, o plano de fase do sistema não linear lembra um foco estável. Portanto, o comportamento qualitativo descrito pela sua linearização no ponto de equilíbrio não corresponde ao comportamento do sistema não linear na vizinhança deste ponto.

Relação entre o sistema não linear e sua linearização

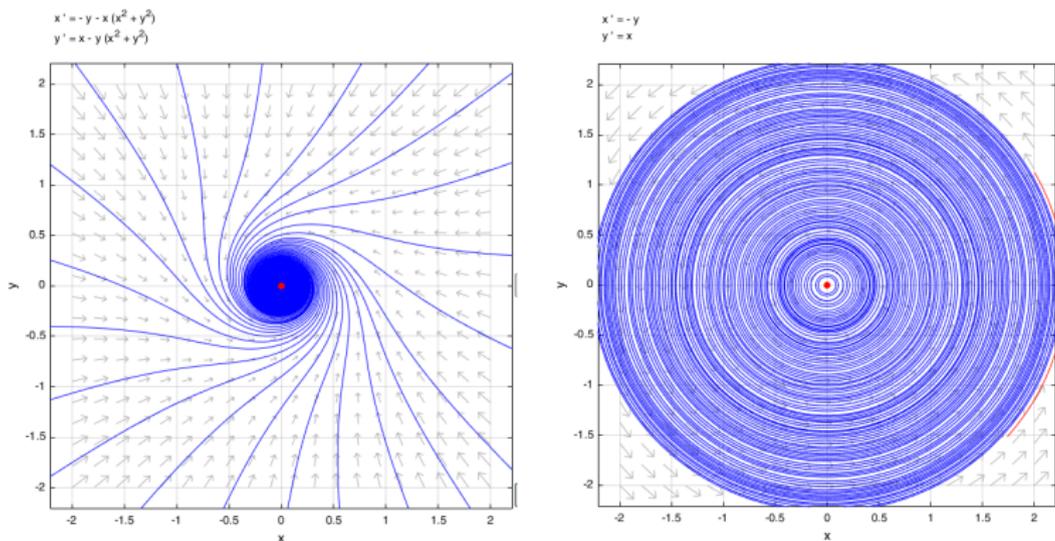


Figura 6: Plano de fase do sistema não linear (à esquerda) e do sistema linearizado (à direita).

Ciclo limite

- Oscilação é um importante fenômeno de sistemas dinâmicos. A solução de um sistema periódico ou oscilador é do tipo:

$$x(t + T) = x(t) \quad \forall t > 0, \quad T > 0. \quad (16)$$

- Seja o sistema linear $\dot{x} = Ax$, com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Suponha que A tenha autovalores $\lambda = \pm j\beta$ e portanto o ponto de equilíbrio (origem) é um centro. A partir de uma transformação linear $z = Tx$ pode-se obter a forma de Jordan real para o sistema:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix} z. \quad (17)$$

- Utilizando coordenadas polares definidas por $z_1 = r \cos(\theta)$ e $z_2 = r \sin(\theta)$, pode-se reescrever o sistema (17) da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = \beta \end{cases}. \quad (18)$$

Ciclo limite

- A solução é portanto do tipo:

$$z_1(t) = r_o \cos(\beta t + \theta_0) \quad (19)$$

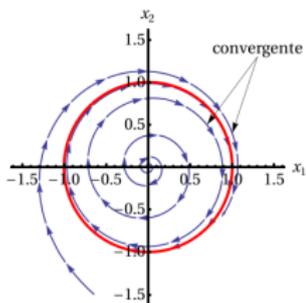
$$z_2(t) = r_o \text{sen}(\beta t + \theta_0), \quad (20)$$

com $r_o = \sqrt{z_1(0)^2 + z_2(0)^2}$ e $\theta_0 = \tan^{-1} \frac{z_2(0)}{z_1(0)}$.

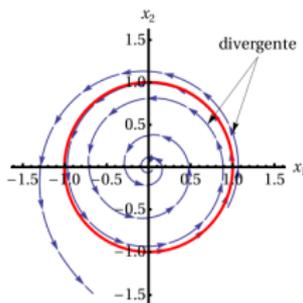
- Portanto, este sistema possui uma oscilação mantida de amplitude r_o e é referenciado como um oscilador harmônico.
- Observe que a amplitude da oscilação depende das condições iniciais e também que esta oscilação mantida pode ser destruída com uma pequena perturbação nos autovalores complexos puros da matriz A que os transforme em autovalores complexos com parte real positiva. O que significa que este oscilador linear não é estruturalmente estável.

Ciclo limite

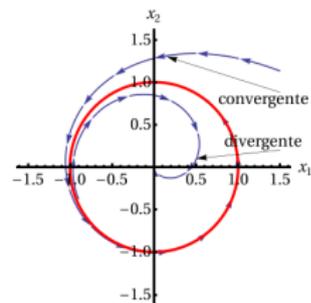
- No plano de fase, o ciclo limite é caracterizado por uma curva fechada e isolada.
 - Curva fechada: indica a natureza periódica da solução
 - Curva isolada: trajetórias convergem ou divergem do ciclo limite



(a) Estável.



(b) Instável.



(c) Semiestável.

Figura 7: Estabilidade do ciclo limite. Camino, J. F.

Ciclo limite

Teorema (Poincare)

Se um ciclo limite existir em um sistema autônomo de segunda ordem então $N = S + 1$ com N número de nós, centros e focos contidos dentro do ciclo limite e S o número de selas também contidas dentro do ciclo limite.

Teorema (Poincare-Bendixson)

Se uma trajetória de um sistema autônomo de segunda ordem permanecer em uma região finita Ω do plano de fase, então uma das seguintes situações ocorrem:

1. a trajetória vai para o ponto de equilíbrio;
2. a trajetória tende assintoticamente para um ciclo limite estável;
3. a trajetória é um ciclo limite.

Ciclo limite

Teorema (Bendixson)

Para o sistema não linear:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases},$$

nenhum ciclo limite pode existir em uma região Ω do plano de fase na qual

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \quad (21)$$

não se anula e não troca de sinal.

Exemplo: Verificar que o sistema abaixo não apresenta ciclo limite

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = g(x_2) + 4x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 = h(x_1) + 4x_1^2x_2 \end{cases}.$$

Enquete 2

Responder à Enquete 2 dentro da Unidade 1 no e-disciplinas.



Segundo método de *Lyapunov*



Segundo método de *Lyapunov*

- A ideia básica do 2º. Método de *Lyapunov* relaciona-se à energia total do sistema. Se um sistema possui um estado de equilíbrio estável x_e , então a energia total armazenada no sistema decresce com o tempo até a energia total atingir o seu valor mínimo no estado de equilíbrio x_e . A estabilidade é analisada via uma função escalar especial chamada função de *Lyapunov*.

Segundo método de Lyapunov

Definição 13: função de Lyapunov

A função de Lyapunov $V(x)$ satisfaz as seguintes condições para todo $t_1 > t_0$ e para todo x na vizinhança de $x = 0$, com $x = 0$ um ponto de equilíbrio do sistema $\dot{x} = f(x)$:

1. $V(x)$ e suas derivadas parciais são definidas e são contínuas
2. $V(0) = 0$
3. $V(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ e $\dot{V}(x) \leq 0$, onde $\dot{V}(x)$ é a derivada de $V(x)$ em relação às trajetórias de $\dot{x} = f(x)$, i.e

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \frac{dV(x)}{dt} = [\text{grad}_x V]^T \dot{x} \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} f(x).\end{aligned}$$

Segundo método de Lyapunov

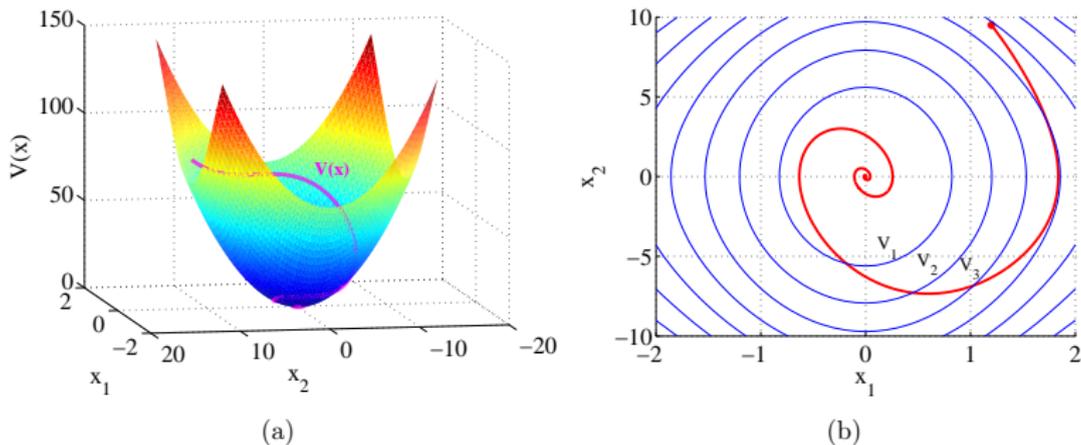


Figura 8: Representação geométrica de uma função de Lyapunov. (a) Representação 3D da função de Lyapunov ilustrando $V(x)$ ao longo de uma solução iniciando em x_0 , (b) Curvas de nível: $V_1 < V_2 < V_3$ e solução $x(t)$ iniciando em x_0 .

Segundo método de Lyapunov

- Na Figura 8 faz-se uma representação geométrica de uma função de Lyapunov. Nota-se que a condição $\dot{V} \leq 0$ implica que a trajetória do sistema deve se aproximar da origem passando por curvas de nível com valores referentes a função de Lyapunov V cada vez menores. E se $\dot{V} < 0$, então $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Segundo método de Lyapunov

Teorema

Considere o sistema:

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0.$$

Suponha que uma $V(x)$ possa ser determinada para o sistema. Então, o estado de equilíbrio $x = 0$ é assintoticamente estável se \dot{V} for negativa definida e estável no sentido de Lyapunov se \dot{V} for negativa semi-definida.

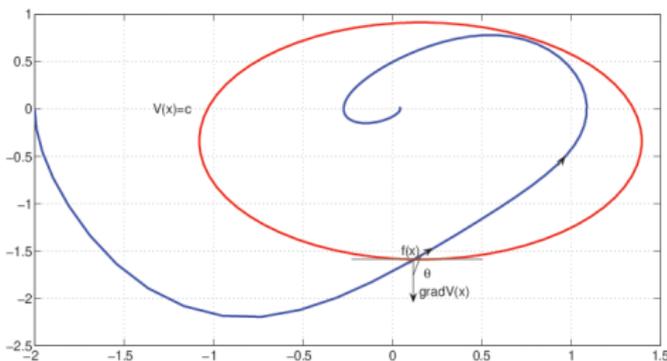


Figura 9: Sistema estável: $\cos(\theta) = \frac{\langle \text{grad}_x V, f(x) \rangle}{\|\text{grad}_x V\| \|f(x)\|}$.

Segundo método de Lyapunov

- Nota-se que a derivada de $V(x)$ é o produto escalar de dois vetores. A função $f(x)$ é um vetor que aponta no sentido da tangente da trajetória $x(t)$ do sistema naquele ponto, e $grad_x V(x)$ é um vetor normal, no sentido de crescimento de $V(x)$ em relação à uma curva de nível $V(x) = c, c > 0$. A Figura 9 ilustra o caso em que a derivada de $V(x)$ é negativa.
- O teorema seguinte pode garantir a estabilidade assintótica do sistema mesmo que a derivada da função de Lyapunov V seja semidefinida negativa. A definição de conjunto invariante é necessária para entender o teorema.
- Um conjunto invariante com respeito a $\dot{x} = f(x)$ indica que se a solução pertence a \mathcal{M} em um instante t , então a solução pertence a \mathcal{M} para todo tempo futuro e passado.

Segundo método de Lyapunov

Teorema

Considere $\dot{x} = f(x)$, f contínua, e seja $V(x)$ uma função escalar com primeira derivada parcial contínua. Suponha:

1. para algum $\ell > 0$, a região Ω_ℓ definida por $V(x) < \ell$ é limitada
2. $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega_\ell$

Seja E o conjunto de todos os pontos dentro Ω_ℓ onde $\dot{V} = 0$, e \mathcal{M} o maior conjunto invariante em E^a . Então, toda solução originada em Ω_ℓ tende para \mathcal{M} quando $t \rightarrow \infty$.

Teorema: Princípio da invariância de LaSalle

Suponha $V(x) : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ tal que em $\Omega_\ell = \{x \in \mathcal{R}^n : V(x) < \ell\}$ tem-se $\dot{V}(x) \leq 0$.

Defina $E = \{x \in \Omega_\ell : \dot{V}(x) = 0\}$. Então, toda solução do sistema iniciando em Ω_ℓ é atraída para o maior conjunto invariante em E . Se E não conter outra trajetória a não ser $x = 0$ para $t \in [t_0, \infty]$, a origem $x = 0$ é assintoticamente estável.

^a Entende-se por maior conjunto invariante a união de todos os conjuntos invariantes.

Segundo método de Lyapunov

- Exemplo: Seja o pêndulo simples com amortecimento viscoso com $x_1 = \theta$ e $x_2 = \dot{\theta}$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\text{sen}(x_1) - x_2 \end{cases} \quad (22)$$

- Considere:

$$V(x) = 1 - \cos(x_1) + \frac{x_2^2}{2}. \quad (23)$$

Na verdade, esta $V(x)$ representa a energia total do pêndulo, composta pela soma da energia potencial com a energia cinética.

Segundo método de Lyapunov

- Observe que $V(x) > 0$, no conjunto $D = x \in \mathcal{R} : 0 \leq x_1 \leq \pi$ ($V(x) = 0$ para $x \neq 0$). Por exemplo $x = (\pi, 0)$ não atende o item 3 da função de Lyapunov).

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \text{sen}(x_1)\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 \\ &= \text{sen}(x_1)x_2 + x_2(-x_2 - \text{sen}(x_1)) = -x_2^2 \leq 0.\end{aligned}$$

- Tem-se então que $x = 0$ é estável localmente. Uma outra alternativa para tentar provar a estabilidade assintótica da origem seria usar o princípio de invariância de LaSalle, o qual não exige que a derivada da função V seja definida negativa.

Segundo método de Lyapunov

Tarefa: Lyapunov e LaSalle

Considere o pêndulo simples com amortecimento viscoso

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\text{sen}(x_1) - x_2 \end{cases} \quad (24)$$

e a candidata Lyapunov $V(x) = (1 - \cos(x_1)) + \frac{x_2^2}{2}$.

1. Calcule o conjunto de pontos de equilíbrio (PE).
2. Investigar a estabilidade dos pontos de equilíbrio pelo 1º método de Lyapunov.
3. Investigar a estabilidade dos pontos de equilíbrio pelo 2º método de Lyapunov utilizando a candidata Lyapunov dada.
4. Usar a extensão de La Salle para mostrar a estabilidade assintótica da origem. Neste ponto, definir o conjunto E e conjunto ω_l e plotá-los em um mesmo gráfico. Plotar a função de energia $V(x)$ e $\dot{V}(x)$ no plano. Escolher uma condição inicial e plotar a evolução da trajetória para a origem.

Segundo método de Lyapunov

Teorema: Estabilidade global

Suponha uma função escalar $V(x)$ com derivadas contínuas tal que

1. $V(x) > 0$;
2. $\dot{V}(x) < 0$;
3. $V(x) \rightarrow \infty$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$.

Então, o ponto de equilíbrio 0 é globalmente assintoticamente estável.

Segundo método de Lyapunov

Tarefa: Ciclo limite atrativo

Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1^7(x_1^4 + 2x_2^2 - 10) \\ \dot{x}_2 = x_1^3 - 3x_2^5(x_1^4 + 2x_2^2 - 10) \end{cases}, \quad (25)$$

e a candidata Lyapunov $V(x) = (x_1^4 + 2x_2^2 - 10)$.

1. Calcule o conjunto de pontos de equilíbrio (PE).
2. Linearize o sistema pelo 1º método de Lyapunov e classifique os PE.
3. Calcule o conjunto E da definição do princípio da invariância de LaSalle e mostre que ele é um conjunto invariante.
4. Verificar que o conjunto E é invariante e caracterizar a presença de um ciclo limite.
5. Defina o conjunto ω_ℓ em torno do ciclo limite e mostre que o ciclo limite é atrativo.
6. Plotar $V(x)$, curvas de nível e $\dot{V}(x)$ e verificar o comportamento decrescente de $V(x)$ ao longo das trajetórias na vizinhança do ciclo limite.

Referências



Referências

- Slotine, J.J.E. *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, 1991.
- Khalil, H. *Nonlinear Systems*, Prentice-Hall, 1996.
- Nayfeh, A. H. e Balachandram, B., *Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computational, and Experimental Methods*, Wiley-Interscience Publication, 1995.
- Fiedler-Ferrara, N. e Prado, C. P. C., *Caos: Uma Introdução*, Edgard Blücher, 1994.
- Argyris, J., Faust, C. e Haase, M., *An Exploration of Chaos*, North-Holland, 1994.