MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia III

3a. Lista de Exercícios - 1o. semestre de 2023

1. Determine uma representação paramétrica de cada uma das superfícies abaixo e calcule sua área:

(a) S é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ interior ao cone $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$;

(b) S é a parte do cilindro $x^2+z^2=1$ compreendida entre os planos $y=-1$ e $y=3$;

(c) S é a parte do plano $z=2x+3y$ que é interior ao cilindro $x^2+y^2=16$;

(d) S é a parte do parabolóide hiperbólico $z=y^2-x^2$ que está entre os cilindros $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$;

(e) S é a parte do cilindro $x^2+z^2=a^2$ que está no interior do cilindro $x^2+y^2=a^2$, onde $a>0$;

(f) S é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ que está no interior do cilindro $x^2+y^2=ax$, onde $a>0$;

(g) S é o toro obtido pela rotação da circunferência no plano xz com centro $(b,0,0)$ e raio $a<b$ em tôrno do eixo z;

(h) S é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ com $z \geq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3}$.

(i). S é a parte do parabolóide $z=1-2x^2-y^2$ limitada pela superfície $16x^2+4y^2=1$.

Resp. (a) $4\pi(2-\sqrt{2})$, (b) 8π, (c) $16\pi\sqrt{14}$, (d) $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-5\sqrt{5})$, (e) $8a^2$, (f) $2a^2(\pi-2)$, (g) $4ab\pi^2$, (h) $4\pi(2-\frac{2}{\sqrt{10}})$, (i) $\frac{\pi}{12}(2\sqrt{2}-1)$.

2. Sejam $0<a<b$ e $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ uma função positiva com derivada contínua. Determine equações paramétricas das superfícies geradas pela rotação da curva $y=f(x)$ em torno do (a) eixo-x, (b) eixo-y. Calcule a área da superfície em cada caso. Resp. (a) $2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx$, (b) $2\pi\int_a^b x\sqrt{1+f'(x)^2}dx$.

3. Calcule as seguintes integrais de superfícies:

(a) $\iint_S y\,d\sigma$, onde S é a superfície dada por $z=x+y^2$, $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 2$;

(b) $\iint_S x^2\,d\sigma$, onde S é a esfera $x^2+y^2+z^2=1$;

(c) $\iint_S yz\,d\sigma$, onde S é a parte do plano $z=y+3$ limitada pelo cilindro $x^2+y^2=1$;

(d) $\iint_S xy\,d\sigma$, onde S é o bordo da região limitada pelo cilindro $x^2+z^2=1$ e pelos planos $y=0$ e $x+y=2$;

(e) $\iint_S z(x^2+y^2)\,d\sigma$, onde S é o hemisfério $x^2+y^2+z^2=4$, $z\geq 0$;

(f) $\iint_S xyz\,d\sigma$, onde S é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=1$ interior ao cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

(g) $\iint_S \sqrt{\dfrac{2x^2+2y^2-2}{2x^2+2y^2-1}}\,d\sigma$, onde S é a parte de $x^2+y^2-z^2=1$ com $1\leq z\leq 3$;

(h) $\iint_S (x+1)d\sigma$, onde S é a parte de $z=\sqrt{x^2+y^2}$ limitada por $x^2+y^2=2y$.

Resp: (a) $13\sqrt{2}/3$, (b) $4\pi/3$, , (c) $\pi\sqrt{2}/4$, (d) $\frac{-\pi}{4}(8+\sqrt{2})$, (e) 16π, (f) 0, (g) $8\pi\sqrt{2}$, (h) $\pi\sqrt{2}$.

4. Calcule a massa das superfícies sendo $\delta(x,y,z)$ a densidade pontual de massa para:
(a) S é a parte do plano $3x+2y+z=6$ contida no primeiro octante e $\delta(x,y,z)=y$.
(b) S é o triângulo com vértices $(1,0,0)$, $(1,1,1)$ e $(0,0,2)$ e $\delta(x,y,z)=xz$.
(c) S é a parte do parabolóide $x=4-y^2-z^2$ contida no semi espaço $x\geq 0$ e $\delta(x,y,z)=x^2+y^2$.
(d) S é a parte de $z=x^2+y^2+2xy$ limitada por $x^2+y^2=2$ e $\delta(x,y,z)=\dfrac{2x^2+3y^2}{\sqrt{1+8z}}$
(e) S é a parte de $z=\ln(x^2+y^2)$ limitada pelos cilindros $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=e^2$, e $\delta(x,y,z)=x^2+y^2$.

Resp: (a) $3\sqrt{14}$, (b) $7\sqrt{6}/24$, (c) $\frac{\pi}{840}(12563\sqrt{17}-2347)$ (d) 5π (e) $\frac{e}{3}(e^2+4)^{3/2}-\frac{5^{3/2}}{3}-\int_1^e(r^2+4)^{3/2}dr$.

5. Calcule a integral de superfície $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,d\sigma$ para cada um dos campos de vetores $\vec{F}$ e superfícies orientadas S indicadas abaixo. Em outras palavras, calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S. Quando S é uma superfície fechada, admita que S está orientada pela normal *exterior*.

(a) $\vec{F}(x,y,z)=x^2y\vec{i}-3xy^2\vec{j}+4y^3\vec{k}$ e S é a parte do parabolóide $z=9-x^2-y^2$, com $z\geq 0$, orientada de modo que a normal no ponto $(0,0,9)$ é $\vec{k}$;
(b) $\vec{F}(x,y,z)=x\vec{i}+xy\vec{j}+xz\vec{k}$ e S é a parte do plano $3x+2y+z=6$ interior ao cilindro $x^2+y^2=1$, orientada de modo que seu vetor normal é $\frac{1}{\sqrt{14}}(3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k})$;
(c) $\vec{F}(x,y,z)=-x\vec{i}-y\vec{j}+z^2\vec{k}$ e S é a parte do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ entre os planos $z=1$ e $z=2$, orientada de modo que sua normal $\vec{N}$ satisfaz $\vec{N}\cdot\vec{k}<0$;
(d) $\vec{F}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ e S é a esfera $x^2+y^2+z^2=9$;
(e) $\vec{F}(x,y,z)=-y\vec{i}+x\vec{j}+3z\vec{k}$ e S é o hemisfério $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$, orientada de modo que a normal no ponto $(0,0,4)$ é $\vec{k}$;
(f) $\vec{F}(x,y,z)=y\vec{i}-z\vec{k}$ e S consiste do parabolóide $y=x^2+z^2$, $0\leq y\leq 1$ e do disco $x^2+z^2\leq 1$, $y=1$;
(g) $\vec{F}(x,y,z)=x\vec{i}+2y\vec{j}+3z\vec{k}$ e S é o cubo de vértices $(\pm1,\pm1,\pm1)$;
(h) $\vec{F}(x,y,z)=(x+y)\vec{i}-(2y+1)\vec{j}+z\vec{k}$ e S é o retângulo de vértices $(1,0,1)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,1,1)$, orientado de modo que sua normal $\vec{N}$ satisfaz $\vec{N}\cdot\vec{j}>0$;
(i) $\vec{F}(x,y,z)=-yz\vec{i}$ e S é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ exterior ao cilindro $x^2+y^2\leq 1$, orientada de modo que a normal no ponto $(2,0,0)$ é $\vec{i}$;
(j) $\vec{F}(x,y,z)=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ e S é a parte da superfície $z=\sqrt{4-x}$ limitada pela superfície cilíndrica $y^2=x$, orientado de modo que sua normal $\vec{N}$ satisfaz $\vec{N}\cdot\vec{i}>0$;
(k) $\vec{F}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}-2z\vec{k}$ e S é a parte do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ limitada pelo cilindro $x^2+y^2=2x$, orientada de modo que sua normal $\vec{N}$ satisfaz $\vec{N}\cdot\vec{k}<0$.

Resp. (a) 0, (b) $-3\pi/4$, (c) $-73\pi/6$, (d) 108π, (e) 128π, (f) $-\pi/2$, (g) 48, (h) -1, (i) 0, (j) $128/5$, (k) $32/3$.

6. Calcule
(a) $\displaystyle\iint_S xz\,dy\wedge dz+yz\,dz\wedge dx+x^2\,dx\wedge dy$, onde S é a semi-esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$, $z\geq 0$, orientada segundo a normal exterior; Resp. $3\pi a^4/4$.
(b) $\displaystyle\iint_S x\,dy\wedge dz+y\,dz\wedge dx+z\,dx\wedge dy$, onde S é a parte do plano $x+y+z=2$ no primeiro octante, orientada de modo que sua normal satisfaz $\vec{N}\cdot\vec{j}>0$; Resp. 4.

(c) $\displaystyle\iint_S x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy$, onde S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ contida no semiespaço $z \geq 2y + 1$, orientada de modo que sua normal satisfaz $\vec{N}\cdot\vec{k} \geq 0$. Resp. 28π.

7. Suponha que a superfície S seja o gráfico de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1, orientada de modo que sua normal unitária $\vec{N}$ tenha a terceira componente não-negativa. Se $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ é um campo de vetores sobre S, mostre que

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}d\sigma = \iint_D \left(-P\frac{\partial f}{\partial x} - Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\right) dxdy.$$

8. Calcule $\displaystyle\iint_S y^2z^2dy\wedge dz + xdz\wedge dx + ydx\wedge dy$, onde S é a parte da superfície $z^2 = x^2 + 2y^2$ entre os planos $z = 1$ e $z = y + 3$, orientada com $\vec{N}$ tal que $\vec{N}\cdot\vec{k} < 0$. Resp. 54π.

9. Calcule $\displaystyle\iint_S e^{z^2}\ln(z+y)dy\wedge dz + (x^2+z^2)dz\wedge dx + zdx\wedge dy$, onde S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ limitado pelo plano $z = y + 4$, orientada com $\vec{N}$ tal que $\vec{N}\cdot\vec{k} \geq 0$. Resp. $-\frac{35\pi}{16}$

10. Use o teorema de Stokes para calcular $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ em cada um dos seguintes casos:

(a) $\vec{F}(x,y,z) = xz\vec{i} + 2xy\vec{j} + 3xy\vec{k}$ e γ é a fronteira da parte do plano $3x + y + z = 3$ contida no primeiro octante, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário; Resp. $\frac{7}{2}$.

(b) $\vec{F}(x,y,z) = (z^2 + e^{x^2})\vec{i} + (y^2 + \ln(1+y^2))\vec{j} + (xy + \sin z^3)\vec{k}$ e γ é a fronteira do triângulo com vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,2)$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário;Resp. $\frac{4}{3}$.

(c) $\vec{F}(x,y,z) = (2z + \sin e^{x^3})\vec{i} + 4x\vec{j} + (5y + \sin(\sin z^2))\vec{k}$ e γ é a a intersecção do plano $z = x + 4$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 4$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário; Resp. -4π.

(d) $\vec{F}(x,y,z) = (x + \cos(x^3))\vec{i} + y\vec{j} + (x^2 - y^2 + z^{100})\vec{k}$ e γ é a fronteira da parte do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ contida no primeiro octante, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário; Resp. -1.

(e) $\vec{F}(x,y,z) = (y+z)\vec{i} + (2x + (1+y^2)^{20})\vec{j} + (x+y+z)\vec{k}$ e γ é a intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ com o plano $z = y$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário; Resp. π.

(f) $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ e γ é a intersecção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(a > 0)$ com o plano $x + y + z = 0$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário. Resp. $-a^2\pi\sqrt{3}$.

11. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{r}$, sendo:

(a) $\vec{v} = (yz, xz + \ln(1+y^4), zy)$ e γ é a intersecção das superfícies $x^2 + y^2 = 4$ e $z = 2x + 3$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário; Resp. -24π.

(b) $\vec{v} = (\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{z^3}{1+z^2})$ e γ é a intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $x + y + z = 4$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido horário; Resp. -2π.

(c) $\vec{v} = (2xz^3 + y, x^2y^2, 3x^2z^2)$ e γ é a intersecção das superfícies $z = \sin y + 10$ e $x^2 + y^2 = 16$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário; Resp. -16π.

(d) $\vec{v} = (x - y^2, x - z + \dfrac{y^2}{2+\sin y}, y)$ e γ é a intersecção do parabolóide $4z = x^2 + y^2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 4$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário; Resp. 4π.

(e) $\vec{v} = (e^x \sin y, e^x \cos y - z, y)$ e γ é o bordo da superfície obtida pela rotação em tôrno do eixo Oz do gráfico de $z = \frac{1}{y^2}$, $e \le y \le e^2$. Escolha uma orientação para γ. Resp. 0.

(f) $\vec{v} = (\cos(1+x^2), \dfrac{-z}{y^2+z^2} + e^{y^4}, \dfrac{y}{y^2+z^2})$ e γ é a intersecção do cilindro $y^2 + z^2 = 4$ com o plano $x = y + z$, orientada de modo que sua projeção no plano yz seja percorrida uma vez no sentido anti-horário. Resp. 2π.

12.
(a) Calcule $\displaystyle\int_\gamma (z+y^2)dx + (y^2+1)dy + [\ln(z^2+1) + y]dz$, sendo $\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t, 10 - 2\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Resp. 4π.

(b) Seja γ a curva de intersecção do prisma (superfície) de faces $x = 2$, $x = -2$, $y = 3$, $y = -3$, com o plano $z = -x + 4$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \Big[\frac{-(y-1)}{x^2+(y-1)^2}\Big]dx + \Big[\frac{x}{x^2+(y-1)^2} + z\Big]dy + \sin z dz.$ Resp. $-24 + 2\pi$.

(c) Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{v}.d\vec{r}$ onde $\vec{v}(x,y,z) = (xy+y)\vec{i} + 2yz\vec{j} + y^2\vec{k}$ e γ é a intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ com a superfície $z = cos(y^2) + 5$ orientada de modo que sua projeção no plano xy tenha sentido anti-horário.Resp.-4π.

13. Seja γ uma curva simples, fechada e plana e seja $\vec{N} = (a, b, c)$ um vetor unitário normal ao plano que contém γ. Mostre que a área da região plana limitada por γ é dada por

$$\frac{1}{2}\int_\gamma (bz - cy)dx + (cx - az)dy + (ay - bx)dz,$$

com γ orientada pela orientação induzida de $\vec{N}$.

14.
(a). Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ sendo $\vec{F}(x,y,z) = (z^2 + \text{sen}(x^3),\ y^2,\ xy + e^{z^3})$ e γ dada pela intersecção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ com o plano $2x - z = 0$ percorrida de $(0,3,0)$ a $(0,-3,0)$, $z \ge 0$.

(b). Seja o campo vetorial $\vec{v}(x,y,z) = \left(\dfrac{-y}{(x^2+y^2)^2}\ ,\ \dfrac{x}{(x^2+y^2)^2}\ ,\ 0\right) + (e^{x^4}\ ,\ \text{sen}\,(\text{sen}\ y^5)\ ,\ \ln(1+z^4))$ e a curva γ dada pela intersecção das superfícies $x^2 + y^2 = 4$, $z = 5 + \ln(1+y^2)$ cuja projeção no plano xy é percorrida uma vez no sentido horário. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{r}$.

(c). Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ sendo $\vec{F} = (-2x+y)\vec{i} + ((z^2 \cos y) - y)\vec{j} + (x^2+z)\vec{k}$ e γ a intersecção das superfícies $z = \sqrt{x^2 + 2y^2}$ e $z = y + 1$ com projeção no plano xy percorrida uma vez no sentido horário.

Resp. (a) $-\frac{54}{5}$, (b) $-\frac{\pi}{2}$, (c) 2π.

15. Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{v} \cdot \vec{N} d\sigma$, onde $\vec{v} = (x^2 + ye^z, y^2 + ze^x, z^2 + xe^y)$ e S é a fronteira da região limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ entre os planos $z = 0$ e $z = x + 2$, orientada pela normal exterior. Resp. $\frac{19\pi}{4}$.

16. Calcule $\displaystyle\iint_S dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$, onde S está orientada pela normal exterior nos seguintes casos:
(a) S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$;
(b) S é a fronteira da região limitada por $z = 4$ e $z = x^2 + y^2$. Resp. (a) $\frac{4\pi}{5}r^5$, (b) $\frac{176\pi}{3}$.

17. Seja $\vec{v} = \frac{\vec{r}}{|r|^3}$, onde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{v}\cdot\vec{N}d\sigma$, onde $\vec{N}$ é a normal unitária exterior a S nos seguintes casos:
(a) S é a esfera de raio $a > 0$ com centro na origem; Resp. 4π.
(b) S é uma superfície fechada lisa por partes tal que a origem não pertence a S nem à região interior a S; Resp. 0.
(c) S é uma superfície fechada lisa por partes que contém a origem em seu interior. Resp. 4π.

18. Calcule $\displaystyle\iint_S (\text{rot}\ \vec{F})\cdot\vec{N}dS$ sendo:

(a) $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ e S a parte do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ que está acima do plano $z = 5$, orientada pelo campo de vetores normais que aponta para cima; Resp. -4π.
(b) $\vec{F}(x,y,z) = (xz,\ x-y,\ x^2y)$ e S formada pelas 3 faces, que não estão no plano xy, do tetraedro formado pelos planos coordenados e o plano $3x + y + 3z = 6$, sendo $\vec{N}$ o campo normal exterior ao tetraedro; Resp. 6.
(c) $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, z, yz)$ e S a parte do hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ limitada por $x^2 + y^2 = 4$ com normal que aponta para o eixo z. Resp. 0.

19. Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S ($\vec{N}$ = normal unitária exterior), para:

(a) $\vec{F}(x,y,z) = -xz\vec{i} + (y^3 - yz)\vec{j} + z^2\vec{k}$ e S o elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; Resp. $\frac{4}{5}\pi ab^3c$.
(b) $\vec{F}(x,y,z) = (x^3 + y\,\text{sen}(z),\ y^3 + z\,\text{sen}(x),\ 3z)$ e S a superfície do sólido limitado pelos hemisférios $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e pelo plano $z = 0$. Resp. $\frac{194\pi}{5}$.
(c) $\vec{F}(x,y,z) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} + z\vec{k}$ e $S = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + y^2 = (z-2)^2, \quad 0 \le z \le 2\}$, sendo $\vec{N}$ o campo de vetores unitários normais a S tal que $\vec{N}.\vec{k} > 0$ Resp. $\frac{14}{3}\pi$
(d) $\vec{F}(x,y,z) = 2y\vec{i} + (x-y)\vec{j} + 4x\vec{k}, S$, onde S é a porção do parabolóide $z = x^2 + y^2 - 8$ abaixo do plano $z = 2x + 4y + 3$ e $\vec{n}$ é a normal exterior ao parabolóide com $\vec{n}.\vec{k} < 0$ Resp. -128π.

20. Seja S uma superfície fechada lisa por partes e orientada pela normal exterior $\vec{N}$ e seja R a região limitada por S. Verifique as seguintes igualdades:
(a) volume de $R = \dfrac{1}{3}\displaystyle\iint_S x dy\wedge dz + y dz\wedge dx + z dx\wedge dy$.
(b) $\displaystyle\iint_S \text{rot}\,\vec{v}\cdot\vec{N}d\sigma = 0$, para qualquer campo $\vec{v}$ de classe C^1 numa região contendo S.

21. Calcule as seguintes integrais
(a) $\displaystyle\iint_S x dy\wedge dz + yze^{z^2}dz\wedge dx - \frac{e^{z^2}}{2}dx\wedge dy$, onde S é a parte de $z = x^2 + y^2$ limitada por $x^2 + y^2 = 1$, orientada com a normal unitária $\vec{N}$ tal que $\vec{N}\cdot\vec{k} > 0$; Resp. $-\frac{\pi}{2}(e+1)$
(b) $\displaystyle\iint_S (x^2 + z^3)dy\wedge dz + z^5 dz\wedge dx + (e^{x^2+y^2} + z^2)dx\wedge dy$, onde S é a parte de $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ interior a $z^2 = x^2 + y^2$, orientada com a normal exterior; Resp. $\pi(e + \frac{1}{6})$
(c) $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}d\sigma$, onde $\vec{F}(x,y,z) = e^{z^2}\cos(zy^2)\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ e S é a parte de $x^2 + y^2 = 1$ limitada por $z = 0$ e $z = y + 3$, orientada com a normal unitária exterior; Resp. 0

(d) $\displaystyle\iint_S z^2 dz\wedge dx + x^2\ln(x^2+y^2)dx\wedge dy$, onde S é a parte de $9+z^2=x^2+y^2$ com $0\le z\le 4$, orientada com a normal unitária $\vec{N}$ tal que $\vec{N}\cdot\vec{k}\ge 0$; R. $(\frac{625}{2}\ln 5-\frac{81}{2}\ln 3-68)\pi$

(e) $\displaystyle\iint_S \frac{xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, onde S é a parte de $(z-3)^2=x^2+y^2$ com $0\le z\le 3$, orientada com a normal unitária $\vec{N}$ tal que $\vec{N}\cdot\vec{k}>0$; Resp. 2π

(f) $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}d\sigma$, onde $\vec{F}(x,y,z)=\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}+z\vec{k}$ e S é a parte de $x^2+y^2-z^2=1$ com $0\le z\le 1$, orientada com a normal unitária $\vec{N}$ tal que $\vec{N}\cdot\vec{k}\le 0$; Resp. $\frac{2\pi}{3}(\sqrt{3}-1)$

(g) $\displaystyle\iint_S \frac{xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, onde S é o elipsóide $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$, orientada com a normal unitária exterior. Resp. 4π

22.

(a). Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$, sendo que $\vec{F}(x,y,z)=\dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{(4x^2+9y^2+25z^2)^{3/2}}$ e S é a semi-esfera $x^2+y^2+z^2=1,\ z\ge 0$ orientada com a normal $\vec{n}$ tal que $\vec{n}\cdot\vec{k}\ge 0$. Resp. $\frac{\pi}{15}$.

(b). Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS$, onde $\vec{F}(x,y,z)=\ln(2+\cos(y+z))\vec{i}-yz\vec{j}+\dfrac{z^2}{2}\vec{k}$ e S é a parte do cilindro $x^2+y^2=4$ acima do plano $z=0$ e abaixo do plano $z=y+7$. Considere S orientada com a normal que aponta para fora do cilindro. Resp. -104π

(c). Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dv$ sendo $\vec{F}(x,y,z)=\dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ e S a parte do cilindro $x^2+y^2=2$ entre os planos $z=-\sqrt{2}$ e $z=\sqrt{2}$ com normal $\vec{N}$ tal que $\vec{N}(\sqrt{2},0,0)=(-1,0,0)$. Resp. $-2\sqrt{2}\pi$

23. A integral de superfície $\displaystyle\iint_S \cos(\mathrm{sen}(z^2))dy\wedge dz+y\,dz\wedge dx+x\,dx\wedge dy$ onde S é $x^2+y^2+z^2=1$, com $z\ge 0$ e orientada com a normal exterior é

a) 0 b) $\dfrac{4\pi}{3}$ c) $\dfrac{4\pi}{6}$ d) $\dfrac{4\pi}{6}-2\pi$ e) $\dfrac{4\pi}{3}+2\pi$

Resp. (c)

24. Considere o campo $\vec{F}(x,y,z)=\dfrac{(x,y,z)}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}$. O trabalho realizado para deslocar uma partícula ao longo de uma curva lisa e simples contida na esfera $x^2+y^2+z^2=4$ com ponto inicial $(2,0,0)$ e ponto final $(1,1,\sqrt{2})$ é

a) 0 b) 1 c) $\pi/4$ d) $\pi/3$ e) $\pi/2$

Resp. (a)

25. A integral de linha do campo $\vec{F}(x,y,z)=(\cos(x^4),x+\mathrm{sen}(y^2),\tan(z))$ sobre a curva dada pela intersecção do plano $z=2x+7$ com o parabolóide $z=x^2+y^2$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy é percorrida no sentido anti-horário é

a) 0 b) 2π c) $2\sqrt{2}\pi$ d) 4π e) 8π

Resp. (e)

26. Analise as seguintes afirmações sobre o campo $\vec{F}(x,y,z) = \dfrac{(x,y,z)}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}$:

(I) $Div\vec{F} = 1$.

(II) $\vec{F}$ é conservativo em seu domínio.

(III) A integral de superfície de $\vec{F}$ sobre qualquer a esfera de raio a é 0.

Podemos afirmar que

a) todas as afirmações são verdadeiras.

b) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

d) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

e) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Resp. (e)

27. Seja S a parte do plano $z = 2x+3$ limitada pelo cilindro $x^2+y^2 = 1$. Uma parametrização da superfície S é

a) $x = u\cos v, y = u \operatorname{sen} v, z = 2u\cos v + 3$ com $v \in [0, 2\pi]$ e $u \in [0, 1]$.

b) $x = \cos v, y = \operatorname{sen} v, z = 2u + 3$, com $v \in [0, 2\pi]$ e $u \in [0, 1]$.

c) $x = u, y = v, z = 2u + 3$ com $v \in [-1, 1]$ e $u \in [-1, 1]$.

d) $x = \cos v, y = \operatorname{sen} v, z = u$ com $v \in [0, 2\pi]$ e $u \in [0, 2\cos v + 3]$.

Resp. (a)