MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia III
$2^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios - $1^{\underline{0}}$ Semestre de 2023

1. Calcule as seguintes integrais de linha ao longo da curva indicada:

(a) $\displaystyle\int_\gamma x\,ds$, $\gamma(t) = (t^3, t)$, $0 \le t \le 1$. Resp. $(10\sqrt{10} - 1)/54$.

(b) $\displaystyle\int_\gamma xy^4\,ds$, γ é a semi-circunferência $x^2 + y^2 = 16$, $x \ge 0$. Resp. $1638,4$.

(c) $\displaystyle\int_\gamma (x - 2y^2)\,dy$, γ é o arco da parábola $y = x^2$ de $(-2, 4)$ a $(1, 1)$. Resp. 48.

(d) $\displaystyle\int_\gamma xy\,dx + (x - y)\,dy$, γ consiste dos segmentos de reta de $(0, 0)$ a $(2, 0)$ e de $(2, 0)$ a $(3, 2)$. Resp. $\frac{17}{3}$.

(e) $\displaystyle\int_\gamma xyz\,ds$, $\gamma : x = 2t$, $y = 3\,\mathrm{sen}\,t$, $z = 3\cos t$, $0 \le t \le \pi/2$. Resp. $9\sqrt{13}\pi/4$.

(f) $\displaystyle\int_\gamma xy^2z\,ds$, γ é o segmento de reta de $(1, 0, 1)$ a $(0, 3, 6)$. Resp. $3\sqrt{35}$.

2. Calcule o comprimento das curvas
(a) $\gamma(t) = (a(t - \mathrm{sen}\,t), a(1 - \cos t))$, onde $0 \le t \le 2\pi$ e $a > 0$. Resp. $8a$.

(b) $\gamma(t) = (t\cos t, t\,\mathrm{sen}\,t, t)$, onde $0 \le t \le \sqrt{2}$. Resp. $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$.

(c) $\gamma(t) = (t, \frac{3t^2}{2}, \frac{3t^2}{2})$, onde $0 \le t \le 2$. Resp. $\sqrt{73} + \frac{\ln(\sqrt{73}+6\sqrt{2})}{6\sqrt{2}}$

3. (a) Determine a massa de um arame cujo formato é o da curva $\gamma(t) = (2t, t^2, t^2)$, onde $0 \le t \le 1$, e a densidade de massa em cada ponto é $\delta(x, y, z) = x$. Resp. $2\sqrt{3} - \frac{2}{3}$.
(b) Um cabo delgado é dobrado na forma de um semi-círculo $x^2 + y^2 = 4$, $x \ge 0$. Se a densidade é $\delta(x, y) = x^2$, determine a massa e o centro de massa do cabo. Resp. 4π, $(\frac{16}{3\pi}, 0)$.
(c) Determine a massa e o centro de massa de um fio no espaço com o formato da hélice $x = 2\,\mathrm{sen}\,t$, $y = 2\cos t$, $z = 3t$, $0 \le t \le 2\pi$, se a densidade é uma constante k. Resp. $2\sqrt{13}k\pi$, $(0, 0, 3\pi)$.

4. Se um cabo com densidade linear $\delta(x, y, z)$ tem o formato de uma curva γ em $\mathbb{R}^3$, seus *momentos de inércia* I_x, I_y e I_z, em relação aos eixos x, y e z, respectivamente, são definidos por

$$I_x = \int_\gamma (y^2 + z^2)\delta(x, y, z)\,ds; \quad I_y = \int_\gamma (x^2 + z^2)\delta(x, y, z)\,ds; \quad I_z = \int_\gamma (x^2 + y^2)\delta(x, y, z)\,ds.$$

Determine os momentos de inércia do cabo do Exercício anterior.

5. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y)\vec{i} - 7yz\vec{j} + 2xz^2\vec{k}$ e γ é a curva ligando o ponto $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$ nos seguintes casos:
(a) $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$. Resp. $-\frac{11}{15}$.
(b) γ é composta dos segmentos de reta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 0, 0)$, depois a $(1, 1, 0)$ e depois a $(1, 1, 1)$. Resp. 1.

6. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para

(a) $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$, onde γ é o arco de circunferência $\gamma(x) = (x, \sqrt{4 - x^2})$, ligando $(-2, 0)$ a $(2, 0)$.

Resp. 2π.

(b) $\vec{F}(x,y,z) = 2(x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$, onde γ é a elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, percorrida uma vez em sentido anti-horário. Resp. $-\pi ab$.

(c) $\displaystyle\int_\gamma x^3y^2z\,dz$, γ é dada por $x = 2t$, $y = t^2$, $z = t^2$, $0 \leq t \leq 1$. Resp. $\frac{16}{11}$.

(d) $\displaystyle\int_\gamma z^2\,dx - z\,dy + 2y\,dz$, γ consiste dos segmentos de reta de $(0,0,0)$ a $(0,1,1)$, de $(0,1,1)$ a $(1,2,3)$ e de $(1,2,3)$ a $(1,2,4)$. Resp. $\frac{77}{6}$.

7. Calcule

(a) $\displaystyle\int_\gamma x\,dx + (y+x)\,dy + z\,dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $z = x^2+y^2$ e $z = 2x+2y-1$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido horário. Resp. $-\pi$.

(b) $\displaystyle\int_\gamma (2y+1)\,dx + z\,dy + x\,dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $x^2+4y^2 = 1$ e $x^2+z^2 = 1$, com $y \geq 0$, $z \geq 0$, percorrida uma vez do ponto $(1,0,0)$ ao ponto $(-1,0,0)$. Resp. -2.

(c) $\displaystyle\int_\gamma y\,dx + z\,dy + x\,dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $x+y = 2$ e $x^2+y^2+z^2 = 2(x+y)$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxz seja percorrida uma vez no sentido horário. Resp. $-2\pi\sqrt{2}$.

(d) $\displaystyle\int_\gamma x\,dx + (y+x)\,dy + z\,dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $z = xy$ e $x^2+y^2 = 1$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido horário. Resp. 0.

(e) $\displaystyle\int_\gamma x^2\,dx + x\,dy + z\,dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $z = \frac{x^2}{9}$ e $z = 1 - \frac{y^2}{4}$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido anti horário. Resp. 6π

(f) $\displaystyle\int_\gamma y^2\,dx + 3z\,dy$, sendo γ a intersecção das superfícies $z = x^2+y^2$ e $z = 2x+4y$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido anti horário. Resp. 10π.

(g) $\displaystyle\int_\gamma z\,dy - x\,dz$, sendo γ a intersecção do elipsóide $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6} = \frac{4}{3}$ com o plano $x+z = 2$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido anti-horário. Resp. $-2\pi\sqrt{3}$.

8. Calcule

(a) $\displaystyle\int_\gamma 2x\,dx + (z^2 - \frac{y^2}{2})\,dz$, onde γ é o arco circular dado por $x = 0$, $y^2+z^2 = 4$, de $(0,2,0)$ a $(0,0,2)$, no sentido anti-horário. Resp. 0.

(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{(x+y)\,dx - (x-y)\,dy}{x^2+y^2}$, onde γ é a circunferência $x^2+y^2 = a^2$, percorrida uma vez no sentido horário. Resp. $2\pi\,a^2$.

(c) $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{y}\,dx + \sqrt{x}\,dy$, sendo γ a fronteira da região limitada por $x = 0$, $y = 1$ e $y = x^2$, percorrida uma vez no sentido horário. Resp. $-\frac{3}{10}$.

9. Determine o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}(x,y) = x\vec{i} + (y+2)\vec{j}$ ao mover uma partícula ao longo da ciclóide $\vec{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t)\vec{i} + (1-\cos t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Resp. $2\pi^2$.

10. Usando o Teorema de Green, calcule as seguintes integrais de linha:

(a) $\oint_\gamma x^2y\,dx + xy^3\,dy$, onde γ é o quadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$, orientado positivamente.

Resp. $-1/12$.

(b) $\oint_\gamma (x+2y)\,dx + (x-2y)\,dy$, onde γ consiste do arco da parábola $y = x^2$ de $(0,0)$ a $(1,1)$ e do segmento de reta de $(1,1)$ a $(0,0)$, orientada positivamente. Resp. $-1/6$.

(c) $\oint_\gamma (y + e^{\sqrt{x}})\,dx + (2x + \cos y^2)\,dy$, onde γ é a fronteira da região limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$ percorrida no sentido anti-horário. Resp. $1/3$.

(d) $\oint_\gamma x^2\,dx + y^2\,dy$, γ é a curva $x^6 + y^6 = 1$, orientada no sentido anti-horário. Resp. 0.

(e) $\oint_\gamma xy\,dx + 2x^2\,dy$, γ consiste do segmento de reta unindo $(-2,0)$ a $(2,0)$ e da semi-circunferência $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$, orientada positivamente. Resp. 0.

(f) $\oint_\gamma 2xy\,dx + x^2\,dy$, γ é a cardióide $\rho = 1 + \cos\theta$ orientada positivamente. Resp. 0.

(g) $\oint_\gamma (xy + e^{x^2})\,dx + (x^2 - \ln(1+y))\,dy$, γ consiste do segmento de reta de $(0,0)$ a $(\pi,0)$ e do arco da curva $y = \operatorname{sen} x$, orientada positivamente. Resp. π.

(h) $\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y) = (y^2 - x^2y)\vec{i} + xy^2\vec{j}$ e γ consiste do arco de circunferência $x^2+y^2 = 4$ de $(2,0)$ a $(\sqrt{2},\sqrt{2})$, e dos segmentos de reta de $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ a $(0,0)$ e de $(0,0)$ a $(2,0)$. Resp. $\pi + \frac{16}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)$.

11. (a) Seja D uma região limitada de $\mathbb{R}^2$ com D e ∂D satisfazendo as hipóteses do Teorema de Green. Mostre que a área de D é

$$\text{Área}(D) = \oint_{\partial D} x\,dy = \oint_{\partial D} -y\,dx.$$

(b) Usando (a) calcule a área de

(i) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$; (ii) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} \leq a^{2/3}\}$.

Resp. (i) $ab\pi$; (ii) $\frac{3}{8}a^2\pi$.

(c) Determine a área da região limitada pela hipociclóide dada por $\vec{r}(t) = \cos^3 t\,\vec{i} + \operatorname{sen}^3 t\,\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Resp. $\frac{3\pi}{8}$.

12. *Área de um polígono irregular.*
(a) Se γ é o segmento de reta ligando o ponto (x_1,y_1) ao ponto (x_2,y_2), mostre que

$$\int_\gamma x\,dy - y\,dx = x_1y_2 - x_2y_1.$$

(b) No sentido anti-horário, os vértices de um polígono são (x_1,y_1), (x_2,y_2), ..., (x_N,y_N). Mostre que sua área é dada por

$$A = \frac{1}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \ldots + (x_{N-1}y_N - x_Ny_{N-1}) + (x_Ny_1 - x_1y_N)].$$

(c) Determine a área do pentágono de vértices $(0,0)$, $(2,1)$, $(1,3)$, $(0,2)$ e $(-1,1)$. Resp. $\frac{9}{2}$.

13. Calcule

(a) $\int_\gamma x^2(5ydx + 7xdy) + e^y dy$, sendo γ a elipse $16x^2 + 25y^2 = 100$, percorrida de $(0,-2)$ a $(0,2)$ com $x \geq 0$.

Resp. $e^2 - \frac{1}{e^2} + \frac{125}{2}\pi$.

(b) $\int_\gamma (2xe^y - x^2y - \frac{y^3}{3})\, dx + (x^2e^y + \operatorname{sen} y)\, dy$, sendo γ a circunferência $x^2 + y^2 - 2x = 0$, percorrida de $(0,0)$ a $(2,0)$ com $y \geq 0$. Resp. $4 - \frac{3\pi}{4}$.

(c) $\int_\gamma \vec{v}dr$, sendo γ a fronteira do retângulo $[1,2]\times[-1,1]$ e $\vec{v}(x,y) = 2\operatorname{arctg}(\frac{y}{x})\,\vec{i} + \big(\ln(x^2+y^2) + 2x\big)\,\vec{j}$, percorrida no sentido anti-horário.

Resp. 4.

14. (a) Calcule $\nabla\operatorname{arctg}(\frac{y}{x})$ e $\nabla\operatorname{arctg}(\frac{x}{y})$.

(b) Mostre que se $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções de classe C^1 e $\vec{F} = (f_1(x), f_2(y), f_3(z))$, então $\vec{F}$ é conservativo.

15. Calcule

(a) $\int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$, onde γ é a fronteira da região limitada pelas curvas $y^2 = 2(x+2)$ e $x = a$, com $a > 0$, orientada no sentido horário; Resp. -2π.

(b) $\int_\gamma \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}$, onde γ é a curva $y = x^2+1$, $-1 \leq x \leq 2$, percorrida do ponto $(-1,2)$ a $(2,5)$.

Resp. $\frac{1}{2}\ln\frac{29}{5}$.

(c) $\int_\gamma \frac{y\,dx - (x-1)\,dy}{(x-1)^2+y^2}$, onde γ é a circunferência $x^2+y^2 = 4$, orientada no sentido horário.

Resp. 2π.

(d) $\int_\gamma \frac{x^2y\,dx - x^3\,dy}{(x^2+y^2)^2}$, onde γ é a fronteira da região $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$, orientada no sentido horário. Resp. π.

16. Verifique que a integral $\int_\gamma 2x\operatorname{sen} y\,dx + (x^2\cos y - 3y^2)\,dy$, onde γ é uma curva ligando $(-1,0)$ a $(5,1)$, é independente do caminho e calcule o seu valor. Resp. $25\operatorname{sen} 1 - 1$.

17. Sejam as curvas γ_1 a circunferência $x^2 + y^2 = \frac{1}{16}$ percorrida no sentido anti-horário, γ_2 a circunferência $x^2+y^2 = 4$, percorrida no sentido anti-horário e γ_3 a curva formada pela união das três seguintes circunferências: $(x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{9}$, $(x+1)^2 + y^2 = \frac{1}{9}$, ambas percorridas no sentido horário e $x^2+y^2 = \frac{1}{9}$ percorrida no sentido anti-horário. Se $I_k = \int_{\gamma_k} P\,dx + Q\,dy$ onde

$$P(x,y) = -y\left[\frac{1}{(x-1)^2+y^2} + \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{(x+1)^2+y^2}\right]$$

$$Q(x,y) = \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}$$

então calcule I_1, I_2 e I_3. Resp. $I_1 = 2\pi$; $I_2 = 6\pi$; $I_3 = -2\pi$.

18. Seja γ uma curva plana simples, fechada e lisa por partes, percorrida uma vez no sentido horário. Dê todos os valores possíveis para

$$(a) \int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}. \qquad (b) \int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{4x^2+9y^2}.$$

Resp. (a) 0 ou -2π; (b) 0 ou $-\frac{\pi}{3}$.

19. Determine todos os valores possíveis da integral

$$\int_{(1,0)}^{(2,2)} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$$

sobre um caminho que não passe pela origem.

20. Considere o campo $\vec{F}(x,y) = cxy\vec{i} + x^6y^2\vec{j}$, $c > 0$, atuando sobre uma partícula que se move do ponto $(0,0)$ até a reta $x = 1$ sobre a curva γ, gráfico da função $y = ax^b$, com $a > 0$ e $b > 0$. Determine um valor de c em termos de a e de b para que o trabalho realizado por $\vec{F}$ seja nulo. Resp. $c = -a^2b/3$.

21. Calcule $\int_\gamma \vec{F}\ d\vec{r}$ onde $\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+\frac{y^2}{9}} + y, \frac{x}{x^2+\frac{y^2}{9}} + 3x\right)$ se

(a) γ é a curva $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$, percorrida uma vez no sentido horário. Resp. -8π.

(b) γ é a curva $(x-1)^2 + y^2 = 4$, percorrida uma vez no sentido horário. Resp. -14π.

22. Um campo de vetores $\vec{F}$ em $\mathbb{R}^2$ se diz *radial* (ou *central*) se existe uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\vec{F}(x,y) = g(|\vec{r}|)\vec{r}$, onde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Suponha que g é de classe C^1. Mostre que $\vec{F}$ é conservativo.

23. Em cada item abaixo, determine se $\vec{F}$ é ou não um campo gradiente no domínio indicado D. Em caso afirmativo, determine um potencial de $\vec{F}$.

(a) $\vec{F}(x,y) = x\vec{i} + x\vec{j}$, $D = \mathbb{R}^2$; Resp. Não.

(b) $\vec{F}(x,y) = (2xe^y + y)\vec{i} + (x^2e^y + x - 2y)\vec{j}$, $D = \mathbb{R}^2$; Resp. $\phi(x,y) = x^2e^y + xy - y^2$.

(c) $\vec{F}(x,y,z) = (2x^2 + 8xy^2)\vec{i} + (3x^3y - 3xy)\vec{j} - (4z^2y^2 + 2x^3z)\vec{k}$, $D = \mathbb{R}^3$; Resp. Não.

(d) $\vec{F}(x,y,z) = (x+z)\vec{i} - (y+z)\vec{j} + (x-y)\vec{k}$, $D = \mathbb{R}^3$; Resp. $\phi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + xz - yz$.

(e) $\vec{F}(x,y,z) = (y^2\cos x + z^3)\vec{i} + (2y \operatorname{sen} x - 4)\vec{j} + (3xz^2 + 2)\vec{k}$, $D = \mathbb{R}^3$; Resp. $\phi(x,y,z) = y^2 \operatorname{sen} x + xz^3 - 4y + 2z$.

(f) $\vec{F}(x,y,z) = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2+y^2}$, $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$; Resp. Não.

(g) $\vec{F}(x,y,z) = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2+y^2}$, $D = \mathbb{R}^2 - \{(x,0) : x \leq 0\}$;

Resp. $\phi(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

(h) $\vec{F}(x,y,z) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{x^2+y^2}$, $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$; Resp. $\phi(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.

24. Prove que o trabalho realizado pelo campo $\vec{F}(x,y) = x\vec{i} + xy\vec{j}$ é nulo ao longo de qualquer circunferência com centro no eixo das abscissas. Pode-se concluir que $\vec{F}$ é conservativo?

25. Calcule

(a) $\int_\gamma (-2xy + x^2)dx + \sqrt{8 - y^7}\,dy$, onde γ é o gráfico de $y = \cos x$, no intervalo $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, percorrido no sentido de x crescente. Resp. $\frac{\pi^3}{12}$.

(b) $\int_\gamma \left(\frac{2xy^2}{x^2+1}\right) dx + (2y\ln(x^2+1))dy$, onde γ é o arco da elipse $4x^2 + y^2 = 1$ do ponto $(0,1)$ ao ponto $(\frac{1}{2}, 0)$ percorrido no sentido anti-horário. Resp. 0.

(c) $\int_\gamma \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2} + xy\right) dy$ onde γ é a fronteira da região no plano determinada pelas desigualdades $y \geq x - 1$ e $y^2 \leq x + 1$, orientada no sentido anti horário. Resp. $2\pi + \frac{9}{4}$.

(d) $\displaystyle\int_\gamma (2xy+\text{sen}(y))dx + x\cos(y)dy + x^2dz$ onde γ é a intersecção das superfícies $3x^2+y^2+z^2=1$ e $y=x$, no 1^o octante e orientada de forma que a sua projeção no plano yz seja percorrida no sentido horário.

Resp. $\frac{1}{12}\left(6\,\text{sen}\left(\frac{1}{2}\right)-1\right)$.

(e) $\displaystyle\int_\gamma \frac{-y}{x^2+2y^2}dx + \frac{x}{x^2+2y^2}dy$ onde γ é a circunferência de centro $(0,1)$ e raio 3, percorrida no sentido horário. O campo $\vec{F}$ é conservativo? Justifique sua resposta.

Resp. $-\pi\sqrt{2}$.

26. Seja o campo $\vec{F}(x,y) = \dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}}{x^2+y^2}$ e γ a curva dada por $\gamma(t)=(e^t,\ \text{sen}t)$ para $0\le t\le\pi$. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}d\vec{r}$.

Resp. π.

27. Calcule as integrais

(a) $\displaystyle\int_\gamma 7x^6y\,dx + x^7\,dy$ sendo $\gamma(t)=(t,e^{t^2-1})$, onde $t\in[0,1]$.

Resp. 1.

(b) $\displaystyle\int_\gamma [\ln(x+y^2)-y]\,dx + [2y\ln(x+y^2)-x]\,dy$ sendo γ a curva $(x-2)^2+y^2=1$ com $y\ge 0$ orientada no sentido horário.

Resp. $3\ln 3-2$.

(c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$ sendo γ a curva dada por $x(t)=\cos^3 t$ e $y(t)=\text{sen}^3 t$ com $y\ge 0$ ligando os pontos $(1,0)$ e $(0,1)$, nessa ordem.

Resp. $-\frac{\pi}{2}$.

28. Mostre que as integrais abaixo independem do caminho e calcule-as.

(a) $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(a,b)} 2xy\,dx + (x^2-y^2)\,dy.$

Resp. $a^2b-\frac{b^3}{3}-\frac{2}{3}$.

(b) $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(a,b)} \text{sen}\,y\,dx + x\cos y\,dy$.

Resp. $a\,\text{sen}\,b$.

29. Para cada campo $\vec{F}$ encontre uma curva fechada simples α, tal que $\displaystyle\int_\alpha \vec{F}d\vec{r}\ne 0$. Podemos concluir que os campos não são conservativos?

(a) $\vec{F}=(y^2+xy,3y^2)$. (b) $\vec{F}=(e^{xy},e^{-xy})$.

30. Calcule

(a) $\displaystyle\int_{(1,1,2)}^{(3,5,0)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz.$

Resp. -2.

(b) $\displaystyle\int_\gamma \text{sen}(yz)\,dx + xz\cos(yz)\,dy + xy\cos(yz)\,dz$, sendo γ a hélice $x(t)=\cos t$, $y(t)=\ \text{sen}t$, $z(t)=t$ para $t\in[0,\frac{\pi}{4}]$.

Resp. $\frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{8}\right)$.

31. Sejam um ponto A pertencente à esfera $x^2+y^2+z^2=1$ e um ponto B pertencente à esfera $x^2+y^2+z^2=4$. Calcule $\displaystyle\int_A^B \frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{x^2+y^2+z^2}$.

Resp. $\ln 2$.

32. Se $\vec{n}(x,y)$ é vetor unitário normal ao traço da curva γ em (x,y), calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$ sendo

(a) $\vec{F}(x,y)=x^{10}\vec{i}+(3x-10x^9y)\vec{j}$ e γ a parte da circunferência $x^2+y^2=1$ contida no primeiro quadrante, $\vec{n}$ normal exterior à circunferência.

Resp. $-\frac{1}{11}$.

(b) $\vec{F}(x,y)=x^3y^3\vec{i}-\dfrac{3x^2y^4+2}{4}\vec{j}$ e $\gamma(t)=(t^3,\text{sen}(4\arctan t^2))$, $t\in[0,1]$, $n\cdot\vec{j}\le 0$.

Resp. $\frac{1}{2}$.

33. Sendo $\vec{F} = ((x^2 + y^2 + 2x)e^x - \cos x, 2ye^x)$ um campo de força conservativo, o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ ao mover uma particula ao longo do caminho $\gamma(t) = (t, \cos t),\ t \in [0, \pi/4]$ é:

(a) $W = e^{\pi/4}(1 + \frac{\pi^2}{16}) + \frac{\sqrt{2}}{2} - 2$

(b) $W = e^{\pi/4}(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{16}) - \frac{\sqrt{2}}{2} - 2$

(c) $W = e^{\pi/4}\frac{\pi^2}{16} + \frac{e^{\pi/2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$

(d) $W = e^{\pi/4}(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{16}) - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$

(e) $W = e^{\pi/4}(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{16}) - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$

34. Uma lâmina plana com densidade constante $\rho(x, y) = \rho$ ocupa uma região do plano xy limitada por um caminho fechado simples C. Os momentos de inércia em relação aos eixos são:

(a) $I_x = \frac{\rho}{3} \oint_C y^2 dx, \qquad I_y = -\frac{\rho}{3} \oint_C x^2 dy$

(b) $I_x = \frac{\rho}{3} \oint_C y^2 x dx, \qquad I_y = \frac{\rho}{3} \oint_C x^2 y dy$

(c) $I_x = -\frac{\rho}{3} \oint_C y^3 dx, \qquad I_y = -\frac{\rho}{3} \oint_C x^2 y dy$

(d) $I_x = \frac{\rho}{3} \oint_C y^2 x dy, \qquad I_y = \frac{\rho}{3} \oint_C x^2 y dx$

(e) $I_x = -\frac{\rho}{3} \oint_C y^3 dx, \qquad I_y = \frac{\rho}{3} \oint_C x^3 dy$

35. Sejam $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ uma função escalar definida em $\mathbb{R}^3$ e C uma curva parametrizada dada por $x = \frac{4}{\pi} \arctan t^2$, $y = \sqrt[4]{(t+1)(7t+1)}$, $z = e^{\sqrt{t-t^2}}$, onde $0 \le t \le 1$. Então o valor da integral de linha $\int_C \nabla f \cdot d\vec{r}$ é:

(a) 4

(b) 0

(c) $\int_0^1 \frac{8}{\pi} \arctan t^2 + 2\sqrt[4]{(t+1)(7t+1)} + 2e^{\sqrt{t-t^2}}\, dt$

(d) $\frac{64}{\pi^2} + 14\sqrt{2} + \frac{e}{2}(3\sqrt{3} - 1)$

(e) 1