CAPÍTULO 1

Sistemas Lineares — Matrizes

1. SISTEMAS LINEARES

Neste capítulo procederemos inicialmente a um estudo dos sistemas lineares sobre $\mathbb{R}$. Não nos moverá aqui nenhuma preocupação de formalismo ou rigor excessivos. Além disso limitar-nos-emos a ver sobre o assunto apenas o que é necessário para desenvolver os capítulos posteriores. De uma maneira geral este capítulo 1 constitui apenas um pré-requisito para o restante deste livro.

Definição 1 — Dados os números reais $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$ $(n \geqslant 1)$, à equação

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = \beta$$

onde os x_i são variáveis em $\mathbb{R}$, damos o nome de *equação linear sobre* $\mathbb{R}$ *nas incógnitas* $x_1, \ldots, x_n$.

Uma *solução* dessa equação é uma seqüência de n números reais(*) (não necessariamente distintos entre si), indicada por $(b_1, \ldots, b_n)$, tal que

$$\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n = \beta$$

é uma frase verdadeira.

Exemplo — Dada a equação: $2x_1 - x_2 + x_3 = 1$, a terna ordenada $(1, 1, 0)$ é uma solução dessa equação pois $2 \cdot 1 - 1 + 0 = 1$ é verdadeira.

Definição 2 — *Um sistema de m equações lineares com n incógnitas* $(m, n \geqslant 1)$(**) é um conjunto de m equações lineares, cada uma delas com n incógnitas, consideradas simultaneamente. Um sistema linear se apresenta do seguinte modo:

$$S: \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}x_1 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases}$$

(*) Também chamada *n-upla* de números reais.

(**) Se $m = n$ simplesmente *sistema linear de ordem n*.

Uma *solução* do sistema acima é uma n-upla $(b_1, \ldots, b_n)$ de números reais que é solução de *cada uma* das equações do sistema.

Exemplo – Dado o sistema

$$S: \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

uma solução de S é (0, 3, 4). Notemos que essa solução não é única: a terna $\left(\frac{8}{5}, \frac{11}{5}, 0\right)$ também é solução de S.

Se, no sistema S, tivermos $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_m = 0$, o sistema S será *homogêneo.* A n-upla $(0, 0, \ldots, 0)$ é solução de S neste caso e por isso todo sistema homogêneo é compatível, de acordo com a definição 3 a seguir. A solução $(0, 0, \ldots, 0)$ chama-se *solução trivial* do sistema homogêneo.

Definição 3 – Dizemos que um sistema linear S é *incompatível* se S não admite nenhuma solução. Um sistema linear que admite uma única solução é chamado *compatível determinado.* Se um sistema linear S admitir mais do que uma solução então ele recebe o nome de *compatível indeterminado.*

Exemplos

1) Um sistema do tipo

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0x_1 + \ldots + 0x_n = \beta_i \quad (\beta_i \neq 0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}x_1 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases}$$

é necessariamente incompatível: como nenhuma n-upla é solução da equação i-ésima, então nenhuma n-upla é solução do sistema.

2) Um sistema do tipo

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 \\ x_2 = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \beta_n \end{cases}$$

é compatível determinado e $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ é a sua solução única.

3) O sistema

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y \quad\quad = 6 \end{cases}$$

é indeterminado pois, conforme vimos atrás, as ternas (0, 3, 4) e $\left(\frac{8}{5}, \frac{11}{5}, 0\right)$ são soluções deste sistema. Conforme veremos, existem infinitas soluções deste sistema. Tente achar uma.

2. SISTEMAS EQUIVALENTES

Seja S um sistema linear de m equações com n incógnitas. Interessa-nos considerar os sistemas que podem ser obtidos de S de uma das seguintes maneiras:

(I) *Permutar* duas das equações de S. É evidente que se S_1 indicar o sistema assim obtido, então toda solução de S_1 é solução de S e vice-versa.

(II) *Multiplicar* uma das equações de S por um número real $\lambda \neq 0$. Indicando por S_1 o sistema assim obtido mostremos que toda solução de S_1 é solução de S e vice-versa.

Devido a (I) podemos supor que a equação multiplicada seja a primeira. Como as demais equações de S e S_1 coincidem basta verificar nossa afirmação quanto à primeira equação.

Se $(b_1, \ldots, b_n)$ é uma solução de S (conforme definição 2), então:

$$\alpha_{11}b_1 + \ldots + \alpha_{1n}b_n = \beta_1 \tag{1}$$

Multiplicando por λ esta igualdade obteremos:

$$(\lambda\alpha_{11})b_1 + \ldots + (\lambda\alpha_{1n})b_n = \lambda\beta_1 \tag{2}$$

o que mostra que $(b_1, \ldots, b_n)$ é também solução da primeira equação de S_1.

Por outro lado, se $(b_1, \ldots, b_n)$ é solução de S_1, então a igualdade (2) é verdadeira. Dividindo (2) por λ obtemos (1). Portanto $(b_1, \ldots, b_n)$ pertence ao conjunto das soluções de S.

(III) *Somar* a uma das equações do sistema uma outra equação desse sistema multiplicada por um número real. Deixamos como exercício a verificação de que o sistema:

$$S_1: \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{i1}x_1 + \ldots + \alpha_{in}x_n = \beta_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\lambda\alpha_{i1} + \alpha_{j1})x_1 + \ldots + (\lambda\alpha_{in} + \alpha_{jn})x_n = \lambda\beta_i + \beta_j \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}x_1 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases}$$

assim obtido e o sistema S ou são ambos incompatíveis ou admitem ambos as mesmas soluções. Sugerimos ao leitor que faça alguns casos particulares antes de tentar o caso geral.

Definição 4 – Dado um sistema linear S, uma qualquer das modificações explicadas acima em (I), (II) e (III) que se faça com esse sistema recebe o nome de *operação elementar com S.* Se um sistema linear S_1 foi obtido de um sistema linear S através de um número finito de operações elementares, dizemos que S_1 é *equivalente* a S. Notação: $S_1 \sim S$. É fácil ver que para a relação $\sim$ assim definida valem as seguintes propriedades:

(a) $S \sim S$ (reflexiva);

(b) $S_1 \sim S \Longrightarrow S \sim S_1$ (simétrica);

(c) $S_1 \sim S$ e $S \sim S_2 \Longrightarrow S_1 \sim S_2$ (transitiva).

Convém frisar, por último, que em virtude do que já vimos neste parágrafo, se $S_1 \sim S$, então toda solução de S é solução de S_1 e vice-versa. Em particular, se S_1 é incompatível, o mesmo acontece com S.

Desta forma criamos um mecanismo extremamente útil para a procura de soluções de um sistema linear S. Procuramos sempre encontrar um sistema linear equivalente a S e que seja "mais simples". Veremos um exemplo. Consideremos o sistema:

$$S: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = 4 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Para estudar este sistema deve-se aplicar a ele uma série de operações elementares visando fazer com que o número de coeficientes iniciais nulos seja maior em cada equação (a partir da segunda) do que na precedente. Vejamos como se pode fazer isso.

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = 4 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \overset{*}{\sim} \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = 2 \\ -y + z = -1 \end{cases} \overset{**}{\sim} \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = 2 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

* Multiplicamos por -2 a primeira equação e somamos o resultado com a segunda equação; multiplicamos a primeira equação por -1 e somamos com a terceira.

** Somamos a segunda equação com a terceira.

Como este último sistema é incompatível, o mesmo acontece com o sistema S dado inicialmente.

3. SISTEMAS ESCALONADOS

Consideremos um sistema linear de m equações com n incógnitas que tem o seguinte aspecto:

$$S: \begin{cases} \alpha_{1r_1}x_{r_1} + \dots\dots\dots\dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \qquad \alpha_{2r_2}x_{r_2} + \dots\dots\dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad \alpha_{kr_k}x_{r_k} + \dots + \alpha_{kn}x_n = \beta_k \\ \qquad\qquad\qquad 0\,x_n = \beta_{k+1} \end{cases}$$

onde $\alpha_{1r_1} \neq 0$, $\alpha_{2r_2} \neq 0, \dots, \alpha_{kr_k} \neq 0$ e cada $r_i \geqslant 1$.

Se tivermos $1 \leqslant r_1 < r_2 < \dots < r_k \leqslant n$ diremos que S é um *sistema linear escalonado.* É claro que se $\beta_{k+1} = 0$, a última equação de S pode ser eliminada do sistema. Logo, num sistema escalonado o número de coeficientes iniciais nulos em cada equação, a partir da segunda, é maior do que na precedente.

Exemplo de sistema escalonado:

$$\begin{cases} 2x - y - z - 3t = 0 \\ z - t = 1 \\ 2t = 2 \end{cases}$$

Proposição 1 – Todo sistema linear S é equivalente a um sistema escalonado.

Demonstração – Sem perder a generalidade podemos supor:

$$S: \begin{cases} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases}$$

Para cada $\alpha_{i1} \neq 0$ $(i = 2, 3, \ldots, m)$ multipliquemos por $(-\alpha_{i1})$ a primeira equação e somemos o resultado à equação i-ésima. Com algumas permutações convenientes de equações (se for o caso) obteremos um sistema S_1 do seguinte tipo:

$$S_1: \begin{cases} x_1 + \ldots + \alpha_{1r_1}x_{r_1} + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \gamma_{2r_1}x_{r_1} + \ldots + \gamma_{2n}x_n = \beta_2' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{mr_1}x_{r_1} + \ldots + \gamma_{mn}x_n = \beta_m' \end{cases}$$

onde $\gamma_{2r_1} \neq 0$ e $r_1 \geqslant 2$, que é equivalente a S.

Dividindo a segunda equação de S_1 por γ_{2r_1} obtemos um sistema S_2, ainda equivalente a S_1, com o qual começamos a repetir o raciocínio feito até aqui, porém a partir da sua segunda equação. Evidentemente, depois de aplicar um certo número finito de vezes esse raciocínio chegaremos a um sistema escalonado equivalente a S. ■

A importância dos sistemas escalonados reside na Proposição 1. Sendo todo sistema equivalente a um sistema escalonado, bastará que saibamos lidar com os sistemas escalonados e saibamos reduzir um sistema qualquer a um escalonado.

Nota: Convém observar que as equações do tipo $0 = 0$ que por ventura aparecerem no processo de escalonamento devem ser suprimidas, como é óbvio.

Exemplo – Escalonemos o seguinte sistema:

$$S: \begin{cases} 2x - y + z - t = 4 \\ 3x + 2y - z + 2t = 1 \\ 2x - y - z - t = 0 \\ 5x + 2t = 1 \end{cases}$$

$$S \sim \begin{cases} z + 2x - y - t = 4 \\ -z + 3x + 2y + 2t = 1 \\ -z + 2x - y - t = 0 \\ 5x + 2t = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} z + 2x - y - t = 4 \\ 5x + y + t = 5 \\ 4x - 2y - 2t = 4 \\ 5x + 2t = 1 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} z + 2x - y - t = 4 \\ x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}t = 1 \\ 4x - 2y - 2t = 4 \\ 5x + 2t = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} z + 2x - y - t = 4 \\ x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}t = 1 \\ -\frac{14}{5}y - \frac{14}{5}t = 0 \\ -y + t = -4 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} z + 2x - y - t = 4 \\ 5x + y + t = 5 \\ y + t = 0 \\ y - t = 4 \end{cases} \sim \begin{cases} z + 2x - y - t = 4 \\ 5x + y + t = 5 \\ y + t = 0 \\ -2t = 4 \end{cases}$$

Observe o leitor que $(1, 2, 2, -2)$ é a única solução de S, pois é a única solução do sistema escalonado.

4. DISCUSSÃO E RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Discutir um sistema linear S significa efetuar um estudo de S visando a classificá-lo segundo a definição 3. *Resolver* um sistema linear significa determinar todas as suas soluções. O conjunto dessas soluções recebe o nome de *conjunto solução* do sistema.

Seja S um sistema linear de m equações com n incógnitas. Procedendo ao escalonamento de S chegaremos a uma das três seguintes situações:

(I) No processo de escalonamento, numa certa etapa, obtém-se um sistema:

$$S': \begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0x_1 + \dots + 0x_n = \beta_i \quad (\beta_i \neq 0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Como S' é incompatível, então o mesmo se pode dizer de S. (Ver exemplo no parágrafo 2).

(II) Obtém-se um sistema escalonado do seguinte tipo:

$$S: \begin{cases} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \qquad x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_n = \beta_n \end{cases}$$

Neste caso S' poderá ser transformado, por equivalência, no seguinte sistema

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = \gamma_1 \\ \quad x_2 \qquad = \gamma_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad x_n = \gamma_n \end{cases}$$

Logo S é compatível determinado e $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ é a sua solução.

Exemplo – Discutir e resolver o seguinte sistema:

$$S: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}$$

$$S \sim \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3y = -2 \\ 2y - 2z = -2 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = -1 \\ 3y = -2 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = -1 \\ 3z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = -1 \\ z = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\overset{*}{\sim} \begin{cases} x - y = \dfrac{2}{3} \\ y = -\dfrac{2}{3} \\ z = \dfrac{1}{3} \end{cases} \overset{**}{\sim} \begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{2}{3} \\ z = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

* Somamos a terceira equação à segunda.

** Somamos a segunda equação à primeira.

Logo o sistema é compatível determinado e $\left(0, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ é a sua solução.

Observação: Depois de conseguir o escalonamento poderíamos ter achado a solução do sistema por substituição do seguinte modo:

Como $z = \frac{1}{3}$ e $y - z = -1$, então $y - \frac{1}{3} = -1$. Daí $y = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$.

Agora, se na primeira equação do sistema substituirmos y por $-\frac{2}{3}$ e z por $\frac{1}{3}$, acharemos $x = 0$.

(III) Obtém-se um sistema escalonado do tipo abaixo:

$$S': \begin{cases} x_1 + \ldots + \alpha_{1r_2}x_{r_2} + \ldots + \alpha_{1r_3}x_{r_3} + \ldots + \alpha_{1r_p}x_{r_p} + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \qquad x_{r_2} + \ldots + \alpha_{2r_3}x_{r_3} + \ldots + \alpha_{2r_p}x_{r_p} + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \qquad\qquad x_{r_3} + \ldots + \alpha_{3r_p}x_{r_p} + \ldots + \alpha_{3n}x_n = \beta_3 \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_{r_p} + \ldots + \alpha_{pn}x_n = \beta_p \end{cases}$$

onde $p < n$.

É fácil então ir eliminando, por meio de operações elementares, o termo em x_{r_2} na primeira equação, os termos em x_{r_3} da primeira e segunda equações, ..., os termos em x_{r_p} da primeira à $(p-1)$-ésima equação. Por exemplo, multiplicando a segunda equação por $(-\alpha_{1r_2})$ e somando o resultado com a primeira eliminando o termo $\alpha_{1r_2}x_{r_2}$.

Feito isto, passamos para o segundo membro de cada equação todas as parcelas, exceção feita à primeira. Teremos então algo como:

$$\begin{cases} x_1 = f_1 \\ x_{r_2} = f_2 \\ \cdots\cdots \\ x_{r_p} = f_p \end{cases}$$

onde cada f_i é uma expressão linear nas variáveis x_j com $j \neq 1, j \neq r_2, \ldots, j \neq r_p$. A cada seqüência de valores que dermos então a estas $n - p$ variáveis (*variáveis livres*) obteremos valores para $x_1, x_{r_2}, \ldots, x_{r_p}$ e conseqüentemente uma solução do sistema. Como $p < n$, teremos mais do que uma solução (infinitas na verdade) e o sistema é *indeterminado* neste caso.

Exemplo – Discutir e resolver o sistema:

$$S: \begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ x - 7y = 3 \end{cases}$$

$$S \sim \begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 5y - z = -2 \\ -5y + z = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 5y - z = -2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ y - \frac{1}{5}z = -\frac{2}{5} \end{cases} \sim \begin{cases} x - \frac{7}{5}z = \frac{1}{5} \\ y - \frac{1}{5}z = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Daí tiramos:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}z \\ y = -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}z \end{cases}$$

Logo, $\left\{\left(\frac{1}{5} + \frac{7}{5}z, -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}z, z\right) : z \in \mathbb{R}\right\}$ é o conjunto de todas as soluções de S (*conjunto solução* de S). Dizemos também que $\left(\frac{1}{5} + \frac{7}{5}z, -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}z, z\right)$, com $z \in \mathbb{R}$, é a *solução geral* do sistema linear S.

RESUMO DA DISCUSSÃO

A discussão feita acima pode ser resumida do seguinte modo:

Suponhamos que um sistema tenha sido escalonado e, retiradas as equações do tipo $0 = 0$, restam p equações com n incógnitas.

(I) Se a última das equações restantes é

$$0x_1 + \ldots + 0x_n = \beta_p \quad (\beta_p \neq 0)$$

então o sistema é *incompatível*;

Caso contrário, sobram duas alternativas:

(II) Se $p = n$ o sistema é *compatível determinado*;

(III) Se $p < n$, então o sistema é *compatível indeterminado.*

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Resolver por escalonamento:

$$S: \begin{cases} 5x - 2y + 2z = 2 \\ 3x + y + 4z = -1 \\ 4x - 3y + z = 3 \end{cases}$$

Solução

$$S \sim \begin{cases} y + 3x + 4z = -1 \\ -2y + 5x + 2z = 2 \\ -3y + 4x + z = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} y + 3x + 4z = -1 \\ 11x + 10z = 0 \\ 13x + 13z = 0 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} y + 3x + 4z = -1 \\ 11x + 10z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} y + 3x + 4z = -1 \\ x + z = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$$

De $z = 0$, tiramos $x = 0$ e daí teremos $y = -1$.

Resposta: $(0, -1, 0)$ é a única solução; o sistema é compatível determinado.

2. Resolver por escalonamento:

$$S: \begin{cases} x + y + z + 3t = 1 \\ x + y - z + 2t = 0 \end{cases}$$

Solução

$$S \sim \begin{cases} x + y + z + 3t = 1 \\ 2z + t = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x = -2 + 5z - y \\ t = 1 - 2z \end{cases}$$

Resposta: $\{(-2 + 5z - y, y, z, 1 - 2z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto solução do sistema. O sistema é compatível indeterminado, pois tem infinitas soluções.

3. Resolver por escalonamento:

$$S: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

Solução

$$S \sim \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2y - 2z = 1 \\ -y - z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = -1 \\ 2y + 2z = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = -1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Resposta: O sistema é incompatível, por causa da igualdade $0 = 1$.

4. **Resolver por escalonamento:**

$$S: \begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ x - 3y - 2z = 5 \end{cases}$$

Solução

$$S \sim \begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ \quad -3y - 2z = 2 \\ \quad -7y - 5z = 4 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ \quad y + \frac{2}{3}z = -\frac{2}{3} \\ \quad -\frac{1}{3}z = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Da última equação tiramos $z = 2$, que fornece o valor $y = -2$ na segunda equação e destes resultados obtemos $x = 3$ na primeira equação.

Resposta: O sistema é compatível determinado e $(3, -2, 2)$ é a única solução.

5. Resolver por escalonamento:

$$S: \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = -3 \\ 2x + y + 2z = 1 \\ 3x + 2y + 3z = 3 \end{cases}$$

Solução

$$S \sim \begin{cases} x + y + z = 2 \\ \quad -2y - 2z = -5 \\ \quad -y = -3 \\ \quad -y = -3 \end{cases}$$

Daí: $y = 3$, $z = -\frac{1}{2}$ e $x = -\frac{1}{2}$

Resposta: O sistema é compatível determinado, sendo $\left(-\frac{1}{2}, 3, -\frac{1}{2}\right)$ sua única solução.

6. **Resolver por escalonamento:**

$$S: \begin{cases} 3x + 3y - 2z - t = 2 \\ 5x + 2y + z - 2t = 1 \\ 2x - y + 3z - t = -1 \end{cases}$$

Solução

$$S \sim \begin{cases} -\ \ t + 3x + 3y - 2z = \ \ 2 \\ -2t + 5x + 2y + \ \ z = \ \ 1 \\ -\ \ t + 2x - \ \ y + 3z = -1 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} t - 3x - 3y + 2z = -2 \\ \quad - x - 4y + 5z = -3 \\ \quad - x - 4y + 5z = -3 \end{cases} \sim \begin{cases} t - 3x - 3y + 2z = -2 \\ \quad\ \ x + 4y + 5z = \ \ 3 \end{cases}$$

Daí: $x = -4y + 5z + 3$ e $t = -9y + 13z + 7$

Resposta: $\{(-4y + 5z + 3, y, z, -9y + 13z + 7) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto das soluções e portanto o sistema é compatível indeterminado.

7. Resolver o sistema homogêneo por escalonamento:

$$S: \begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ x + 4y - \ \ z = 0 \\ 2x - \ \ y + \ \ z = 0 \end{cases}$$

Solução

$$S \sim \begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ \quad\ \ 6y + 2z = 0 \\ \quad\ \ 3y + 7z = 0 \end{cases} \sim$$

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ \quad\ \ y + \frac{1}{3}z = 0 \\ \quad 3y + 7z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ \quad\ \ y + \frac{1}{3}z = 0 \\ \quad\quad\ \ 6z = 0 \end{cases}$$

Daí: $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$.

O sistema admite somente a solução trivial $(0, 0, 0)$, sendo portanto determinado.

8. Resolver o sistema homogêneo por escalonamento:

$$S: \begin{cases} x + y + \ \ z + t = 0 \\ x + y - 2z + t = 0 \\ 2x + y + 2z - t = 0 \end{cases}$$

Solução

$$S \sim \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ \quad\quad -3z \quad\ \ = 0 \\ \quad -y \quad\ \ - 3t = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ \quad\ \ y \quad\ \ + 3t = 0 \\ \quad\quad\ \ z \quad\ \ = 0 \end{cases} \sim$$

$$\begin{cases} x + y + \quad\quad t = 0 \\ \quad\quad y \quad\quad + 3t = 0 \\ \quad\quad\quad\quad z \quad\quad = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x \quad\quad\quad\quad - 2t = 0 \\ \quad\quad y \quad\quad + 3t = 0 \\ \quad\quad\quad\quad z \quad\quad = 0 \end{cases}$$

O conjunto $\{(2t, -3t, 0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto solução; o sistema linear é compatível indeterminado. Observe que o valor da incógnita z é determinado, isto é, não depende de t.

9. Determinar o valor de *a* para que o sistema linear S admita uma única solução e determiná-la:

$$S: \begin{cases} x + \; y = 1 \\ 2x + \; y = 2 \\ \quad\quad 3y = a \end{cases}$$

Solução

$$S \sim \begin{cases} x + \; y = 1 \\ \quad - \; y = 0 \\ \quad\quad 3y = a \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 1 \\ \quad\quad y = 0 \\ \quad\quad 0 = a \end{cases}$$

Daí, necessariamente $a = 0$ e o sistema S é equivalente a $\begin{cases} x + y = 1 \\ \quad\quad y = 0 \end{cases}$.

Resposta: $a = 0$ e $\{(1, 0)\}$ é a solução única de S.

10. Discutir o sistema:

$$S: \begin{cases} mx + 2y = \;\; 6 \\ 3x - \;\; y = -2 \\ \;\; x + \;\; y = \;\; 0 \end{cases}$$

Solução

$$S \sim \begin{cases} x + \;\; y = \;\; 0 \\ 3x - \;\; y = -2 \\ mx + 2y = \;\; 6 \end{cases} \sim \begin{cases} x + \quad\quad\quad\quad y = \;\; 0 \\ \quad\quad\quad\quad - 4y = -2 \\ \quad - (m - 2)y = \;\; 6 \end{cases} \sim \begin{cases} x + \quad\quad\quad\quad y = \;\; 0 \\ \quad\quad\quad\quad\quad 2y = \;\; 1 \\ \quad\quad (m - 2)y = -6 \end{cases}$$

Logo, se $m - 2 = -12$ (isto é, $m = -10$) o sistema é determinado.

Se $m \neq -10$ ele é incompatível. Para nenhum valor de m ele é indeterminado.

11. Resolver o sistema:

$$S: \begin{cases} \;\; x^2 + y^2 = 34 \\ -x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

Solução: Este sistema *não* é linear, pois x e y aparecem em segundo grau. Mas podemos introduzir as variáveis $u = x^2$ e $v = y^2$ tomando-se então o sistema S em $\begin{cases} u + v = 34 \\ -u + v = 16 \end{cases}$ cuja solução (*única*) é $u = 9, v = 25$. Daí obtemos $x^2 = 9$ e $y^2 = 25$, ou seja, $x = \pm 3$ e $y = \pm 5$. Há portanto 4 soluções para o sistema S: $(3, 5)$, $(3, -5)$, $(-3, 5)$ e $(-3, -5)$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Resolver os sistemas abaixo:

a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ x + 6y + 3z = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = -2 \\ 2y = 3 \end{cases}$

2. Determinar os valores de *a* e *b* que tornam o sistema

$$\begin{cases} 3x - 7y = a \\ x + y = b \\ 5x + 3y = 5a + 2b \\ x + 2y = a + b - 1 \end{cases}$$

compatível e determinado. Em seguida resolver o sistema.

3. Discutir o seguinte sistema linear (em função de *a*):

$$\begin{cases} x + y - az = 0 \\ ax + y - z = 2 - a \\ x + ay - z = -a \end{cases}$$

4. Determinar os valores de *m* para os quais o sistema é determinado:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z - t = 1 \\ 2x - 2y - 2z - 3t = -1 \\ 2x - 2y - z - 5t = 9 \\ 3x - y + z - mt = 0 \end{cases}$$

5. Resolver os sistemas homogêneos abaixo:

a) $\begin{cases} x - y + 2z - t = 0 \\ 3x + y + 3z + t = 0 \\ x - y - z - 5t = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z + w - t = 0 \\ x - y - z + 2w - t = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + 3y - z + t = 0 \\ x - y + 2z - t = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 2y - 12z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$

6. Mostrar que um sistema linear homogêneo de m equações e n incógnitas é compatível indeterminado se $n > m$.

5. MATRIZES

Definição 5 — Sejam $m \geqslant 1$ e $n \geqslant 1$ dois números inteiros. Uma *matriz* $m \times n$ *real* é uma dupla seqüência de números reais, distribuídos em m linhas e n colunas, formando uma tabela que se indica do seguinte modo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Abreviadamente esta matriz pode ser expressa por $(a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ ou apenas (a_{ij}), se não houver possibilidade de confusão quanto à variação dos índices.

Cada número que compõe uma matriz chama-se *termo* dessa matriz. Dada a matriz $(a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$, ao símbolo a_{ij} que representa indistintamente todos os seus termos daremos o nome de *termo geral* dessa matriz.

Notações — Indicaremos por $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes reais $m \times n$. Se $m = n$, ao invés de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$, usa-se a notação $M_n(\mathbb{R})$. Cada matriz de $M_n(\mathbb{R})$ chama-se *matriz quadrada de ordem n*. Em contraposição, quando $m \neq n$, uma matriz $m \times n$ se diz uma *matriz retangular*. Uma matriz 1×1 (a_{11}) se identifica com o número real a_{11}.

Cada matriz costuma ser denotada por uma letra maiúscula do nosso alfabeto.

Exemplo – A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

é uma matriz real 3×2. Logo $A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

LINHAS E COLUNAS

Dada uma matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

as m seqüências horizontais

$$A^{(1)} = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \dots, A^{(m)} = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

são chamadas *linhas* da matriz A, enquanto que as n seqüências verticais

$$A_{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, A_{(n)} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

são as *colunas* de A. É de se notar que cada $A^{(i)} \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$ e cada $A_{(j)} \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$.

Exemplo – Na matriz 2×3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

as linhas são $(1, 0, 1)$ e $(0, 6, -5)$ ao passo que as colunas são

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

IGUALDADE DE MATRIZES

Consideremos duas matrizes reais $m \times n$: $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$. **Dizemos** que $A = B$ se, e somente se,

$$a_{ij} = b_{ij} \ (i = 1, 2, \ldots, m; \ \ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Exemplos

1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 2 & z \\ t & -1 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \ \ 1 \\ t = \ \ 0 \\ z = \ \ 1 \end{cases}$$

2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

3)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. OPERAÇÕES COM MATRIZES

(a) ADIÇÃO

Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ matrizes $m \times n$. Indicamos por $A + B$ e chamamos *soma* de A com B a matriz $m \times n$ cujo termo geral é $a_{ij} + b_{ij}$, ou seja

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \ldots & a_{1n} + b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \ldots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

A operação que transforma cada par (A, B) de matrizes do mesmo tipo na matriz $A + B$ chama-se *adição* de matrizes. É uma operação no conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Exemplo – Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, então

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Para a adição de matrizes acima definida valem as seguintes propriedades:

(I) $A + (B + C) = (A + B) + C, \ \forall A, B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ (*associativa*);

(II) $A + B = B + A, \ \forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ (*comutativa*);

(III) Existe uma matriz $O \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ tal que $A + O = A, \forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ (existe *elemento neutro*);

IV) Dada uma matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, existe uma matriz $(-A)$, também $m \times n$, tal que $A + (-A) = O$ (existe a *oposta* de qualquer matriz).

A verificação da propriedade associativa se faz assim:

Se $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ e $C = (c_{ij})$, então

$$(A + B) + C = (a_{ij} + b_{ij}) + (c_{ij}) = ((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}) \overset{*}{=}$$
$$= (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})) = (a_{ij}) + (b_{ij} + c_{ij}) = A + (B + C).$$

Quanto à (III) é fácil ver que:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz chama-se *matriz nula* $m \times n$.

Por último, se $A = (a_{ij})$, é evidente que $(-A) = (-a_{ij})$. Por exemplo, se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{então } -A = \begin{pmatrix} -1 & -a & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) MULTIPLICAÇÃO DE UMA MATRIZ POR UM NÚMERO

Dada uma matriz real $A = (a_{ij})$, $m \times n$, e dado um número real α, o *produto* de α por A é a matriz real $m \times n$ dada por:

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

(*) Usamos nesta passagem a propriedade associativa da adição de números reais.

Para essa operação que transforma cada par (α, A) de $\mathbb{R} \times M_{m\times n}(\mathbb{R})$ na matriz real $\alpha A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, valem as seguintes propriedades:

(I) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;

(II) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

(III) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

(IV) $1A = A$;

quaisquer que sejam as matrizes A e B e quaisquer que sejam os números reais α e β.

Provemos (II).

Suponhamos $A = (a_{ij})$. Então:

$$(\alpha + \beta) \cdot A = ((\alpha + \beta) \cdot a_{ij}) = (\alpha \cdot a_{ij} + \beta \cdot a_{ij}) =$$
$$= (\alpha \cdot a_{ij}) + (\beta \cdot a_{ij}) = \alpha A + \beta A.$$

Exemplo – Se $\alpha = 2$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, então $\alpha A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

(c) MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Consideremos a matriz $A = (a_{ij})$ de tipo $m \times n$ e a matriz $B = (b_{jk})$ de tipo $n \times p$. O *produto* $A \cdot B$ (também indicado por AB) é a matriz $m \times p$ cujo termo geral é dado por:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} = a_{i1} \cdot b_{1k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk} \quad {}^{*}$$

Usando a notação de matriz linha e a de matriz coluna a definição acima significa que

$$AB = \begin{pmatrix} A^{(1)} \cdot B_{(1)} & \ldots & A^{(1)} \cdot B_{(p)} \\ A^{(2)} \cdot B_{(1)} & \ldots & A^{(2)} \cdot B_{(p)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A^{(m)} \cdot B_{(1)} & \ldots & A^{(m)} \cdot B_{(p)} \end{pmatrix}$$

(*) O símbolo Σ é uma letra do alfabeto grego, correspondente ao nosso S.

Nas condições acima, a operação que transforma cada par de matrizes (A, B) na matriz AB chama-se *multiplicação* de matrizes.

Exemplo – Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Então:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 5 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 5 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Proposição 2 – Sejam $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$ e $C = (c_{kr})$ matrizes reais $m \times n$, $n \times p$ e $p \times q$, respectivamente. Então $A(BC) = (AB)C$.

Demonstração – O termo geral de $A(BC)$ é dado por:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{kr} \right) \tag{1}$$

ao passo que o termo geral de $(AB)C$ é dado por:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) c_{kr} \tag{2}$$

As propriedades da adição e da multiplicação de números reais nos ensinam, contudo, que (1) = (2). Então a proposição está demonstrada. ■

Proposição 3 – Sejam A, B e C matrizes reais $m \times n$, $n \times p$ e $n \times p$, respectivamente. Então $A(B + C) = AB + AC$.

Demonstração – Usa-se o mesmo tipo de raciocínio da demonstração anterior. Fica como exercício. ■

Nota: Analogamente, se A e B são matrizes $m \times n$ e C é $n \times p$, então $(A + B)C = AC + BC$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sejam:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad e \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrizes de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Calcular $3(A - \frac{1}{2}B) + C$.

Solução

$$3(A - \frac{1}{2}B) + C = 3A - \frac{3}{2}B + C =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & -3 \\ -6 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Determinar a matriz $X \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $\frac{1}{2}(X + A) = 3(X + (B - A)) - C$, sendo A, B e C as matrizes do exercício 1.

Solução

$$\frac{1}{2}(X + A) = 3(X + (B - A)) - C \Longrightarrow X + A = 6(X + (B - A)) - 2C \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X + A = 6X + 6B - 6A - 2C \Longrightarrow 5X = 7A - 6B + 2C \Longrightarrow X = \frac{1}{5}(7A -$$

$- 6B + 2C)$. Logo

$$X = \frac{1}{5}\left(\begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ 7 & 14 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 36 & 24 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 20 & 11 & -12 \\ -29 & -8 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \frac{11}{5} & -\frac{12}{5} \\ \frac{-29}{5} & \frac{-8}{5} & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Determinar X e Y $\in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ tais que:

$$S: \begin{cases} 2X - Y = A \\ X + 3Y = B \end{cases}$$

onde A e B são as matrizes do exercício 1.

Solução

O processo de escalonamento visto para sistemas lineares sobre $\mathbb{R}$ também é válido neste caso: a explicação teórica, inclusive, é a mesma. Então:

$$S: \begin{cases} 2X - Y = A \\ X + 3Y = B \end{cases} \sim \begin{cases} X + 3Y = B \\ 2X - Y = A \end{cases} \sim \begin{cases} X + 3Y = B \\ -7Y = A - 2B \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} Y = \frac{1}{7}(2B - A) \\ X = \frac{1}{7}(3B + 2A) \end{cases}$$

Procedendo como no exercício 1 acharemos:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{-2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{11}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{20}{7} & \frac{16}{7} & \frac{8}{7} \end{pmatrix}$$

4. Dadas as matrizes reais, 1×3, $A = (1 \quad 0 \quad 0)$, $B = (0 \quad 1 \quad 0)$ e $C = (0 \quad 0 \quad 1)$, determinar as matrizes X, Y e Z de $M_{1\times 3}(\mathbb{R})$ tais que:

$$S: \begin{cases} 2X - Y + Z = A \\ X - 2Y + Z = B \\ 3X + Y - Z = C. \end{cases}$$

Solução

$$S \sim \begin{cases} X - 2Y + Z = B \\ 2X - Y + Z = A \\ 3X + Y - Z = C \end{cases} \sim \begin{cases} X - 2Y + Z = B \\ 3Y - Z = A - 2B \\ 7Y - 4Z = C - 3B \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} X + Z - 2Y = B \\ -Z + 3Y = A - 2B \\ -4Z + 7Y = C - 3B \end{cases} \sim \begin{cases} X + Z - 2Y = B \\ -Z + 3Y = A - 2B \\ -5Y = -4A + 5B + C. \end{cases}$$

Daí: $Y = \frac{1}{5}(4A - 5B - C) = \frac{1}{5}((4 \quad 0 \quad 0) - (0 \quad 5 \quad 0) - (0 \quad 0 \quad 1)) = \left(\frac{4}{5} \quad 1 \quad -\frac{1}{5}\right)$.

Analogamente, $X = \left(\frac{1}{5} \quad 0 \quad 1\right)$ e $Z = \left(\frac{7}{5} \quad -3 \quad -\frac{3}{5}\right)$.

5. Dadas as matrizes A e B abaixo, determinar os produtos AB e BA:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solução

$$AB = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+1\cdot 0 & 2\cdot 0+1\cdot 1 & 2\cdot 1+1\cdot 1 \\ 1\cdot 1+0\cdot 0 & 1\cdot 0+0\cdot 1 & 1\cdot 1+0\cdot 1 \\ 0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot 0+1\cdot 1 & 0\cdot 1+1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Analogamente:

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Dada uma matriz $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ denomina-se *transposta* de A e indica-se por A^t a seguinte matriz $n \times m$: $A^t = (b_{ji})$, onde $b_{ji} = a_{ij}$ $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$.

Valem as seguintes relações:

a) $(A + B)^t = A^t + B^t$;

b) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$;

c) $(A^t)^t = A$;

d) $(AB)^t = B^tA^t$;

desde que as operações aí indicadas estejam definidas. Provemos (IV) já que as três primeiras são imediatas.

Solução

Sejam $A = (a_{ij})$, $A^t = (b_{ji})$, $B = (c_{jk})$ e $B^t = (d_{kj})$.

Então $b_{ji} = a_{ij}$ e $d_{kj} = c_{jk}$. Supondo $AB = (r_{ik})$ e $B^tA^t = (s_{ki})$, temos:

$$r_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk} = \sum_{j=1}^{n} b_{ji}d_{kj} = \sum_{j=1}^{n} d_{kj}b_{ji} = s_{ki}$$

o que mostra que de fato $(AB)^t = B^tA^t$.

7. Para cada número real α consideremos a matriz:

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

a) Mostrar que $T_\alpha T_\beta = T_{\alpha+\beta}$; b) Calcular $T_{-\alpha}$.

Solução

$$T_\alpha T_\beta = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = T_{\alpha+\beta}.$$

$$T_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\operatorname{sen}(-\alpha) \\ \operatorname{sen}(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = T_\alpha^t$$

8. Uma matriz quadrada A se diz *simétrica* se $A^t = A$ e *anti-simétrica* se $A^t = -A$.

a) Mostrar que a soma de duas matrizes simétricas é também simétrica. Mostre que o mesmo vale para matrizes anti-simétricas.

b) O produto de duas matrizes simétricas de ordem n é uma matriz simétrica?

Solução

a) Sejam A e B as matrizes. Então $(A + B)^t = A^t + B^t = A + B$. Logo $A + B$ é simétrica. Analogamente, se A e B são anti-simétricas, $(A + B)^t = A^t + B^t = -A + (-B) = -(A + B)$.

b) $(AB)^t = B^tA^t = BA$, se A e B são simétricas. Como em geral $AB \neq BA$, então nem sempre o produto de duas matrizes simétricas é uma matriz simétrica. Por exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

9. Determinar todas as matrizes que comutam com a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, todas as matrizes X de tipo 2×2 tais que $AX = XA$.

Solução

Suponhamos $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Então:

$$AX = XA \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + z = x \\ y + t = x \\ 0 = z \end{cases}$$

Logo $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x - y \end{pmatrix}$ onde x e y são números quaisquer.

10. Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

determinar uma matriz $X \in M_2(\mathbb{R})$ de maneira que $AX = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solução

Fazendo $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ então $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2x+z & 2y+t \\ x+z & y+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + z = 1 \\ 2y + t = 0 \\ x + z = 0 \\ y + t = 1 \end{cases}$$

Resolvamos o sistema obtido por escalonamento:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 1 \\ 2x + z = 1 \\ 2y + t = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 1 \\ -z = 1 \\ 2y + t = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 1 \\ 2y + t = 0 \\ -z = 1 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 1 \\ -t = -2 \\ -z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 1 \\ z = -1 \\ t = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = -1 \\ t = 2 \end{cases}$$

Logo:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Considere as seguintes matrizes de $M_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mostre que $AB = BA$. Pode-se concluir daí que é válida a propriedade comutativa da multiplicação em $M_3(\mathbb{R})$?

Explique bem sua resposta.

2. Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e se $AB = BA$, prove que:

a) $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$;

b) $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$;

c) $(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$.

3. Sendo A e B as matrizes do exercício proposto 1, determine matrizes $X, Y \in M_3(\mathbb{R})$ de maneira que:

$$\begin{cases} 2X - Y = A + B \\ X + Y = A - B \end{cases}$$

4. O produto de duas matrizes anti-simétricas de mesma ordem é uma matriz anti-simétrica? Justifique sua resposta.

5. Determinar uma matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $A \neq 0$ e $A^2 = AA = 0$ (matriz nula).

6. Efetue os produtos AB e BA onde

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = (1 \quad 2 \quad 1).$$

7. Mostrar que se:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

então $A^2 - 6A + 5I_2 = 0$ (matriz nula).

8. Mostrar que as matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{y} \\ y & 1 \end{pmatrix}$$

onde y é um número real não nulo, verificam a equação $X^2 = 2X$.

9. Determinar todas as matrizes quadradas de ordem 3 que comutam com a matriz:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

onde *a* é um número real.

10. Se A e B são matrizes reais de ordem 2 que comutam com a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mostre que $AB = BA$.

11. Seja B uma matriz real 2×2 que comuta com a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Mostre que existem números reais a e b tais que:

$$B = aA + bI_2.$$

12. Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ são tais que $AB = 0$ (matriz nula), pode-se concluir que BA também é a matriz nula? Prove ou contra-exemplifique.

7. MATRIZES INVERSÍVEIS

Consideraremos neste parágrafo apenas matrizes quadradas de ordem n. Neste caso a multiplicação transforma cada par de matrizes de ordem n numa outra matriz, também de ordem n. E além das propriedades dadas pelas proposições 2 e 3 acima (*associativa* e *distributiva* em relação à adição) a multiplicação, neste caso, goza da propriedade de admitir elemento neutro que é a matriz

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

e que evidentemente verifica as condições

$$AI_n = I_nA = A,$$

para toda matriz A de ordem n. A matriz I_n chama-se *matriz identidade de ordem n*.

Definição 6 – Uma matriz A de ordem n se diz *inversível* se, e somente se, existe uma matriz B, também de ordem n, de modo que:

$$AB = BA = I_n$$

Esta matriz B, caso exista, é única e chama-se inversa de A, indica-se por A^{-1}.

Exemplos

1) A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é inversível uma vez que, tomando

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

então

$$AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 .$$

Logo adiante ensinaremos um algorítmo (processo) para determinar a inversa de uma matriz, caso esta inversa exista.

2) Se uma linha (ou coluna) de uma matriz A é nula, então A não é inversível. Suponhamos a linha i-ésima de A nula, isto é, $A^{(i)} = (0, 0, \ldots, 0)$. Dada então uma matriz X qualquer de ordem n, como

$$(AX)^{(i)} = A^{(i)}X = (0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0)$$

(ver definição de produto), então

$$AX = \begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix} \neq I_n, \text{ para toda matriz X.}$$

3) Se A e B são matrizes de ordem n, ambas inversíveis, então AB também é inversível e $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

De fato

$$(AB) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A(B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot I_n \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n,$$

e analogamente $(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (AB) = I_n$.

4) Se A é inversível, então A^{-1} também o é e vale a seguinte igualdade:

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

DETERMINAÇÃO DA INVERSA

Daremos aqui um algorítmo (= método) para determinar a inversa de uma matriz A, caso A seja inversível. Contudo a demonstração do teorema em que se baseia esse método somente será feita no Apêndice I, ao fim do capítulo.

Definição 7 – Dada uma matriz A entendemos por *operações elementares*(*) *com as linhas de A*, uma qualquer das seguintes alternativas:

(I) *Permutar* duas linhas de A;

(II) *Multiplicar* uma linha de A por um número $\neq 0$.

(III) *Somar* a uma linha de A uma outra linha de A multiplicada por um número.

Se uma matriz B puder ser obtida de A através de um número finito dessas operações, diz-se que B *é equivalente* a A e escreve-se $B \sim A$. Para esta relação valem as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

Teorema – Uma matriz A é inversível se, e somente se, $I_n \sim A$. Neste caso, a mesma sucessão de operações elementares que transformam A em I_n, transformam I_n em A^{-1}.

Demonstração

Está feita no apêndice 1, ao fim do capítulo.

Exemplos

1) Verificar se a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

é inversível e determinar A^{-1}, caso esta matriz exista.

Devemos orientar nosso trabalho no sentido de transformar (se possível) a matriz A na matriz I_3. Como essa mesma sucessão de operações levará I_3 em A^{-1}, então convém reunir A e I_3 numa mesma matriz e operar a partir daí.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3' = L_3 - L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

(*) Tal como para sistemas lineares, ver § 2.

$$
\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3'' = L_2 + L_3' \end{array}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim
\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3''' = \frac{L_3''}{3} \end{array}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)
$$

$$
\sim \begin{array}{l} L_1 \\ L_2' = L_2 - L_3''' \\ L_3''' \end{array}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \sim
$$

$$
\begin{array}{l} L_1' = L_1 - L_2' \\ L_2' \\ L_3''' \end{array}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{+2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)
$$

Logo a matriz A é inversível e

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

2) Vejamos o mesmo problema com a matriz

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)
$$

Como a matriz A é equivalente à matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que não é inversível (tem uma linha nula) então A também não é inversível.

8. SISTEMAS DE CRAMER

Seja

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

um sistema linear de m equações com n incógnitas sobre $\mathbb{R}$. Se formarmos as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

de tipos $m \times n$, $n \times 1$ e $m \times 1$, respectivamente, então S poderá ser escrito sob a forma matricial

$$AX = B$$

onde A recebe o nome de matriz dos coeficientes de S.

Um *sistema de Cramer* é um sistema linear de n equações com n incógnitas cuja matriz dos coeficientes é inversível. Se $AX = B$ é um sistema de Cramer, como

$$AX = B \iff A^{-1}(AX) = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B,$$

então esse sistema é compatível determinado e sua única solução é dada por $A^{-1}B$. Em particular um sistema quadrado e homogêneo cuja matriz dos coeficientes é inversível só admite a solução trivial.

Exemplo – A matriz dos coeficientes do sistema

$$\begin{cases} x + y \qquad = 1 \\ \quad y + \ z = 1 \\ x \qquad + 2z = 0 \end{cases}$$

é a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que já vimos ser inversível (parágrafo 7); já determinamos também

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Logo:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e a solução do sistema é (0, 1, 0).

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Verificar se a matriz A abaixo é inversível e, se o for, determinar sua inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solução

Utilizaremos o processo explicado no § 7.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Logo A é inversível e

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Verificar se a seguinte matriz é inversível e determinar sua inversa, caso exista:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Solução

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

O fato de a matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que é equivalente a A, ter uma linha nula, basta para concluir que A não é inversível.

3. Mostrar que a matriz A abaixo é inversível e determinar sua inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solução

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 5 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{7}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{array}\right)$$

A inversa de A é portanto a matriz:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Uma matriz quadrada A se diz *ortogonal* se A é inversível e $A^{-1} = A^t$.

a) Determinar se possível x e y em $\mathbb{R}$ a fim de que a matriz

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & x \\ y & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

seja ortogonal.

b) Provar que o produto de duas matrizes ortogonais é ortogonal.

Solução

a) $$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & x \\ y & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & y \\ x & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} 2 + x^2 & \sqrt{2}y + \sqrt{2}x \\ \sqrt{2}y + \sqrt{2}x & y^2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x^2 + 2 = 1 \\ y^2 + 2 = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = -1 \\ y^2 = -1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Portanto o problema em $M_2(\mathbb{R})$ não admite soluções pois as equações $x^2 = -1$ e $y^2 = -1$ não têm solução em $\mathbb{R}$.

b) Sejam A e B matrizes ortogonais de ordem n. Sendo A e B inversíveis, então já vimos que AB também é inversível e que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Daí

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^tA^t = (AB)^t.$$

5. Determinar $a \in \mathbb{R}$ a fim de que a matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

seja inversível em $M_3(\mathbb{R})$.

Solução

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{se } a - 1 \neq 0.$$

Logo A é inversível para $a \neq 1$. Se $a = 1$, então a matriz A é equivalente a uma matriz com uma linha nula e portanto não é inversível.

6. Resolver o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ \quad\; y + 2z = -4 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Solução

Façamos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Então o sistema fica $AX = B$. Já vimos no exercício resolvido nº 1, que a matriz A é inversível e

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Logo trata-se de um sistema de Cramer cuja solução é dada por:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{4}{2} + \frac{6}{2} \\ 1 + 0 + (-2) \\ -\frac{1}{2} - \frac{4}{2} + \frac{2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ -1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

A seqüência $\left(\frac{9}{2}, -1, -\frac{3}{2}\right)$ é a solução do sistema.

7. **Resolver o seguinte sistema de Cramer:**

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}$$

Solução

A matriz dos coeficientes do sistema é:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

que é inversível conforme já vimos (exercício resolvido 3) e sua inversa é a matriz:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Logo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Seja A uma matriz quadrada inversível. Mostre que A^{-1} também é inversível e que $(A^{-1})^{-1} = A$.

2. Mostrar que a matriz real

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$$

é inversível $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ e que:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ac-b & -c & 1 \end{pmatrix}$$