MAC0329 – Álgebra booleana e aplicações
DCC / IME-USP — Primeiro semestre de 2023

Lista de exercícios 2

Prazo para entrega: 02/05/2023 (em papel)

OBS.: Entregar apenas as assinaladas com *. Para cada questão, mostre ou explique como chegou ao resultado (não basta apenas escrever o resultado).

1. Mostramos que $\langle B, +, \cdot, \bar{}, 0, 1\rangle$ é uma álgebra booleana. Afirmamos que outro exemplo de álgebra booleana é o conjunto $B^n = B \times B \times \ldots \times B$, com as operações $+$, $\cdot$ e $\bar{}$ herdadas de B e definidas, para quaisquer $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in B^n$, da seguinte forma

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \ldots, x_n \cdot y_n)$$

$$\overline{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$$

e com

$$\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$$

$$\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$$

Mostre que o conjunto B^2 (isto é, $n = 2$), com as operações mais os elementos $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ como definidos acima, é uma álgebra booleana. (Note que a cor magenta é apenas para deixar claro a qual conjunto se referem as operações e os elementos identidade 0 e 1).

2. Seja $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, ou seja, o conjunto de divisores de 30. Defina operações binárias $+$ e $\cdot$ e uma operação unária $\bar{}$ da seguinte forma: para quaisquer $a_1, a_2 \in A$,

$$a_1 + a_2 = \text{o mínimo múltiplo comum entre } a_1 \text{ e } a_2$$

$$a_1 \cdot a_2 = \text{o máximo divisor comum entre } a_1 \text{ e } a_2$$

$$\overline{a}_1 = 30/a_1$$

Quais são os elementos identidade (neutro) com respeito a $+$ e $\cdot$? Mostre que A, com as três operações acima, é uma álgebra booleana.

Dica: considere a decomposição dos elementos de A em fatores primos.

Nas próximas questões, suponha que a álgebra booleana considerada, caso não haja menção em contrário, é dada por $\langle A, +, \cdot, \bar{}, 0, 1\rangle$, e que a relação de ordem parcial $\leq$ sobre A é definida por $x \leq y \iff x + y = y, \forall x, y \in A$.

3. Explique o que é o princípio da dualidade em álgebras booleanas. Dê um exemplo que mostre a aplicação do princípio da dualidade.

4. $*$ Prove, algebricamente, a segunda igualdade do Teorema de DeMorgan, isto é, que

$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$$

(Faça a demonstração da validade da igualdade acima explicitamente, usando as propriedades vistas em aula. Neste exercício o princípio da dualidade não pode ser invocado :-)

5. $*$ Sejam $a, b, c \in A$. A seguinte implicação está correta? Explique.

$$a + b = a + c \Longrightarrow b = c$$

6. Sejam $x, y, z \in A$. Mostre que $y\,x = z\,x$ e $y\,\overline{x} = z\,\overline{x}$ implica que $y = z$.

7. $*$ Prove algebricamente que $\forall x, y, z \in A$

$$x\,y + y\,z + \overline{x}\,z = x\,y + \overline{x}\,z$$

8. Mostre que

   (a) $x + y = y$ se, e somente se, $x\,y = x$

   (b) $*$ $x\,\overline{y} = 0$ se, e somente se, $x\,y = x$

9. $*$ Mostre que a relação $\leq$ definida por

$$\forall x, y \in A, \quad x \leq y \quad \text{se e somente se} \quad x\,y = x \tag{1}$$

é uma relação de ordem parcial.

10. Mostre que

   - $x\,y \leq x \leq x + y, \quad \forall x, y \in A$
   - $0 \leq x \leq 1, \quad \forall x \in A$

11. Seja a álgebra booleana B^3. Escreva o elemento 110 como união de átomos.

12. Seja a um átomo. Mostre que

   (a) $*$ $a \leq x + y \Longleftrightarrow a \leq x$ ou $a \leq y$

   (b) $a \leq xy \Longleftrightarrow a \leq x$ e $a \leq y$

   (c) ou $a \leq x$ ou $a \leq \overline{x}$, mas não ambos.

13. $*$ Existe álgebra booleana com 6 elementos ?