MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia III
1a. Lista de Exercícios - 1o. semestre de 2023

1. Calcule as seguintes integrais duplas:

(a) $\displaystyle\iint_R (2y^2 - 3xy^3)dxdy$, onde $R = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3\}$. Resp. (a) $-\frac{585}{8}$.

(b) $\displaystyle\iint_R x \sin y \, dxdy$, onde $R = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{6}\}$. Resp. (b) $\frac{15}{4}(2-\sqrt{3})$.

(c) $\displaystyle\iint_R \frac{1}{x+y}\, dxdy$, onde $R = [1,2] \times [0,1]$. Resp. (c) $\ln \frac{27}{16}$.

2. Determine o volume do sólido limitado pela superfície $z = x\sqrt{x^2+y}$ e os planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ e $z = 0$. Resp. $\frac{4}{15}(2\sqrt{2}-1)$.

3. (a) Determine o volume do sólido contido no primeiro octante limitado por $z = 9 - y^2$ e pelo plano $x = 2$. Resp. 36.
(b) Uma piscina tem formato circular de raio 3m e profundidade variando linearmente de sul a norte, sendo que no extremo sul é de 1m e no extremo norte é de 2m. Calcule o volume da piscina. Resp. $\frac{27\pi}{2}$

4. Calcule as integrais iteradas

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dydx \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dxdy.$$ Resp. $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$.

As respostas contradizem o Teorema de Fubini? Explique.

5. Calcule as seguintes integrais duplas:

(a) $\displaystyle\iint_D xy\, dxdy$, onde $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$. Resp. (a) $\frac{1}{12}$.

(b) $\displaystyle\iint_D (x^2 - 2xy)\, dxdy$, onde $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 2 - x\}$. Resp. (b) $-\frac{19}{42}$.

(c) $\displaystyle\iint_D e^{x/y}\, dxdy$, onde $D = \{(x,y) : 1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq y^3\}$. Resp. (c) $\frac{1}{2}e^4 - 2e$.

(d) $\displaystyle\iint_D x \cos y\, dxdy$, onde D é a região limitada por $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$. Resp. (d) $(1-\cos 1)/2$.

(e) $\displaystyle\iint_D 4y^3\, dxdy$, onde D é a região limitada por $y = x - 6$ e $y^2 = x$. Resp. (e) $\frac{500}{3}$.

(f) $\displaystyle\iint_D xy\, dxdy$, onde D é a região do primeiro quadrante limitada pela circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1. Resp. (f) $\frac{1}{8}$.

(g) $\displaystyle\iint_D (x^2 \operatorname{tg} x + y^3 + 4)\, dxdy$, onde $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$. Resp. (g) 8π.

(h) Calcule $\displaystyle\iint_D e^{y-x}\, dxdy$ sendo D a região plana limitada por: $y - x = 1$; $y - x = 2$; $y = 2x$ e $y = 3x$. Resp. (h) $\frac{e^2}{2}$.

6. Determine o volume do sólido S em cada um dos seguintes casos:

(a) S é limitado superiormente pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$, inferiormente pelo plano $z = 0$ e sua projeção no plano xy é a região limitada por $y = x^2$ e $x = y^2$. Resp. (a) $\frac{6}{35}$.

(b) S é limitado superiormente por $z = xy$, inferiormente pelo plano $z = 0$ e sua projeção no plano xy é o triângulo de vértices $(1, 1)$, $(4, 1)$ e $(1, 2)$. Resp. (b) $\frac{31}{8}$.

(c) S é a região do primeiro octante limitada pelo cilindro $x^2 + z^2 = 9$ e pelo plano $x + 2y = 2$. Resp. (c) $\frac{1}{6}(11\sqrt{5} - 27) + \frac{9}{2}\,\mathrm{arcsen}(\frac{2}{3})$.

(d) S é limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$. Resp. (d) $\frac{1}{6}$.

(e) S é a região do primeiro octante limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $y = z$, $x = 0$ e $z = 0$. Resp. (e) $\frac{1}{3}$.

(f) S é limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ e $y^2 + z^2 = a^2$, onde $a > 0$. Resp. (f) $\frac{16}{3}a^3$.

7. Escreva as duas integrais iteradas correspondentes à integral dupla $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$, onde D é a região do plano limitada pelas curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $x - 2y + 1 = 0$.

8. Calcule as seguintes integrais, invertendo a ordem de integração:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\,dxdy$ (b) $\displaystyle\int_0^3 \int_{y^2}^9 y\cos(x^2)\,dxdy$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi/2} \cos x\sqrt{1 + \cos^2 x}\,dxdy$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\,dydx$ (e) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{\sqrt[3]{y}} \mathrm{sen}(x^2)\,dxdy$.

Resp. (a) $(e^9 - 1)/6$, (b) $\frac{1}{4}\sin 81$, (c) $(2\sqrt{2} - 1)/3$, (d) $\frac{1}{3}(e - 1)$, (e) $\frac{1}{2}(1 - \sin(1))$.

9. Calcule as integrais:

(a) $\displaystyle\iint_R x\,dxdy$, onde R é o disco de centro na origem e raio 5.

(b) $\displaystyle\iint_R xy\,dxdy$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pelas circunferências $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 25$.

(c) $\displaystyle\iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dxdy$, onde R é a região interior à cardioide $r = 1 + \sin\theta$ e exterior à circunferência $r = 1$.

(d) $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2)\,dxdy$, onde D é a região limitada pelas espirais $r = \theta$ e $r = 2\theta$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

(e) $\displaystyle\iint_D (e^{-x^2-y^2})\,dxdy$, onde D é a região limitada pelo semicírculo $x = \sqrt{4 - y^2}$ e o eixo y.

(f) $\displaystyle\iint_D \sqrt{(x-1)^2 + y^2}\,dxdy$ sendo $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

Resp. (a) zero, (b) $\frac{609}{8}$, (c) 2, (d) $24\pi^5$ (e) $\frac{\pi}{2}(1 - e^{-4})$, (f) $\frac{16}{9}$.

10. Esboce a curva e calcule a área da região indicada:

(a) a regio limitada por um laço da rosácea $r = \cos 3\theta$ Resp. $\frac{\pi}{12}$.

(b) a região limitada pela lemniscata $r^2 = 4\cos 2\theta$ Resp. 4.

11. Determine o volume da região interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ e exterior ao cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$, com $a > 0$. Resp. $\frac{16a^3}{3}\left(\pi + \frac{4}{3}\right)$

12. Determine a massa e o centro de massa da lâmina que ocupa a região D e tem densidade δ, nos seguintes casos:

(a) $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ e $\delta(x, y) = x^2$.

(b) D é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(0, 3)$ e $\delta(x, y) = x + y$.

(c) D é a região do primeiro quadrante limitada pela parábola $y = x^2$ e a reta $y = 1$ e $\delta(x, y) = xy$.

(d) D é a região limitada pela parabola $y^2 = x$ e a reta $y = x - 2$ e $\delta(x, y) = 3$.

(e) $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq \sin x, 0 \leq x \leq \pi\}$ e $\delta(x, y) = y$.

Resp. (a) $\frac{2}{3}$, $(0, \frac{1}{2})$, (b) 6, $(\frac{3}{4}, \frac{3}{2})$, (c) $\frac{1}{6}$, $(\frac{4}{7}, \frac{3}{4})$, (d) $\frac{27}{2}$, $(\frac{8}{5}, \frac{1}{2})$ (e) $\frac{\pi}{4}$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{16}{9\pi})$.

13. Determine os momentos de inércia I_x, I_y e I_0 das lâminas descritas nos itens (c) e (d) do exercício anterior. Resp. (c) $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{13}{80}$, (d) $\frac{189}{20}$, $\frac{1269}{28}$, $\frac{1917}{35}$.

14. (a) Calcule a massa de $D = \{(x, y) : (x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 \leq 100\}$, com função densidade $\delta(x, y) = x - 2y + 18$. Resp. 150π.

(b) Calcule a massa de $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, \sqrt[3]{x} \leq y \leq 1\}$ com função densidade $\delta(x, y) = e^{y^4} + \sqrt[3]{x^2}$. Resp. $\frac{1}{4}(e - \frac{3}{5})$.

(c) Calcule o momento de inércia I_0 com relação a origem de $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$, onde $a > 1$, $b > 1$ e função densidade $\delta(x, y) = 1$. Resp. $ab(a^2 + b^2)\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}$.

15. Calcule usando mudança de coordenadas:

(a) $\displaystyle\iint_D (x^2 - y^2)\,\text{sen}((x + y)^2)\,dxdy$, onde D é o paralelogramo de vértice $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4})$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$ e $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. Resp. $\frac{\pi^2}{32}\left(1 - \cos(\frac{\pi^2}{4})\right)$.

(b) $\displaystyle\iint_R \cos\left(\frac{\pi(y - x)}{4(y + x)}\right) dy\,dx$, onde R a região do 1^o quadrante limitada pelas retas $x + y = 1$ e $x + y = 2$. Resp. $\frac{3\sqrt{2}}{\pi}$.

16. Calcule as integrais iteradas:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^z \int_0^y xyz\,dxdydz$ (b) $\displaystyle\int_0^\pi \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} z \sin y\,dxdzdy$. Resp. (a) $\frac{1}{48}$, (b) $\frac{16}{3}$.

17. Calcule as integrais triplas:

(a) $\displaystyle\iiint_D yz\,dxdydz$, onde $D = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1, 0 \leq y \leq 2z, 0 \leq x \leq z + 2\}$.

(b) $\displaystyle\iiint_D y\,dxdydz$, onde D é a região abaixo do plano $z = x + 2y$ e acima da região no plano xy limitada pelas curvas $y = x^2$, $y = 0$ e $x = 1$.

(c) $\displaystyle\iiint_D xy\,dxdydz$, onde D é o tetraedro sólido com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, 3)$.

(d) $\displaystyle\iiint_D z\,dxdydz$, onde D é limitada pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y + z = 1$ e $x + z = 1$.

(e) $\displaystyle\iiint_D x\,dxdydz$, onde D é limitada pelo parabolóide $x = 4y^2 + 4z^2$ e pelo plano $x = 4$.

Resp. (a) $\frac{7}{5}$, (b) $\frac{5}{28}$, (c) $\frac{1}{10}$, (d) $\frac{1}{12}$, (e) $\frac{16\pi}{3}$.

18. Determine a massa e o centro de massa do cubo $Q = [0,a] \times [0,a] \times [0,a]$ cuja densidade é dada pela função $\delta(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Resp. a^5, $(7a/12, 7a/12, 7a/12)$.

19. Determine os momentos de inércia de um cubo de densidade constante k e aresta L se um dos seus vértices é a origem e três de suas arestas estão sôbre os eixos coordenados. Resp. $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3}kL^5$.

20. Calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\iiint_E (x^2+y^2)\,dxdydz$, onde E é a região limitada pelo cilindro $x^2+y^2=4$ e pelos planos $z=-1$ e $z=2$.

(b) $\displaystyle\iiint_E y\,dxdydz$, onde E é a região entre os cilindros $x^2+y^2=4$ e $x^2+y^2=1$, limitada pelo plano xy e pelo plano $z=x+2$.

(c) $\displaystyle\iiint_E x^2\,dxdydz$, onde E é o sólido limitado pelo cilindro $x^2+y^2=1$, pelo cone $z^2=4x^2+4y^2$ e contido no semiespaço $z \geq 0$. Resp. (a) 24π, (b) 0, (c) $2\pi/5$.

21. Determine o volume da região R limitada pelos parabolóides $z = x^2+y^2$ e $z = 36-3x^2-3y^2$. Resp.162π.

22. Determine a massa e o centro de massa do sólido S limitado pelo parabolóide $z = 4x^2+4y^2$ o pelo plano $z=a$ $(a>0)$, se S tem densidade constante K. Resp. $\pi K a^2/8$, $(0,0,2a/3)$.

23. Calcule as integrais:

(a) $\displaystyle\iiint_B (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$, onde B é a bola unitária $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

(b) $\displaystyle\iiint_E y^2\,dxdydz$, onde E é a parte da bola unitária $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ contida no primeiro octante.

(c) $\displaystyle\iiint_E \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, onde E é a região interior ao cone $\phi = \pi/6$ e à esfera $\rho = 2$.

Resp. (a) $4\pi/5$, (b) $\pi/30$, (c) $4\pi(2-\sqrt{3})$.

24. Determine a massa de um hemisfério sólido H de raio a se a densidade em qualquer ponto é proporcional a sua distância ao centro da base. Resp. $K\pi a^4/2$, onde K é a constante de proporcionalidade.

25. Calcule o volume da região limitada pelo elipsóide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Resp. $\frac{4}{3}\pi abc$.

26. Calcule a integral $\displaystyle\iiint_E x\,dxdydz$, onde $E = \{(x,y,z) : \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$. Resp. 3π.

27. Calcule a massa do sólido $E = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq b^2,\ z \geq a > 0\}$, com $a<b$ e $\delta(x,y,z)=z$. Resp. $\frac{\pi}{4}(b^2-a^2)^2$.

28. (a) Calcule o volume da região acima do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ e dentro da esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$. Resp. $\frac{a^3\pi}{3}(2-\sqrt{2})$

(b) Calcule a massa da região acima do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$, dentro da esfera $x^2+y^2+z^2=2az$, $a>0$ com $\delta(x,y,z)=x^2+y^2$ Resp. $\frac{11}{30}\pi a^5$.

(c) Calcule $\displaystyle\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, onde V o slido limitado por $x^2+y^2+z^2=2z$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$ e $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ Resp. $\frac{(9\sqrt{3}-4\sqrt{2})\pi}{20}$.

29. Calcule a massa da região R limitada por:

(a) $z(x^2+y^2)=2, z=0, x^2+y^2=1, x^2+y^2=2$, com $x \geq 0$ e $y \leq 0$ e $\delta(x,y,z)=1$ Resp. $\frac{\pi \ln 2}{2}$.

(b) $z^2=x^2+y^2, x^2+y^2-2y=0$, para $x \geq 0$ com $\delta(x,y,z)=1$ Resp. $\frac{32}{9}$.

(c) $x^2+y^2=1+z^2, x^2+y^2=4$ com $\delta(x,y,z)=|z|$; Resp.$\frac{9\pi}{2}$.

(d) $x^2+y^2=1+z^2, x^2+y^2=z^2$, para $|z| \leq a$ com $\delta(x,y,z)=|z|$; Resp. πa^2.

(e) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1+z^2, \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=2z^2$ com $\delta(x,y,z)=1$; Resp. 8π.

(f) $x^2+y^2=1+z^2, x^2+y^2=2+2z^2$, para $|z| \leq a$ com $\delta(x,y,z)=z^2$. Resp. $2\pi(\frac{a^5}{5}+\frac{a^3}{3})$.

30. (a) Calcule $\displaystyle\iiint_R (x+y+z)(x+y-z)dxdydz$ para R limitada por: $x+y+z=1$, $x+y+z=2$, $x+y-z=0$, $x+y-z=2$, $x-y-z=1$ e $x-y-z=2$; Resp. $\frac{3}{4}$.

(b) Calcule a massa do sólido
$R=\{(x,y,z) \mid (x+y+z)^2+(x+y-z)^2+(x-y-z)^2 \leq 25 \ , \quad x+y+z \geq 0 \ , \ x+y-z \geq 0\}$,
onde a densidade $\delta(x,y,z)=(x+y+z)(x+y-z)$. Resp. $\frac{625}{6}$.

31. Calcule $\displaystyle\iiint_R z\,dxdydz$, onde R é limitada por:

(a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1+z^2, \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=4+\frac{z^2}{2}$, para $z \geq 0$. Resp. 27π.

(b) $z=\sqrt{(x-1)^2+y^2}; z=-\sqrt{x^2+y^2}; x^2+y^2=4$. Resp. 2π.

32. Calcule a integral

$$\int_0^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} \int_0^{\sqrt{25-x^2-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\,dzdydx\,.$$

Resp. $\frac{\pi}{2}(5-\arctan(5))$.

33. Use a transformação $x=u^2$, $y=v^2$, $z=w^2$ para calcular o volume da região limitada pela superfície $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ e pelos planos coordenados Resp. $\frac{1}{90}$.

34. Calcule a massa da região limitada por: $x^2+y^2+z^2 \leq r^2$; $x^2+y^2 \geq \frac{r^2}{2}+z^2$, com $\delta(x,y,z)=x^2+y^2$. Resp. $\pi r^5/4$.

35. Calcule a massa do sólido limitado por $u^2+v^2+w^2=4v$, $u^2+v^2+w^2=2v$, com $v \geq \sqrt{u^2+w^2}$, sendo a densidade $\delta(u,v,w)=u^2+w^2$. Resp. $\frac{341}{30}\pi$.

36. Calcule a massa do sólido dado por $S=\{(u,v,w) : u^2+v^2+w^2 \geq 1, \quad u^2+v^2+w^2 \leq 2u\}$ sendo a densidade $\delta(u,v,w)=u$. Resp. $\frac{9}{8}\pi$.

37. Se D é a região limitada pelas curvas $x=y^2-4y-1$ e $y-x-5=0$ e se

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy$$

então podemos afirmar que

a) $a = 1$, $b = 4$, $c = y^2 - 4y - 1$, $d = y - 5$
b) $a = y^2 - 4y - 1$, $b = y - 5$, $c = 1$, $d = 4$
c) $a = y - 5$, $b = y^2 - 4y - 1$, $c = 1$, $d = 4$
d) $a = 1$, $b = 4$, $c = y - 5$, $d = y^2 - 4y - 1$

38. O volume do sólido limitado pelo cilindro $2(x-1)^2 + 4y^2 = 8$ e pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ dado pelo valor da integral dupla:

$$\int\int_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy.$$

Para o cálculo dessa integral, uma mudança de coordenadas conveniente e o respectivo Jacobiano (J) são

a) $x = 2r\cos(\theta) + 1$, $y = \sqrt{2}\, r\sin(\theta)$, $J = 2\sqrt{2}r$

b) $x = 2r\cos(\theta) + 1$, $y = \dfrac{r\sin(\theta)}{\sqrt{2}}$, $J = r$

c) $x = \dfrac{r\cos(\theta)}{2} + 1$, $y = \dfrac{r\sin(\theta)}{\sqrt{2}}$, $J = \dfrac{r}{2\sqrt{2}}$

d) $x = \dfrac{r\cos(\theta)}{\sqrt{2}} + 1$, $y = \sqrt{2}\, r\sin(\theta)$, $J = r$

39. O volume da região limitada pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ com $z \geq 0, x \geq 0$ pode ser calculado usando coordenadas cilíndricas por

$$\int_0^a \int_0^b \int_0^r r\, dz\, dr\, d\theta$$

Então a e b são, respectivamente,

a) $\dfrac{\pi}{2}$, $2\sin\theta$ b) π, $2\sin\theta$ c) π, $2\cos\theta$ d) $\frac{\pi}{2}$, $2\cos\theta$

40. O volume do sólido limitado por $z = 3 + x^2 + y^2$ e $z = 6$ é

a) $\dfrac{9\pi}{2}$ b) 9π c) $4\pi\sqrt{3}$ d) $\pi\sqrt{3}$