**MAC0329 – Álgebra booleana e aplicações**
DCC / IME-USP — Primeiro semestre de 2023

**Lista de exercícios 3**

Prazo para entrega: 22/06/2023 (em papel)

> **OBS.:** Entregar apenas os assinalados com *. Para cada questão, mostre ou explique como chegou ao resultado (não basta apenas escrever o resultado).

## Expressões e funções booleanas

1. Seja a tabela-verdade de uma função $f : B^3 \to B$ dada conforme a seguir:

| $a\,b\,c$ | $f(a,b,c)$ |
|---|---|
| 0 0 0 | 0 |
| 0 0 1 | 1 |
| 0 1 0 | 1 |
| 0 1 1 | 0 |
| 1 0 0 | 0 |
| 1 0 1 | 1 |
| 1 1 0 | 0 |
| 1 1 1 | 1 |

   (a) escreva $f$ na forma SOP canônica
   (b) escreva $f$ na forma POS canônica

2. Escreva as seguintes expressões na forma algébrica correspondente.
   a) $f(a,b,c) = m_1 + m_3 + m_4 + m_7$
   b) $f(a,b,c) = M_0\,M_6$

3. Escreva a expressão $a\,(b + \overline{a}\,\overline{c})$ na forma soma de produtos (não precisa ser canônica).

4. (*) Escreva a expressão a seguir na forma soma de produtos (SOP) e soma canônica de produtos (SOP canônica), usando apenas manipulações algébricas das expressões.

$$(a + b\,\overline{c})\overline{(bc)}$$

5. Escreva a expressão do exercício anterior na forma produto de somas (POS) e produto canônico de somas (POS canônica). Também usando apenas manipulação de expressões algébricas.

6. Seja $f : B^3 \to B$ uma função booleana em três variáveis. Aplique recursivamente o Teorema de expansão de Boole, de forma que a expressão resultante fique na forma soma de produtos. Explique como obter a expressão de $f$ na forma soma canônica de produtos (SOP canônica) a partir da expressão resultante.

7. Quais são os átomos da álgebra booleana $B(2)$ (i.e., a álgebra booleana das funções booleanas em duas variáveis, $x_1$ e $x_2$, $x_1, x_2 \in \{0,1\}$)? Considerando que qualquer elemento de uma álgebra booleana pode ser expressa de forma única (a menos da ordem) como soma de átomos, qual é a expressão na forma soma de mintermos (SOP canônica) da função definida pela expressão $\overline{x}_1 + x_2$? Explique.

8. (*) Sejam $a, b, c, d$ quatro variáveis booleanas sobre $B = \{0,1\}$.

   (a) Para qual(is) atribuição(ões) de valores às variáveis $a, b, c, d$ o produto $\overline{a}bd$ toma valor 1 ?

   (b) Quais são os mintermos (em quatro variáveis $a, b, c, d$) cobertos[1] pelo produto $a\overline{b}c$ ?

   (c) A qual intervalo do poset $(B^4, \leq)$ corresponde o produto $bc$ ?

   (d) Está correto escrever $abd \preceq ad$ ? Explique.

9. Seja $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ e seja $g(x_1, x_2) = \overline{x}_1$. Calcule a expressão de $f + g$. As funções $f$ e $g$ estão relacionadas (isto é, vale $f \preceq g$ ou $g \preceq f$) ?

**Minimização de funções booleanas**

10. Seja a notação compacta $f(a, b, c) = \sum m(1, 5, 6)$. Escreva a expressão algébrica de $f$ na forma SOP canônica e desenhe o mapa de Karnaugh de $f$ (com $a$ nas linhas e $bc$ nas colunas do mapa).

11. Desenhe o mapa de Karnaugh de 4 variáveis $a\,b\,c\,d$ (com $ab$ nas linhas e $cd$ nas colunas do mapa) e indique no mapa os produtos $\overline{a}\,c\,d$ e $\overline{b}\,\overline{d}$.

12. Neste exercício, considere que as funções são sobre 4 variáveis $a\,b\,c\,d$. A qual intervalo corresponde o produto $a\,\overline{b}$ ? A qual (termo) produto corresponde o intervalo `X010` ?

13. Usando o mapa de Karnaugh, minimize a expressão $f(a, b, c, d) = \sum m(0, 1, 4, 5, 6, 9, 11, 13, 15)$. Escreva explicitamente em forma algébrica a expressão minimal obtida.

14. (*) Seja $f(a, b, c, d) = \sum m(0, 1, 2, 4, 5, 10, 11, 13, 15)$.

    (a) Desenhe o mapa de Karnaugh de $f$

    (b) O produto $\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{d}$ implica $f$ (isto é, $\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{d} \preceq f$) ?

    (c) Use o mapa de Karnaugh para obter UMA forma SOP minimal de $f$. Existe mais de uma? Explique.

15. Minimize a função $f(a, b, c, d) = \sum m(0, 2, 8, 12, 13) = \prod M(1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 14, 15)$, na forma SOP e na forma POS. Use o mapa de Karnaugh. Escreva as expressões minimais resultantes na forma algébrica. Compare as duas formas minimais em termos de quantidade de operações AND e OR (e, em caso de empate, em termos de número de entradas nessas portas)

[1] Dizemos que uma função $g$ cobre outra função $f$ se e somente se vale $f \preceq g$ (isto é, $f(x_1, \ldots, x_n) \leq g(x_1, \ldots, x_n)$ para qualquer $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$).

16. Minimize na forma SOP a função $f(a,b,c,d) = \sum m(0,2,8,9) + d(1,13)$ (lembre-se que $d()$ indica o conjunto de *don't cares*, isto é, entradas para as quais o valor da função não importa). Use o mapa de Karnaugh.

**Circuitos combinacionais**

17. Explique o que é um multiplexador $n$:1 ($n$ entradas). Quantos *bits* seletores são necessários? Desenhe o circuito de um multiplexador de 4 entradas (1 saída).

18. Explique o que é um demultiplexador 1:$n$ ($n$ saídas). Quantos *bits* seletores são necessários? Desenhe o circuito de um demultiplexador de 4 saídas (1 entrada).

19. (*) Explique o que é um decodificador de $n$ bits (entrada corresponde aos $n$ *bits* de um número em binário). Quantas saídas devemos ter? Desenhe o circuito de um decodificador de 3 bits.

20. Explique o que é um codificador de $n$ entradas. Quantas saídas devemos ter e o que elas representam? Devemos supor alguma condição em relação às entradas ? Desenhe o circuito de um codificador de 4 entradas.

21. Como o decodificador é utilizado para acesso a uma posição específica da memória do computador?

22. Considere um circuito subtrator para números (sem sinal) de dois bits. As entradas $a\,b$ e $c\,d$ definem dois números binários $N_1$ e $N_2$ (i.e., $N_1 = ab$ e $N_2 = cd$). Suponha que $N_1 \geq N_2$ sempre. As saídas $f\,g$ do circuito correspondem à diferença $N_1 - N_2$ (i.e., $f\,g = N_1 - N_2$). Escreva a tabela-verdade para o par de saídas $f\,g$ .

23. Como podemos implementar um multiplexador 4-1, usando apenas multiplexadores 2-1? Quantos destes são necessários ?

24. Mostre como realizar a função $f(a,b) = \sum m(0,2,3)$ com um decodificador 2-4 mais uma porta OU.

25. Mostre como realizar a função $f(a,b,c,d) = \sum m(0,1,3,6,7,8,11,12,14)$ usando um MUX $8-1$, com as variáveis $a$, $b$ e $c$ como seletores.

26. (*) Seja $f(a,b,c,d) = \sum m(0,3,5,7,11,12,13,15)$. Mostre como realizar a função $f$ usando:
    (a) um multiplexador $8:1$ (use $a,b,c$ como entrada para os seletores) e eventualmente um mínimo de portas lógicas.
    (b) um multiplexador $4:1$ (use $a,b$ como entrada para os seletores) e eventualmente um mínimo de portas lógicas.
    Use $a$ como o bit mais significativo e $b$ como o menos significativo nos *bits* seletores e, analogamente, o inverso (i.e., $b$ como o bit mais significativo e $a$ como o menos significativo). Houve diferença na quantidade de portas lógicas AND e/ou OR adicionais necessárias?

27. Projete um circuito que recebe um número binário de 4 *bits* representando valores de 0 a 9 e ativa os segmentos apropriados de um display de sete segmentos de forma a exibir o dígito correspondente ao valor de entrada (os valores de 10 a 15 podem ser ignorados). Utilize o Logisim para simular o seu circuito. Você consegue pensar em uma solução que usa um decodificador (e eventualmente algumas portas lógicas adicionais)?