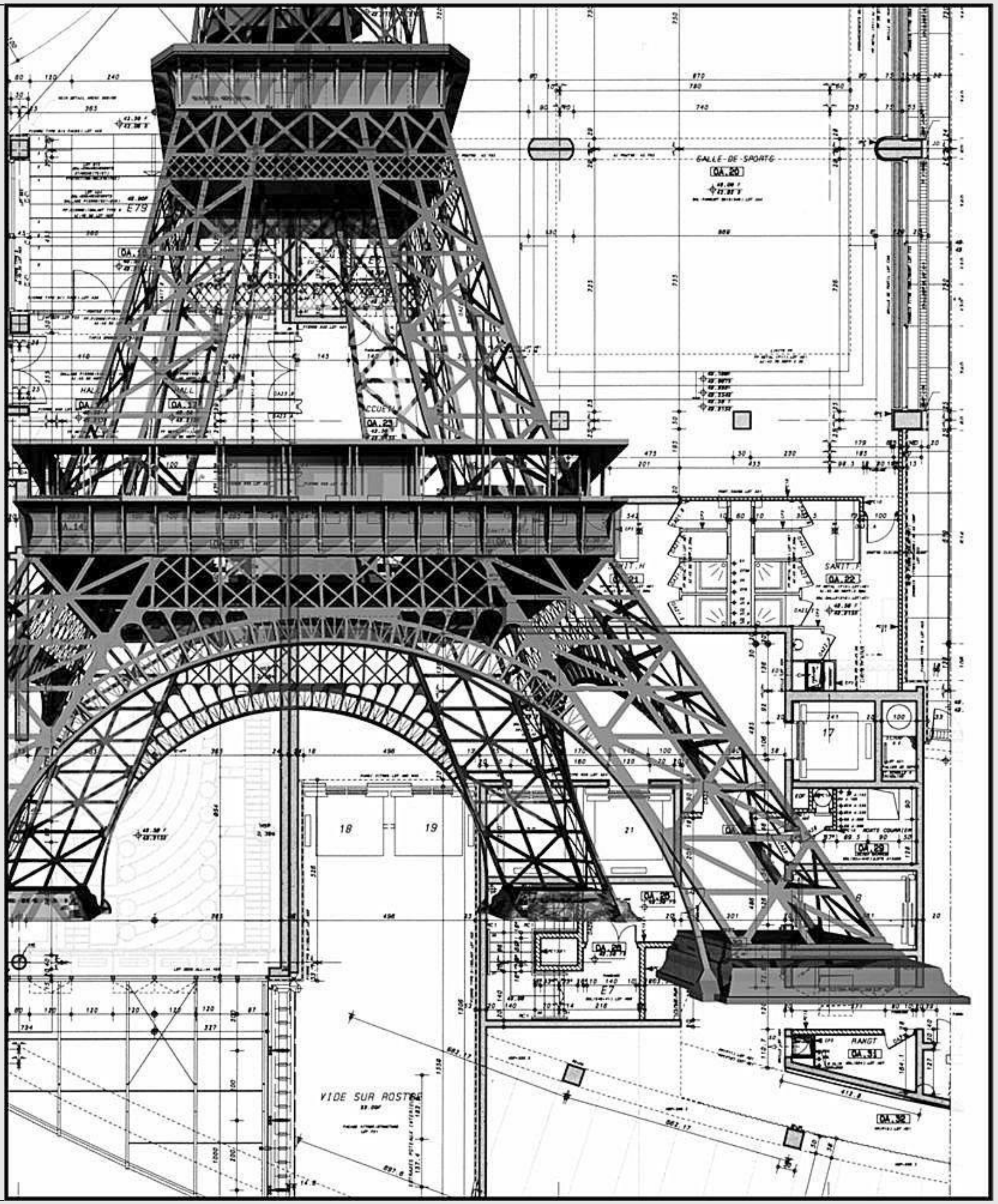
PEF3208 2020
AULA 8 - TRELIÇAS

Prof. Martin P. Schwark

TRELIÇAS

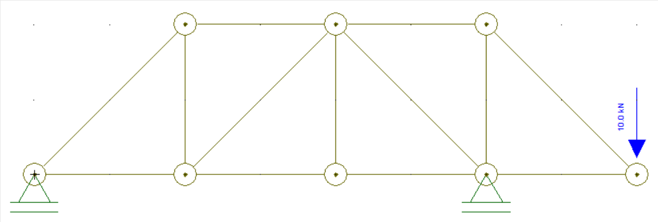
- São estruturas reticuladas (formadas por barras)
- Todas as barras são articuladas nas duas extremidades
- Os carregamentos são aplicados apenas nos nós da estrutura
- Desta forma, as barras são solicitadas apenas por força normal, constante ao longo do seu eixo
- Principais classificações:
  - Disposição: Planas/espaciais (neste curso abordaremos apenas treliças planas)
  - Estaticidade: hipostáticas/isostáticas/hiperestáticas (neste curso abordaremos apenas treliças isostáticas)
  - Formação: Simples/compostas/complexas (neste curso abordaremos apenas treliças simples e compostas)
- Métodos de resolução apresentados neste curso:
  - Método do Equilíbrio dos Nós
  - Método de Ritter



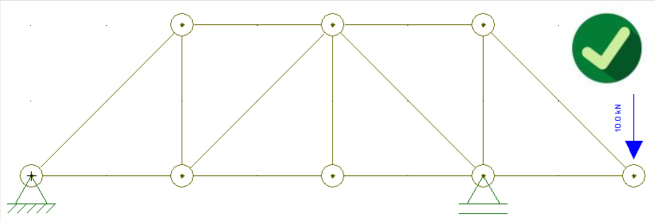
ESTATICIDADE

- r – número de reações externas
- b – número de barras
- n – número de nós

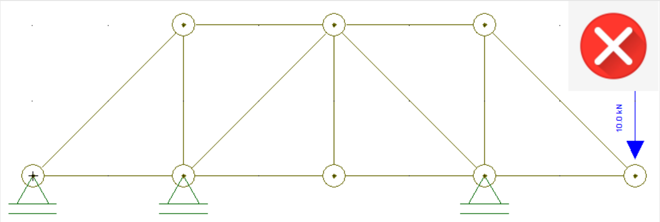
- $r + b < 2n$ hipostática
  Pode apresentar movimento
- $r + b = 2n$ isostática (condição necessária mas não suficiente, podendo ser hipostática)
  Não pode apresentar movimento, mas se torna hipostática com a liberação de qualquer vínculo
- $r + b > 2n$ hiperestática (condição necessária mas não suficiente, podendo ser hipostática)
  Não pode apresentar movimento, e pode ter vinculações suprimidas sem se tornar hipostática



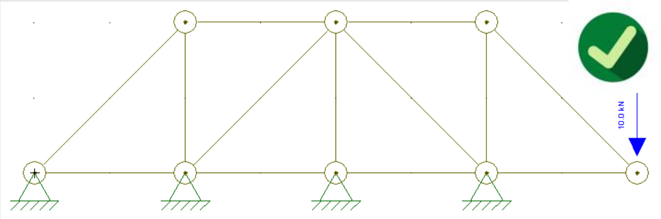
r = 2 b = 13 n = 8



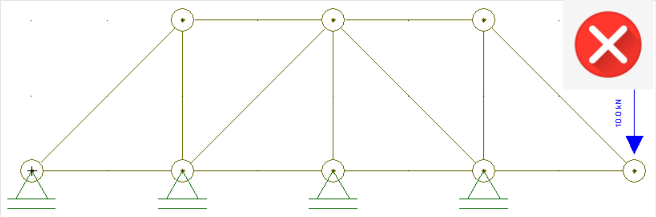
r = 3 b = 13 n = 8



r = 3 b = 13 n = 8



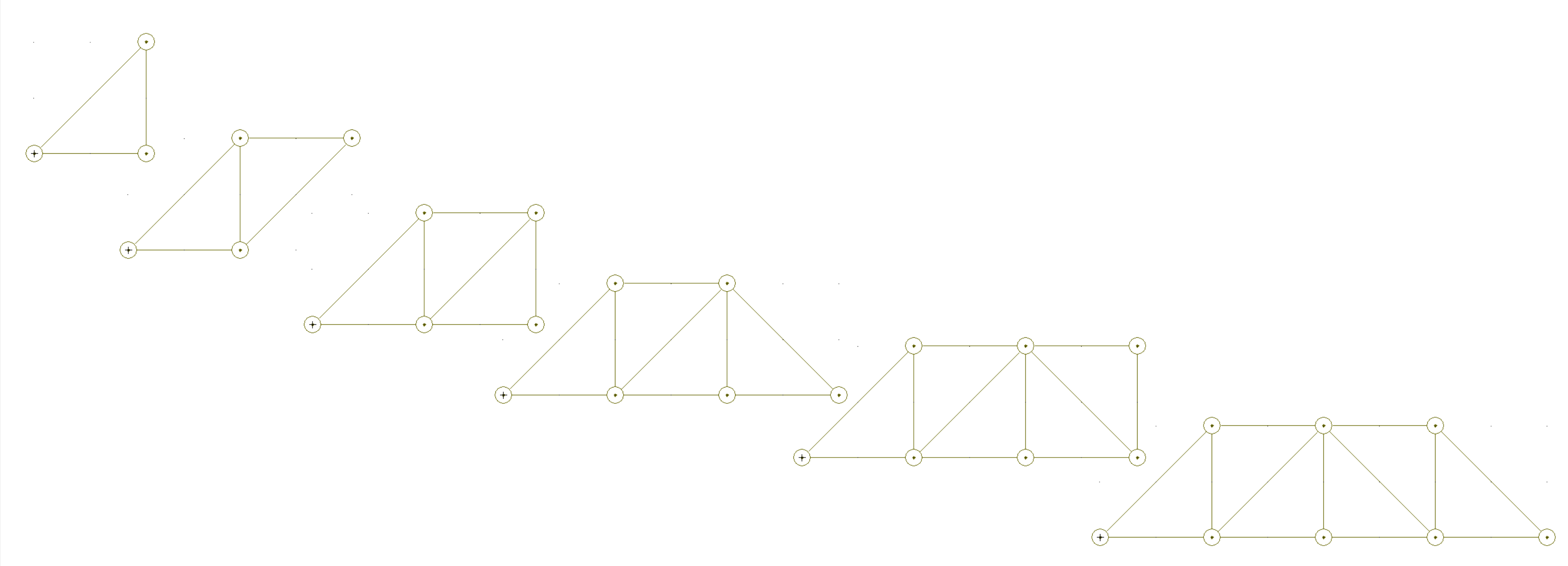
r = 8 b = 13 n = 8



r = 4 b = 13 n = 8

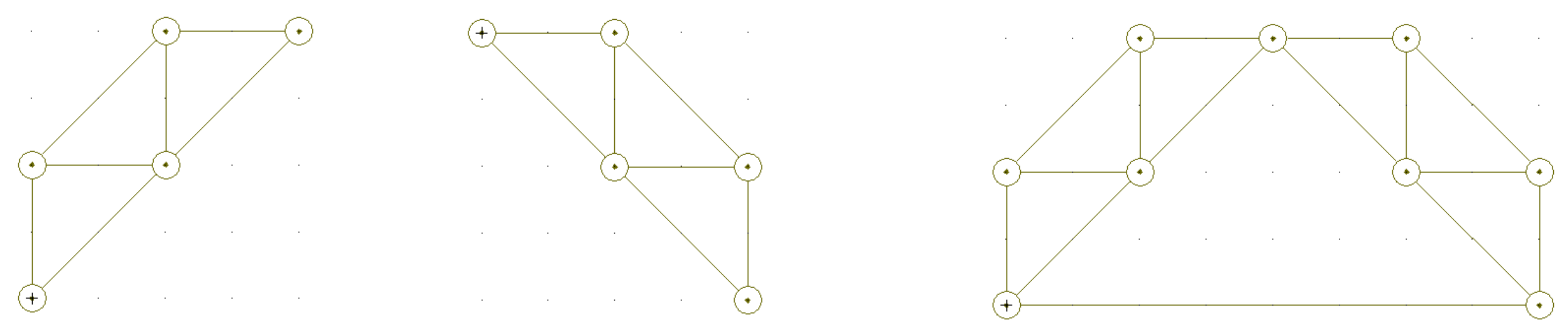
TRELIÇAS SIMPLES

- São formadas a partir de um triângulo de barras, adicionando sucessivamente duas barras e um nó



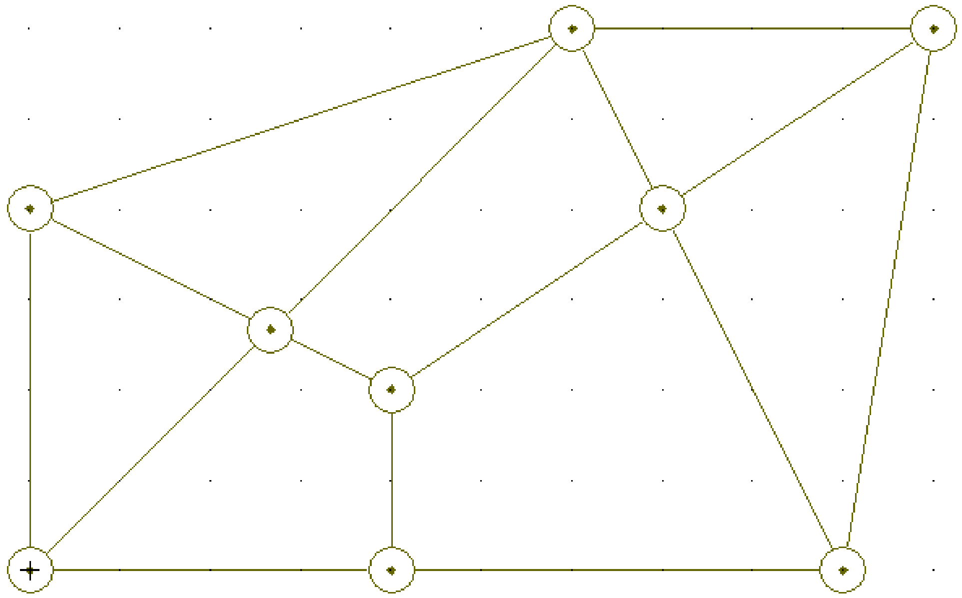
TRELIÇAS COMPOSTAS

- São compostas por treliças simples, ligadas entre si por nós ou barras



TRELIÇAS COMPLEXAS

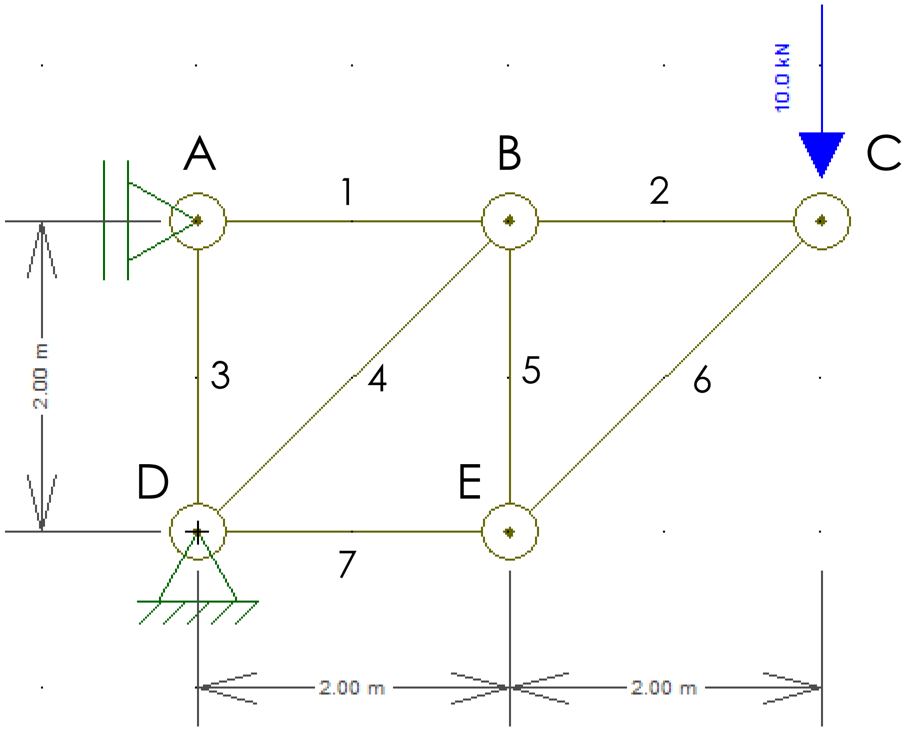
- Por exclusão



MÉTODO DO EQUILÍBRIO DOS NÓS

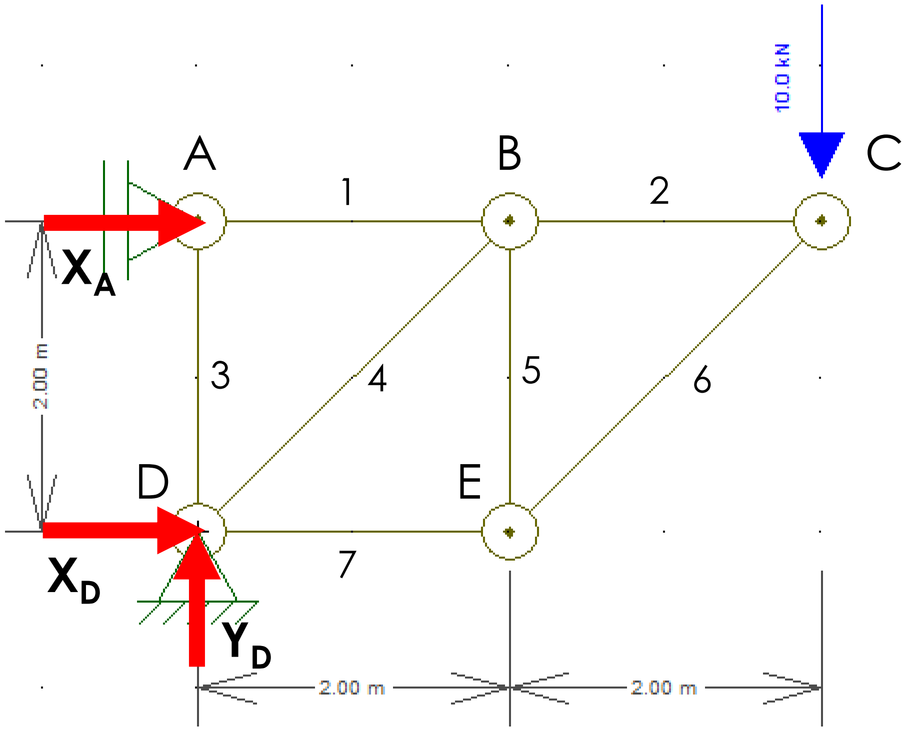
- Vamos considerar como incógnitas os esforços normais nas barras
- Se a estrutura está em equilíbrio, então seus nós também estão em equilíbrio
- Apenas duas equações de equilíbrio podem ser aplicadas para cada nó, por ser articulado nas barras
- Em treliças simples isostáticas, é possível explicitar as incógnitas uma a uma pelo equilíbrio dos nós
- Procedimento:
  - Cálculo das reações de apoio, utilizando as três equações de equilíbrio, considerando a treliça como corpo rígido
  - Cálculo sucessivo dos esforços nas barras, através do equilíbrio dos nós em que houver apenas duas incógnitas
  - No final da resolução, surgem três equações de verificação

Para os nós: $\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_y = 0$



Exemplo

Calcule os esforços nas barras da treliça ilustrada.



Reações de apoio

$\Sigma F_y = 0$

$Y_D - 10 = 0$

$\mathbf{Y_D = 10\ kN}$

$\Sigma M_D = 0$

$- X_A * 2 - 10 * 4 = 0$

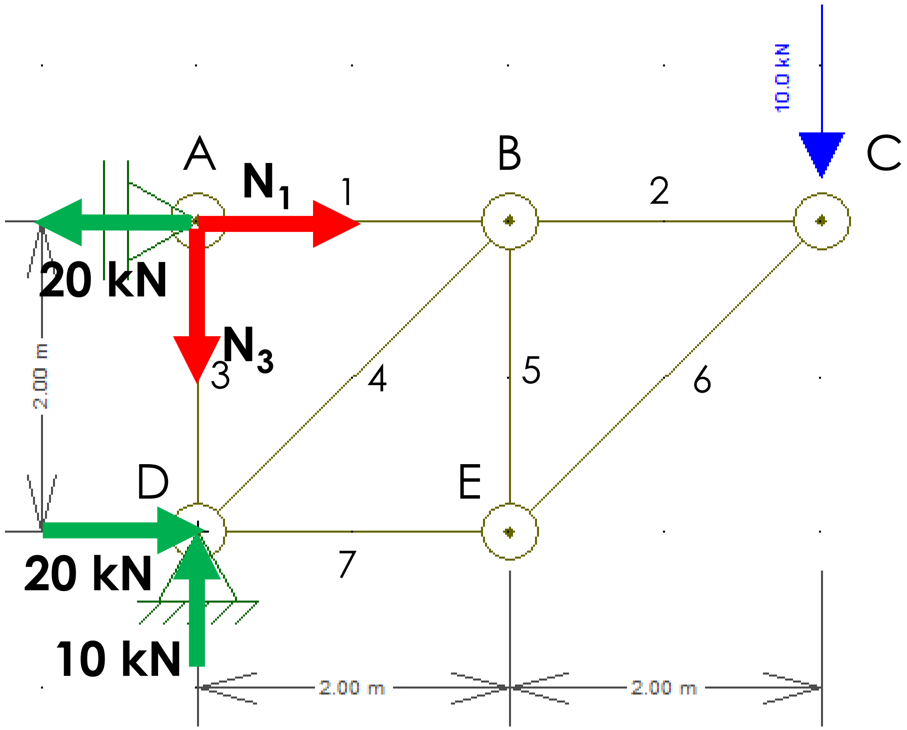
$\mathbf{X_A = -\ 20\ kN}$

$\Sigma F_x = 0$

$X_A + X_D = 0$

$- 20 + X_D = 0$

$\mathbf{X_D = 20\ kN}$



Equilíbrio do nó A

$\Sigma F_x = 0$

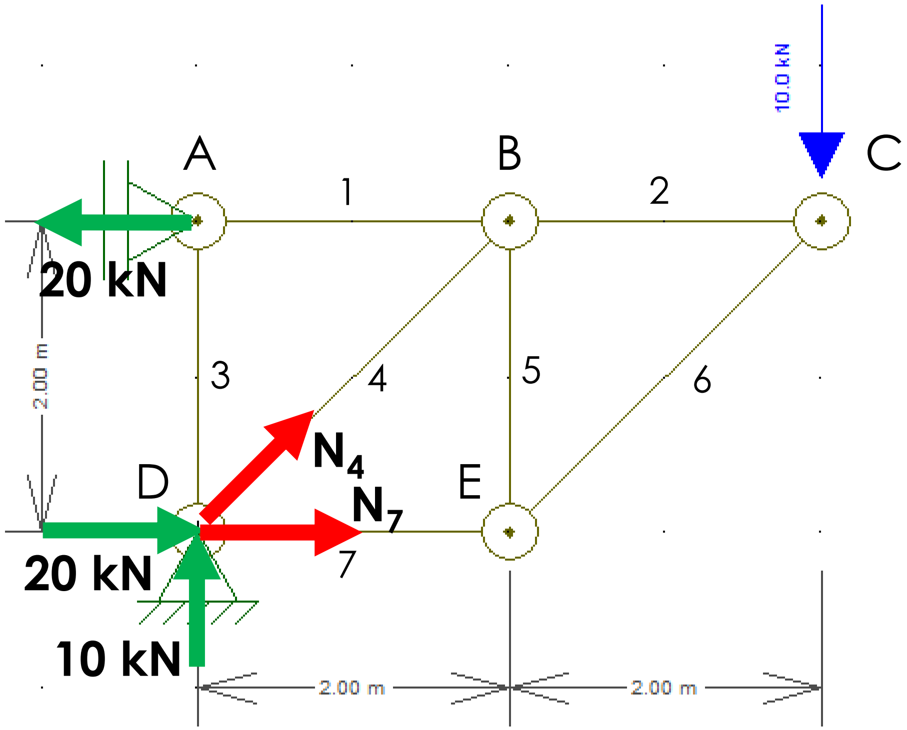
$N_1 - 20 = 0$

$\mathbf{N_1 = 20\ kN}$

$\Sigma F_y = 0$

$-N_3 = 0$

$\mathbf{N_3 = 0}$



Equilíbrio do nó D

$\Sigma F_y = 0$

$N_4 * sen45 + 10 = 0$

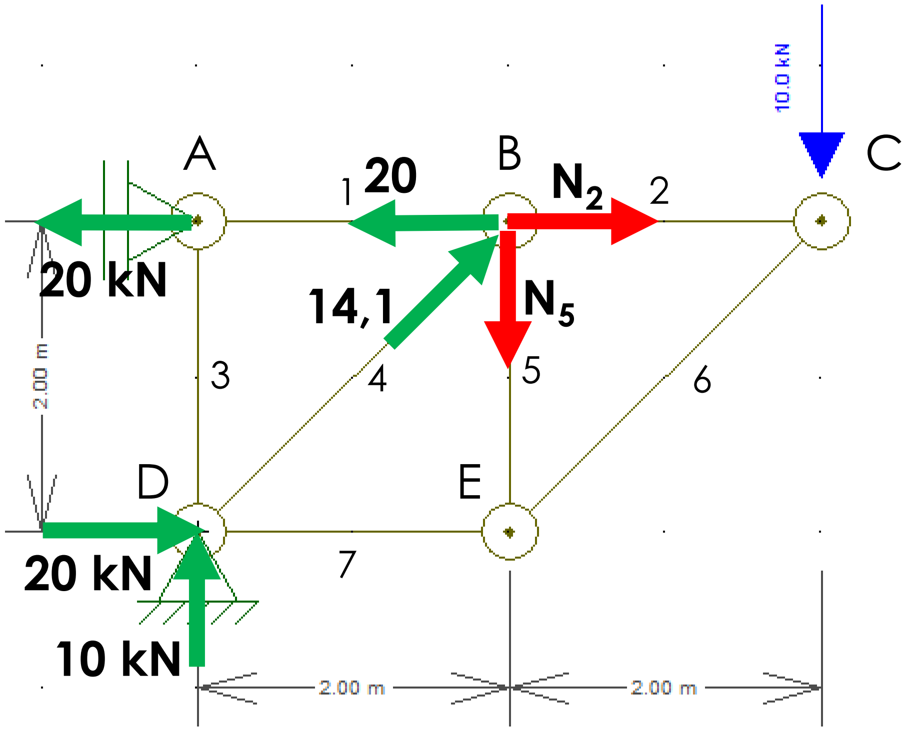
$\mathbf{N_4 = - 14{,}1\ kN}$

$\Sigma F_x = 0$

$N_7 + 20 + N_4 * cos45 = 0$

$N_7 + 20 - 10 = 0$

$\mathbf{N_7 = - 10\ kN}$



Equilíbrio do nó B

$\Sigma F_y = 0$

$- N_5 + 14{,}1 * sen45 = 0$

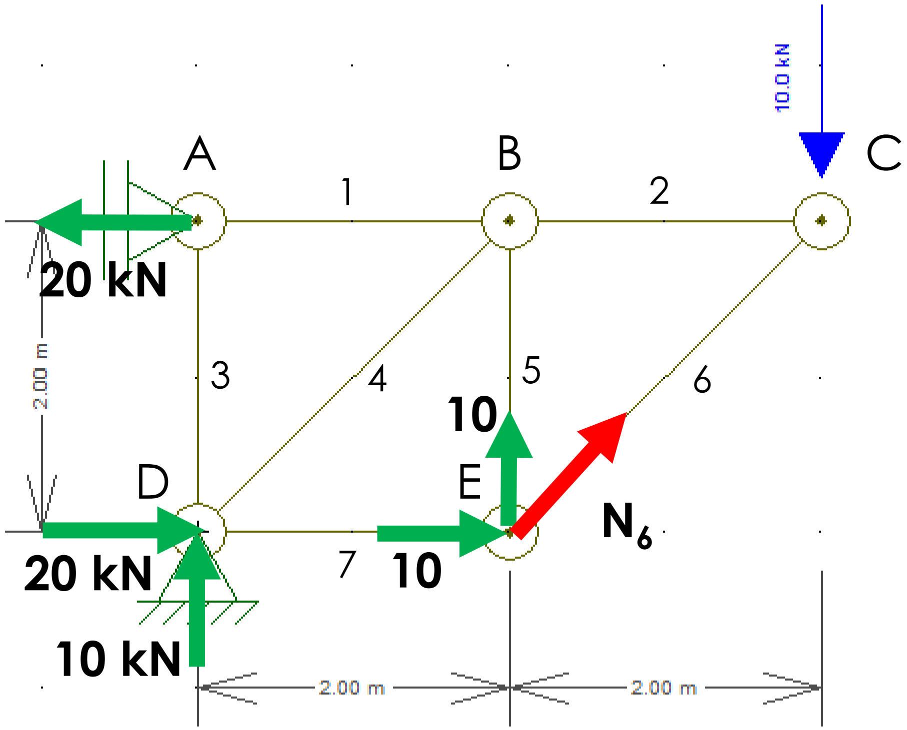
$\mathbf{N_5 = 10\ kN}$

$\Sigma F_x = 0$

$N_2 - 20 + 14{,}1 * cos45 = 0$

$N_2 - 10 = 0$

$\mathbf{N_2 = 10\ kN}$



Equilíbrio do nó E

$\Sigma F_y = 0$

$N_6 * sen45 + 10 = 0$

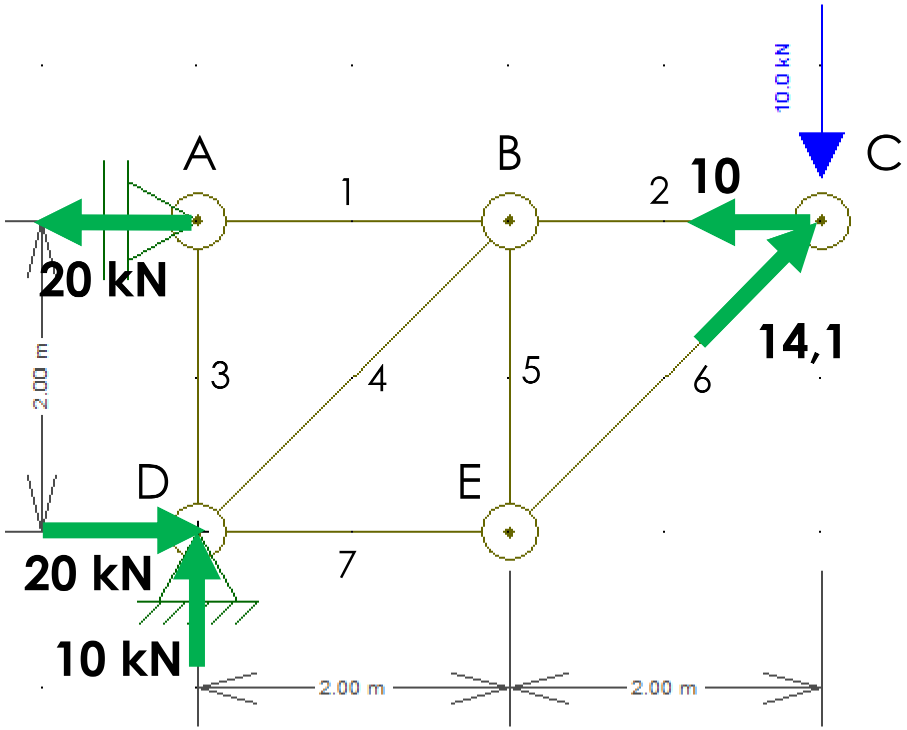
$\mathbf{N_6 = -14{,}1\ kN}$

Verificação 1

$\Sigma F_x = 0$

$N_6 * cos45 + 10 = 0$

$-10 + 10 = 0$ **OK**



Equilíbrio do nó C

Verificação 2

$\Sigma F_y = 0$

$14,1 * sen45 - 10 = 0$

$10 – 10 = 0$ **OK**

Verificação 3

$\Sigma F_x = 0$

$14,1 * cos45 - 10 = 0$

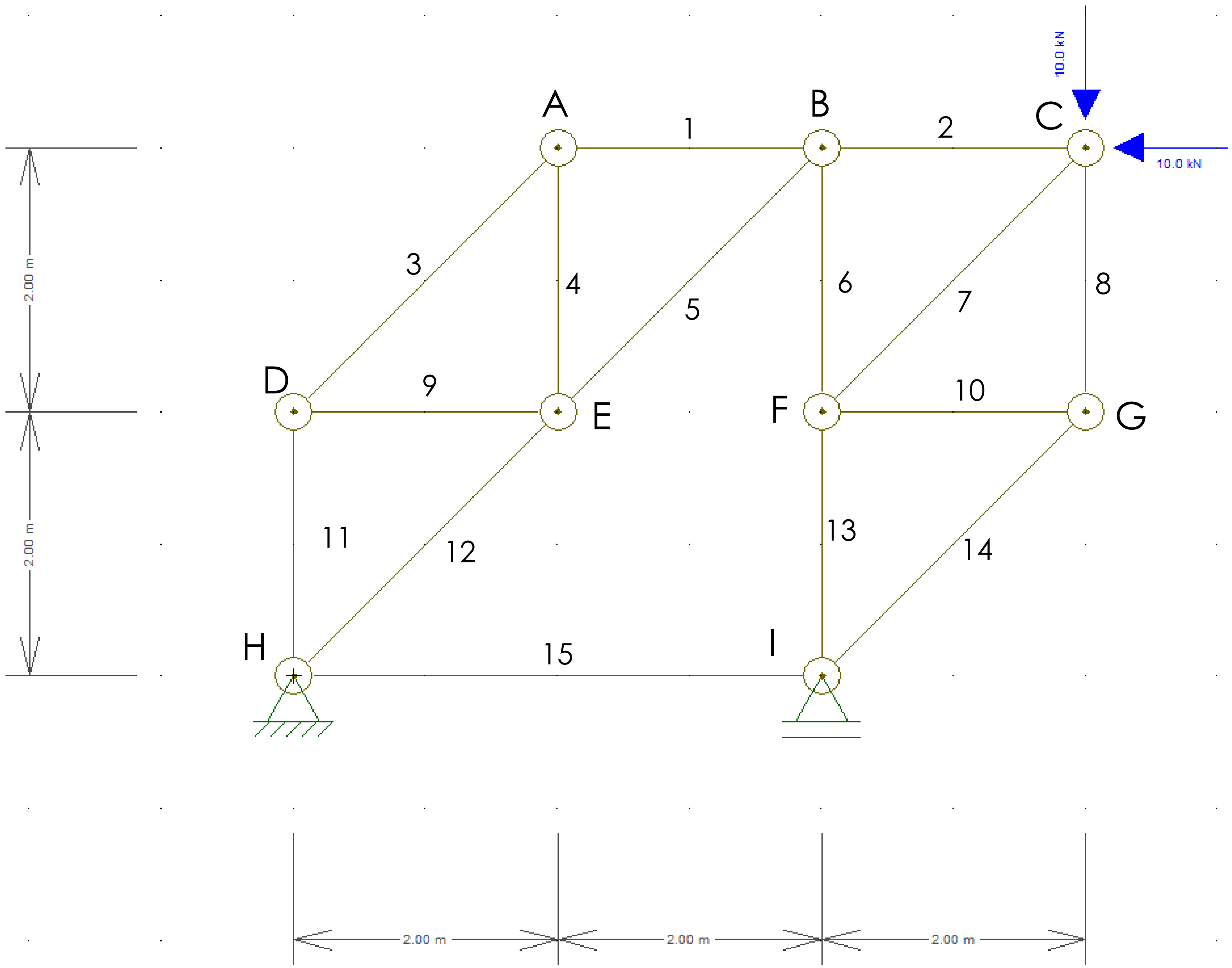
$10 - 10 = 0$ **OK**

MÉTODO DE RITTER

- Vamos considerar como incógnitas os esforços normais nas barras
- Se a estrutura está em equilíbrio, então qualquer parte desta estrutura, separada por um corte imaginário, também está em equilíbrio
- Para uma parte da estrutura que contenha pelo menos dois nós, as três equações de equilíbrio no plano podem ser aplicadas
- Em treliças simples ou compostas, é comum encontrar uma linha de corte ("corte de Ritter") que explicite três incógnitas, que podem ser obtidas através do equacionamento do equilíbrio de uma das partes da treliça, destacada pelo corte
- É comum mesclar o Método de Ritter com o Método do Equilíbrio dos Nós, explicitando as incógnitas de forma conveniente
- Procedimento:
  - Cálculo das reações de apoio, utilizando as três equações de equilíbrio, considerando a treliça como corpo rígido
  - Corte da treliça em duas partes contendo pelo menos dois nós cada uma, com uma linha de corte que atravesse três barras
  - Cálculo dos esforços nas três barras onde houve o corte, através do equacionamento do equilíbrio de uma das partes cortadas
  - Em seguida, pelo Método dos Nós, cálculo sucessivo dos esforços das barras, através do equilíbrio dos nós em que houver apenas duas incógnitas
  - No final da resolução, surgem três equações de verificação

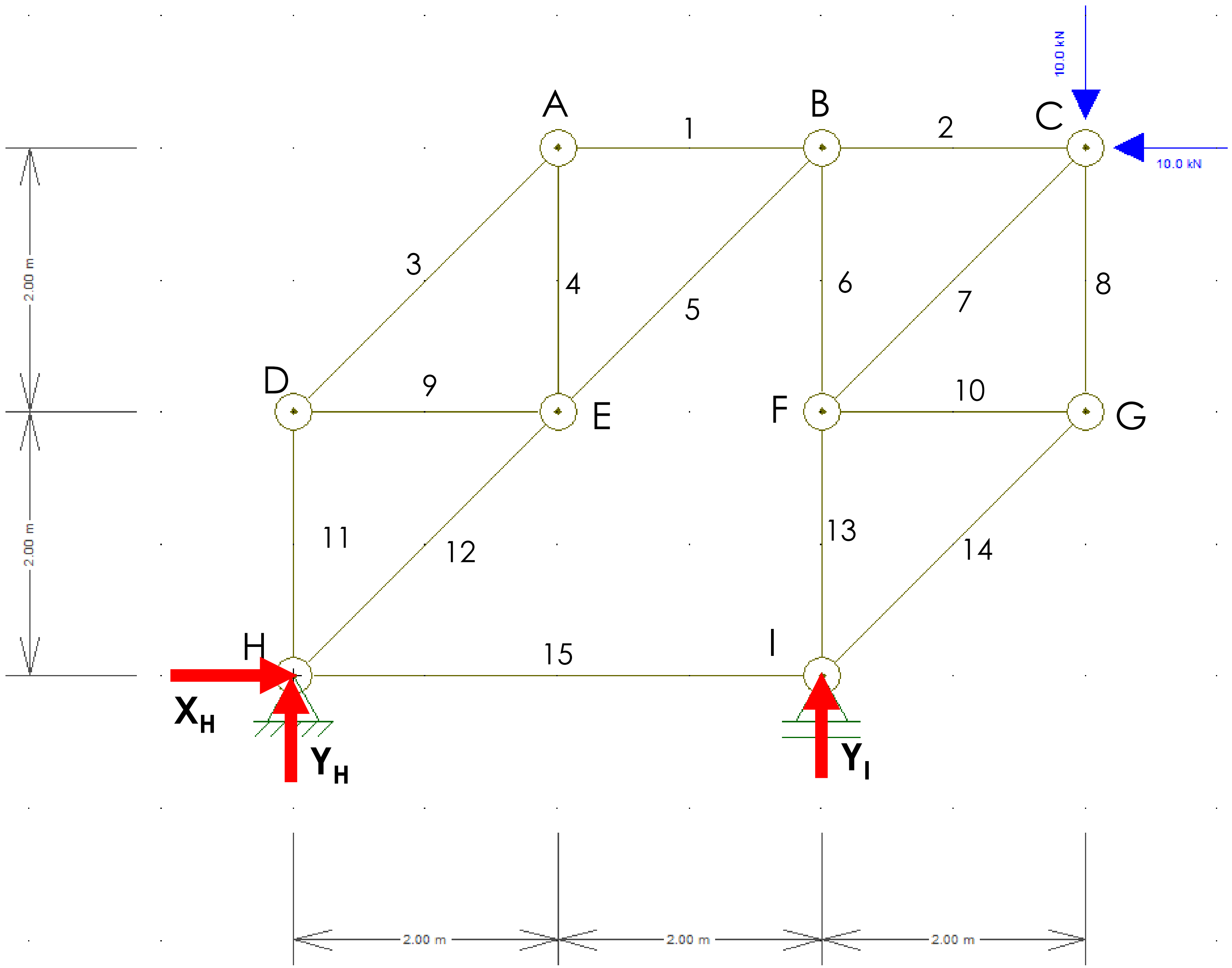
Para partes da estrutura:

$$\Sigma F_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0$$
$$\Sigma M_O = 0$$



Exemplo

Calcule os esforços nas barras 1, 5 e 15 da treliça ilustrada.



Reações de apoio

$\Sigma F_x = 0$

$X_H - 10 = 0$

$\mathbf{X_H = 10\ kN}$

$\Sigma M_H = 0$

$Y_I * 4 + 10 * 4 - 10 * 6 = 0$

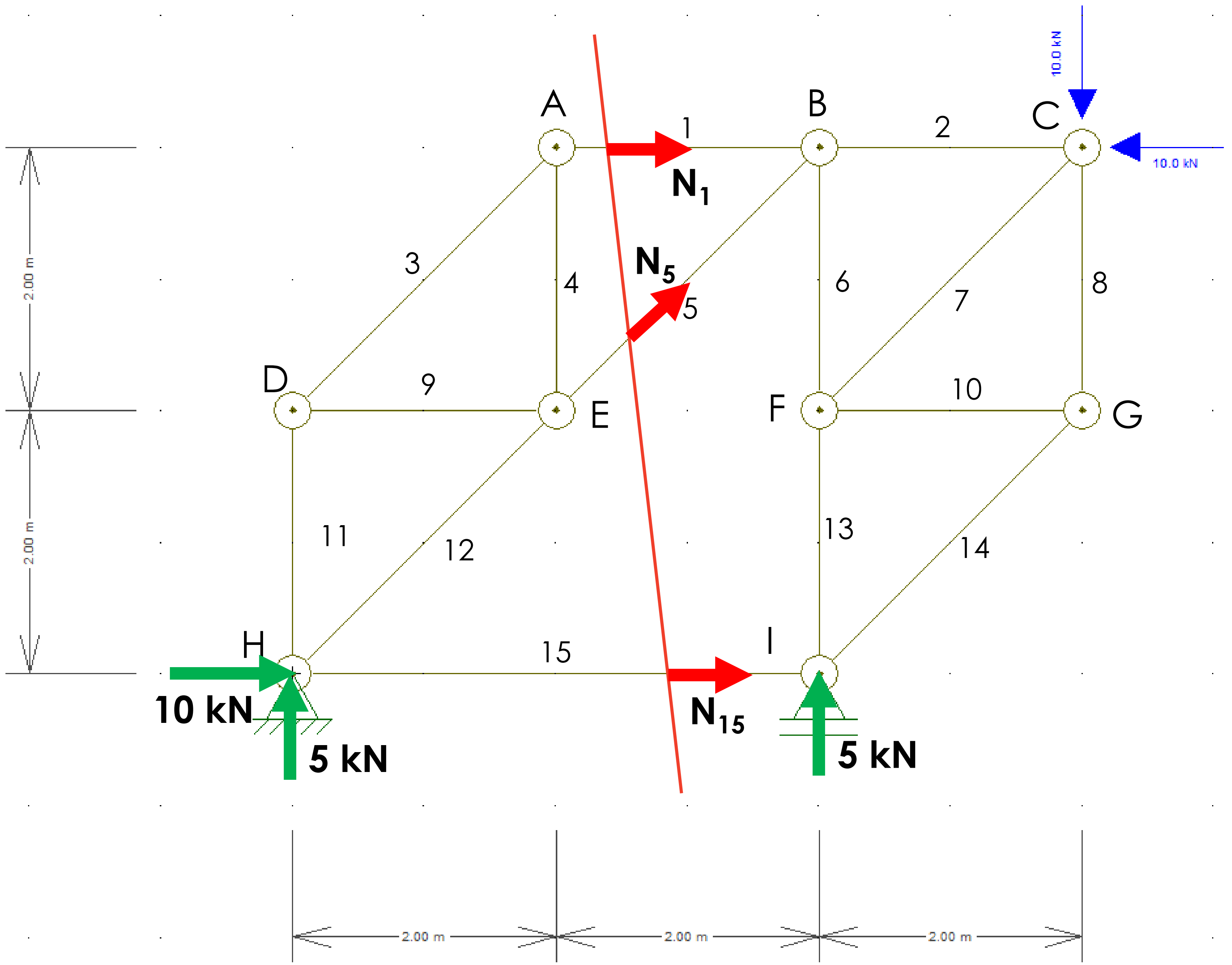
$\mathbf{Y_I = 5\ kN}$

$\Sigma F_y = 0$

$Y_H - 10 + Y_I = 0$

$Y_H - 10 + 5 = 0$

$\mathbf{Y_H = 5\ kN}$



Corte de Ritter

Equilíbrio da parte esquerda da treliça:

$\Sigma F_y = 0$

$N_5 * \text{sen}45 + 5 = 0$

$\mathbf{N_5 = -7{,}1\ kN}$

$\Sigma M_H = 0$

$- N_1 * 4 = 0$

$\mathbf{N_1 = 0}$

$\Sigma F_x = 0$

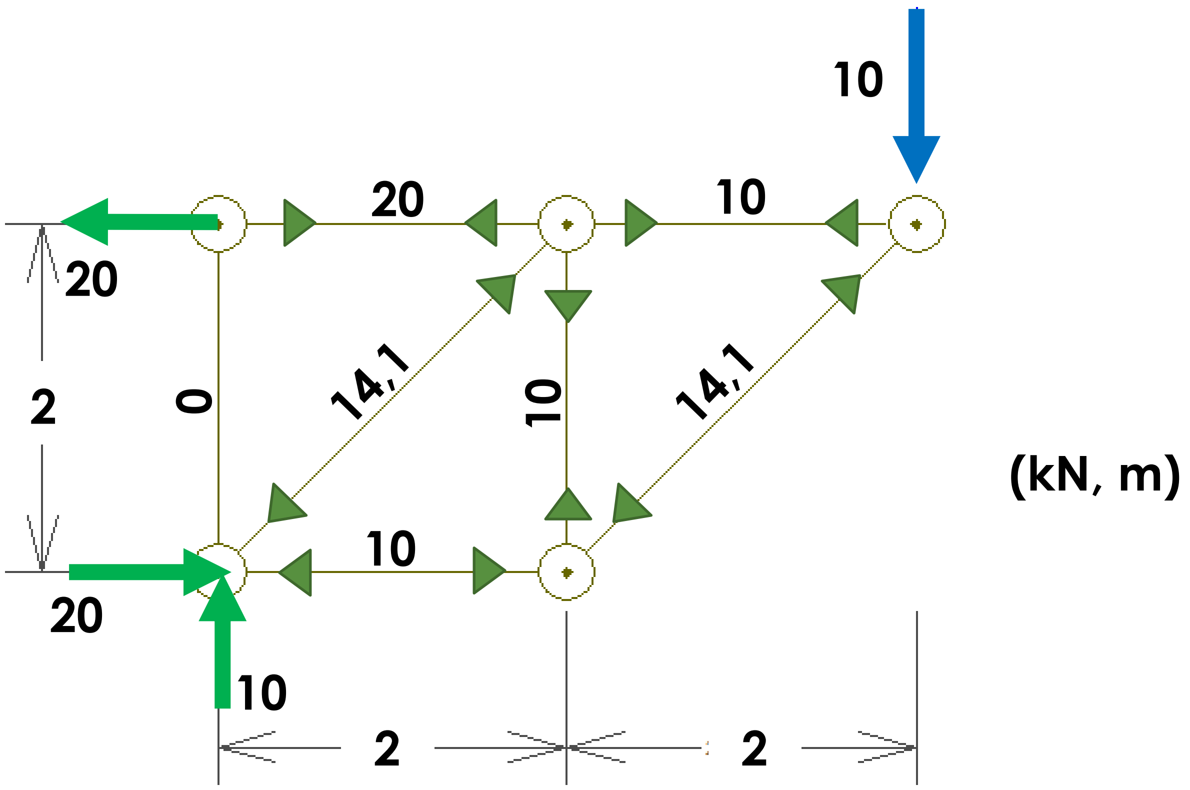
$N_1 + N_5 * \cos 45 + N_{15} + 10 = 0$

$0 - 7{,}1 * \cos 45 + N_{15} + 10 = 0$

$\mathbf{N_{15} = -5\ kN}$

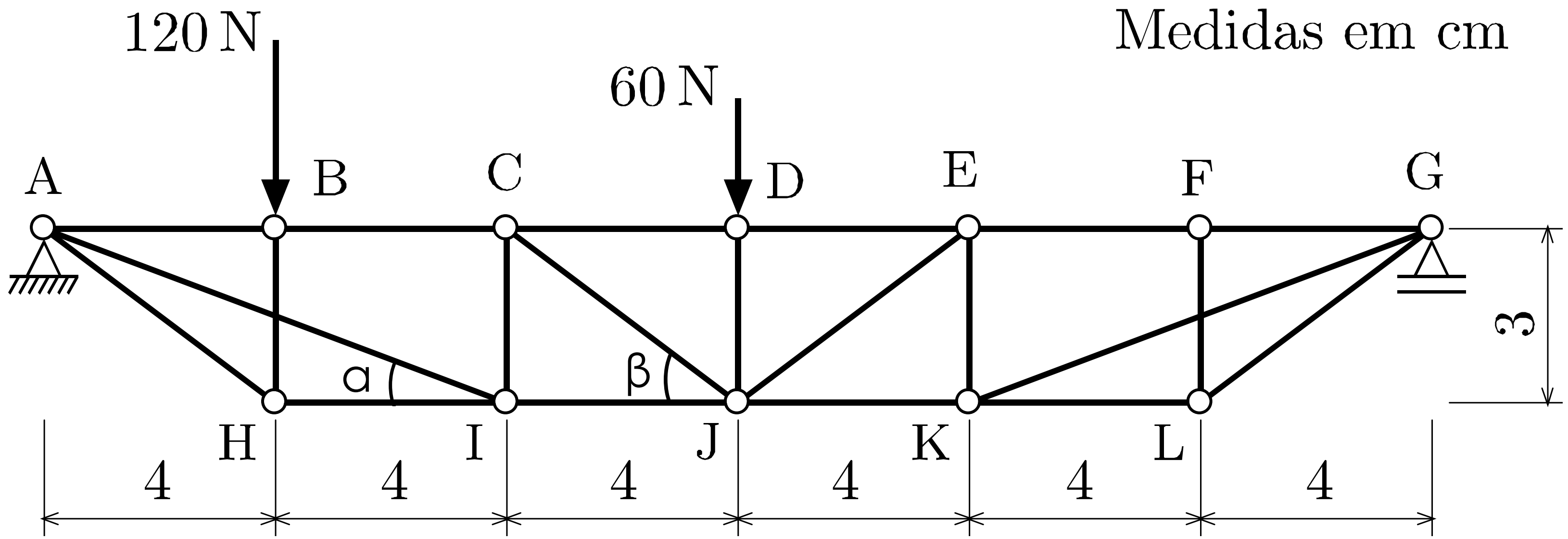
REPRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

- Existem diversas formas de representar os resultados da resolução de treliças, gráficas ou tabeladas
- Quando tabeladas, deve-se respeitar a convenção de sinal (N positivo = tração)
- Uma forma de representação que auxilia no entendimento intuitivo, na verificação visual e até na resolução, é a que segue:
  - Desenhe a treliça respeitando as proporções, como corpo livre, indicando apenas seus nós, barras e cotas
  - Indique ao lado da figura a unidade de força que será utilizada
  - Indique as forças externas ativas e reativas nos nós onde ocorrerem, com seu sentido físico e valor
  - Nas duas extremidades de cada barra, junto aos nós, indique pontas de setas que mostrem o sentido físico da força <u>aplicada no nó</u> (atenção: é comum ocorrer confusão neste ponto, pois o esforço no nó é inverso ao esforço na barra)
  - Junto à barra, indique o valor que corresponde à força normal com que está solicitada
  - Desta forma, é rápido e intuitivo ver e verificar o equilíbrio nó por nó
- Em casos simples, é possível acelerar a resolução do equilíbrio dos nós de forma segura através desta representação gráfica, com contas rápidas, apoiadas pelo entendimento físico dos sentidos e projeções das forças



Exemplo

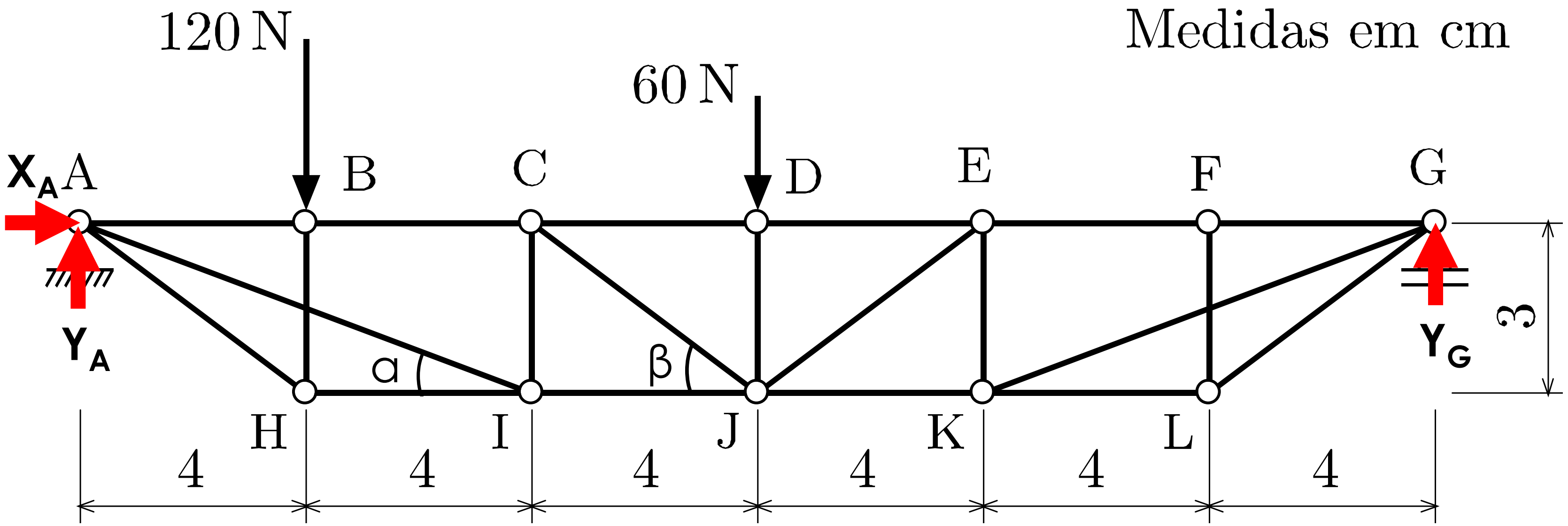
Representação dos resultados do exemplo do Método do Equilíbrio dos Nós.



Exemplo (P2 2019)

3ª Questão (3,0)

Na treliça plana da figura, o carregamento é formado por duas forças verticais aplicadas em B e D. Adotando senα = 0,4; cosα = 0,9; senβ = 0,6; cosβ = 0,8, determine a reação no apoio A e as forças normais nas barras AI e HI.



Reações em A

$\Sigma F_x = 0$

$\mathbf{X_A = 0}$

$\Sigma M_G = 0$

$- Y_A * 24 + 120 * 20 + 60 * 12 = 0$

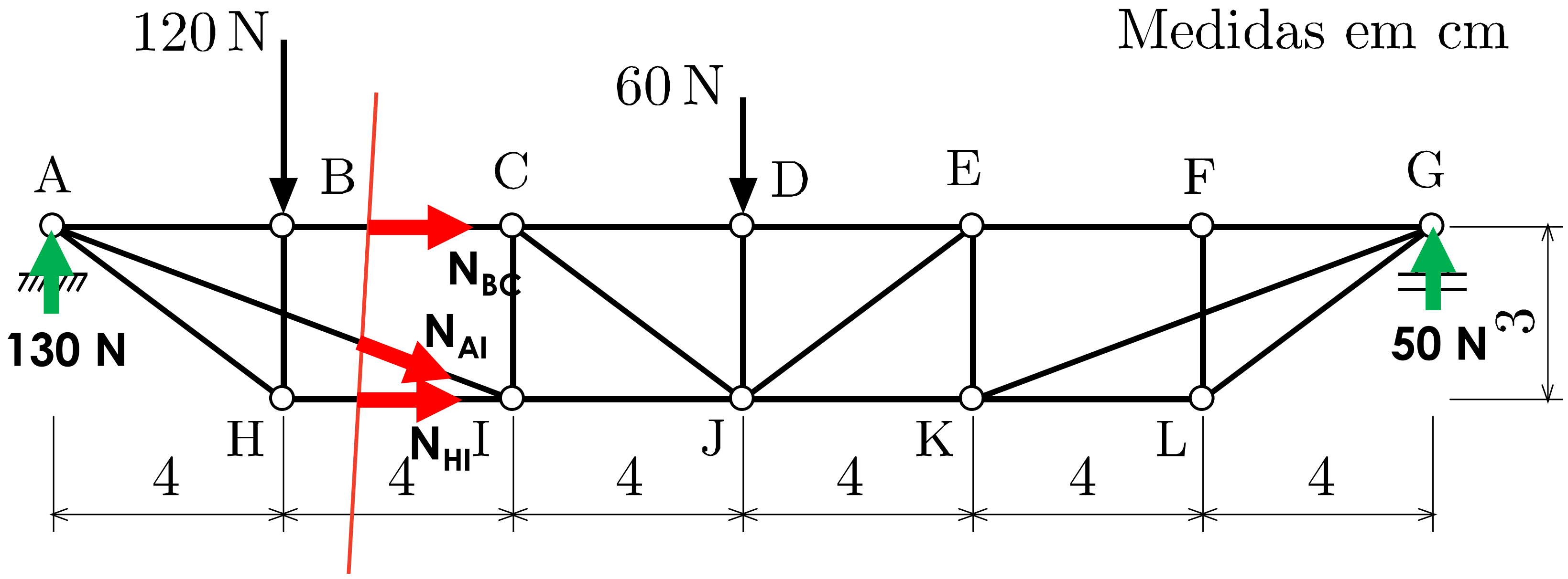
$\mathbf{Y_A = 130\ N}$

$\Sigma F_Y = 0$

$Y_G + Y_A - 120 - 60 = 0$

$Y_G + 130 - 120 - 60 = 0$

$\mathbf{Y_G = 50\ N}$



Corte de Ritter

Equilíbrio da parte esquerda da treliça:

$\Sigma F_y = 0$

$130 - 120 - N_{AI} * \text{sena} = 0$

$10 - N_{AI} * 0{,}4 = 0$

$\mathbf{N_{AI} = 25\ N}$

$\Sigma M_A = 0$

$N_{HI} * 3 - 120 * 4 = 0$

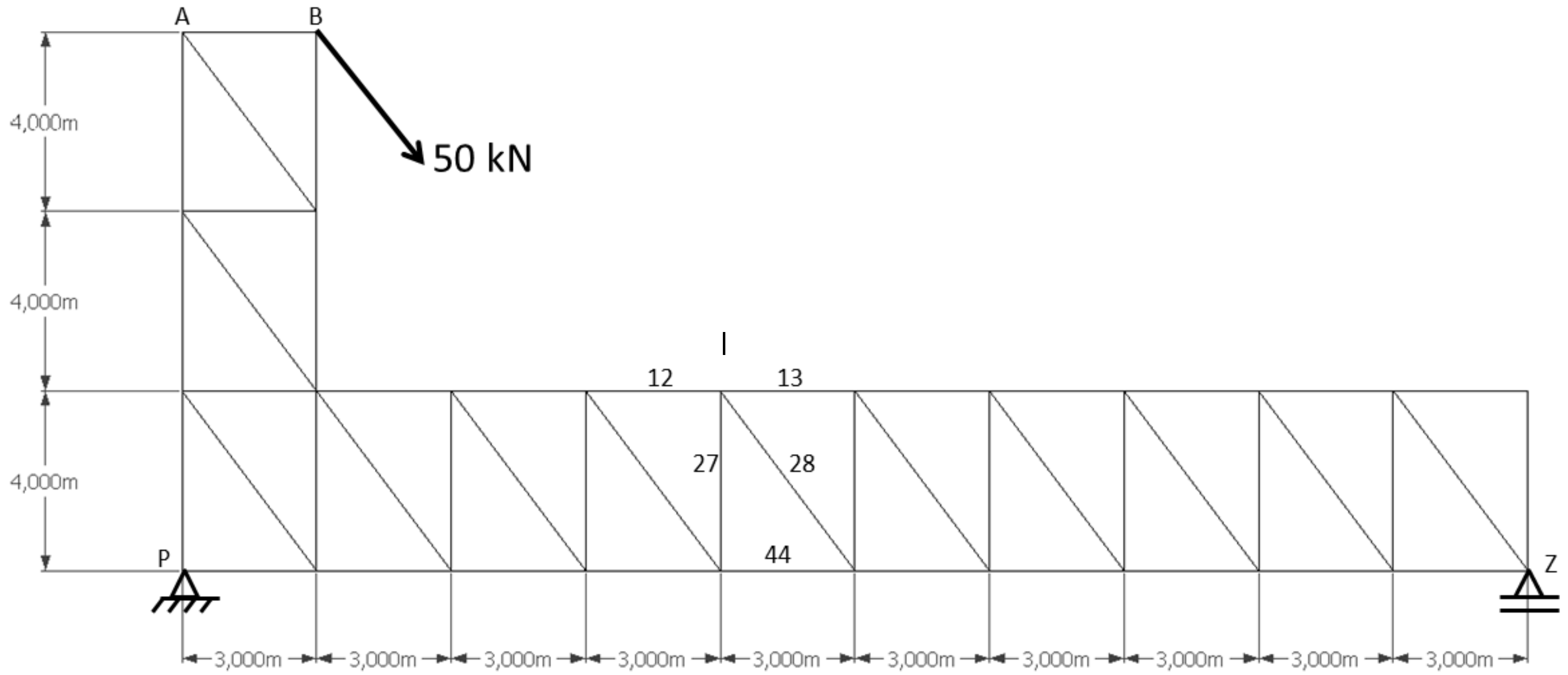
$\mathbf{N_{HI} = 160\ N}$

$\Sigma F_x = 0$

$N_{BC} + N_{AI} * \text{cosa} + N_{HI} = 0$

$N_{BC} + 25 * 0{,}9 + 160 = 0$

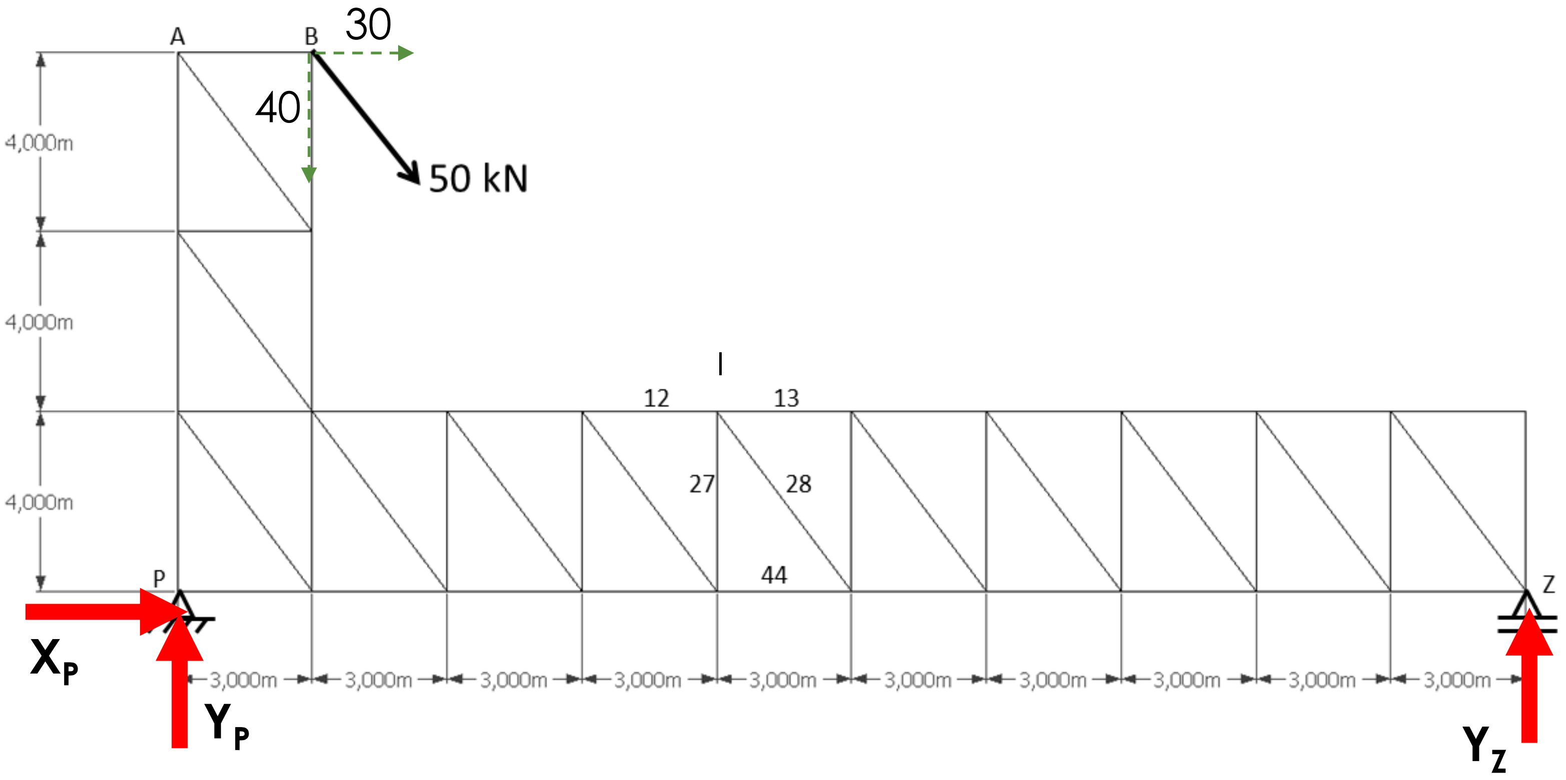
$\mathbf{N_{BC} = -\ 182{,}5\ kN}$



Exemplo (P2 2011)

2ª Questão (3,0 pontos)

Para a treliça da figura, calcule as forças normais nas barras 12, 13, 27, 28 e 44. A força de 50kN ilustrada está aplicada no ponto B e é paralela à barra 28.



Reações de apoio

$\Sigma M_P = 0$

$Y_Z * 30 - 30 * 12 - 40 * 3 = 0$

$\mathbf{Y_Z = 16\ kN}$

$\Sigma F_y = 0$

$Y_P - 40 + Y_Z = 0$

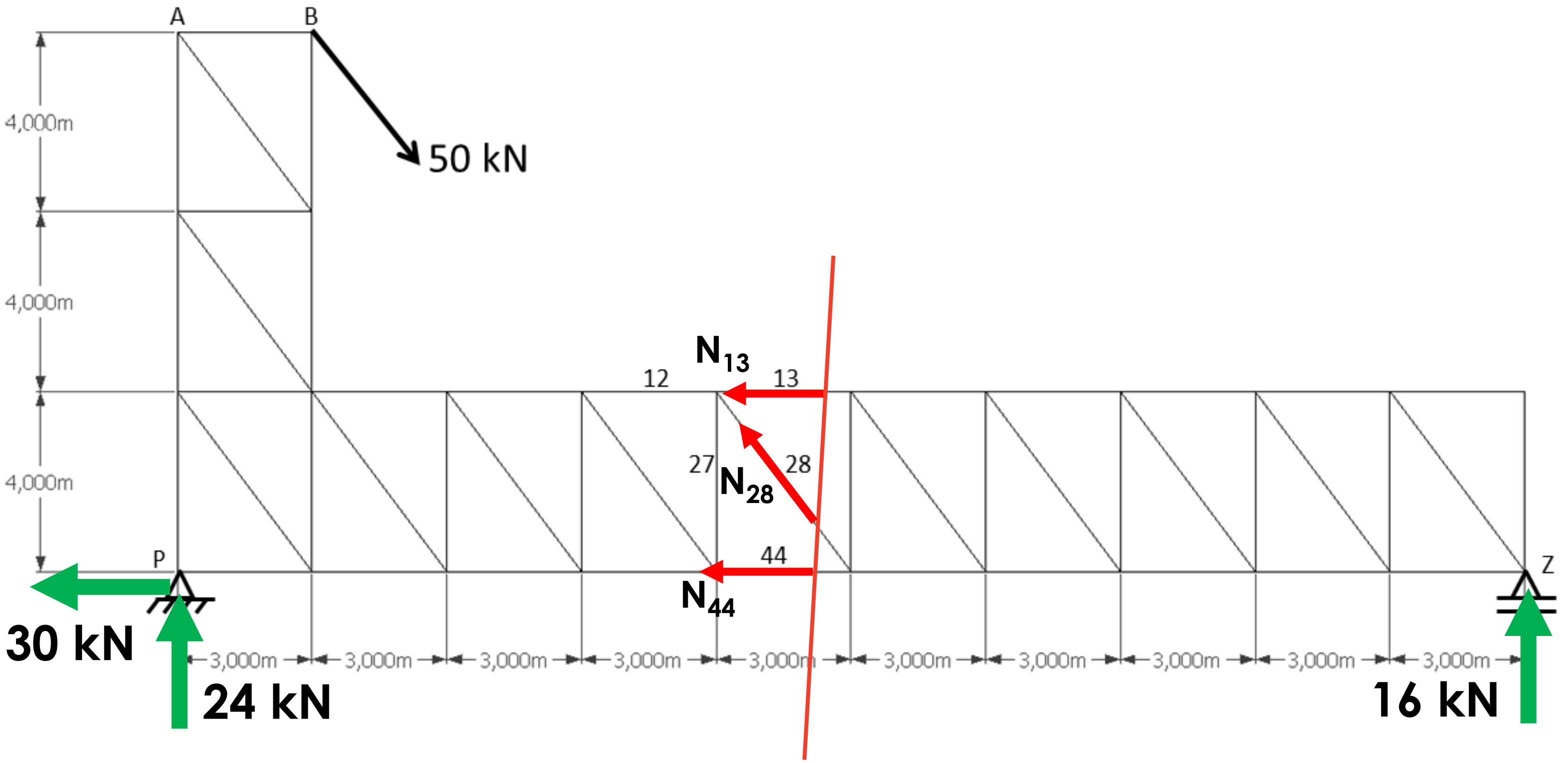
$Y_P - 40 + 16 = 0$

$\mathbf{Y_P = 24\ kN}$

$\Sigma F_x = 0$

$X_P + 30 = 0$

$\mathbf{X_P = -30\ kN}$



Corte de Ritter

Equilíbrio da parte direita da treliça:

$\Sigma F_y = 0$

$N_{28} * \text{sen}a + 16 = 0$

$N_{28} * 4/5 + 16 = 0$

$\mathbf{N_{28} = -20\ kN}$

$\Sigma M_I = 0$

$-N_{44} * 4 + 16 * 18 = 0$

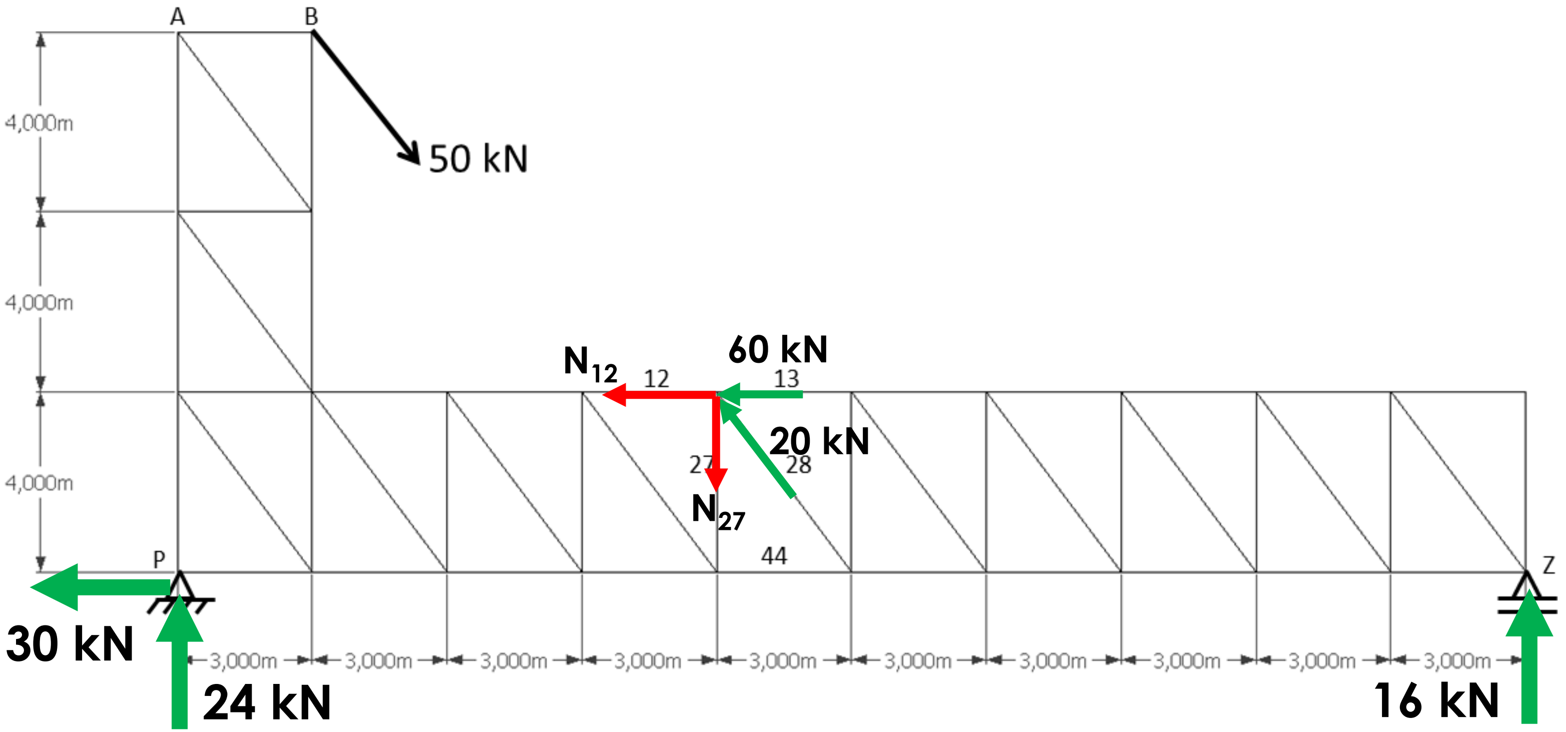
$\mathbf{N_{44} = 72\ kN}$

$\Sigma F_x = 0$

$-N_{13} - N_{28} * \cos a - N_{44} = 0$

$-N_{13} + 20 * 3/5 - 72 = 0$

$\mathbf{N_{13} = -60\ kN}$



Equilíbrio do nó I

$\Sigma F_y = 0$

$- N_{27} + 20 * \text{sen}a = 0$

$- N_{27} + 20 * 4/5 = 0$

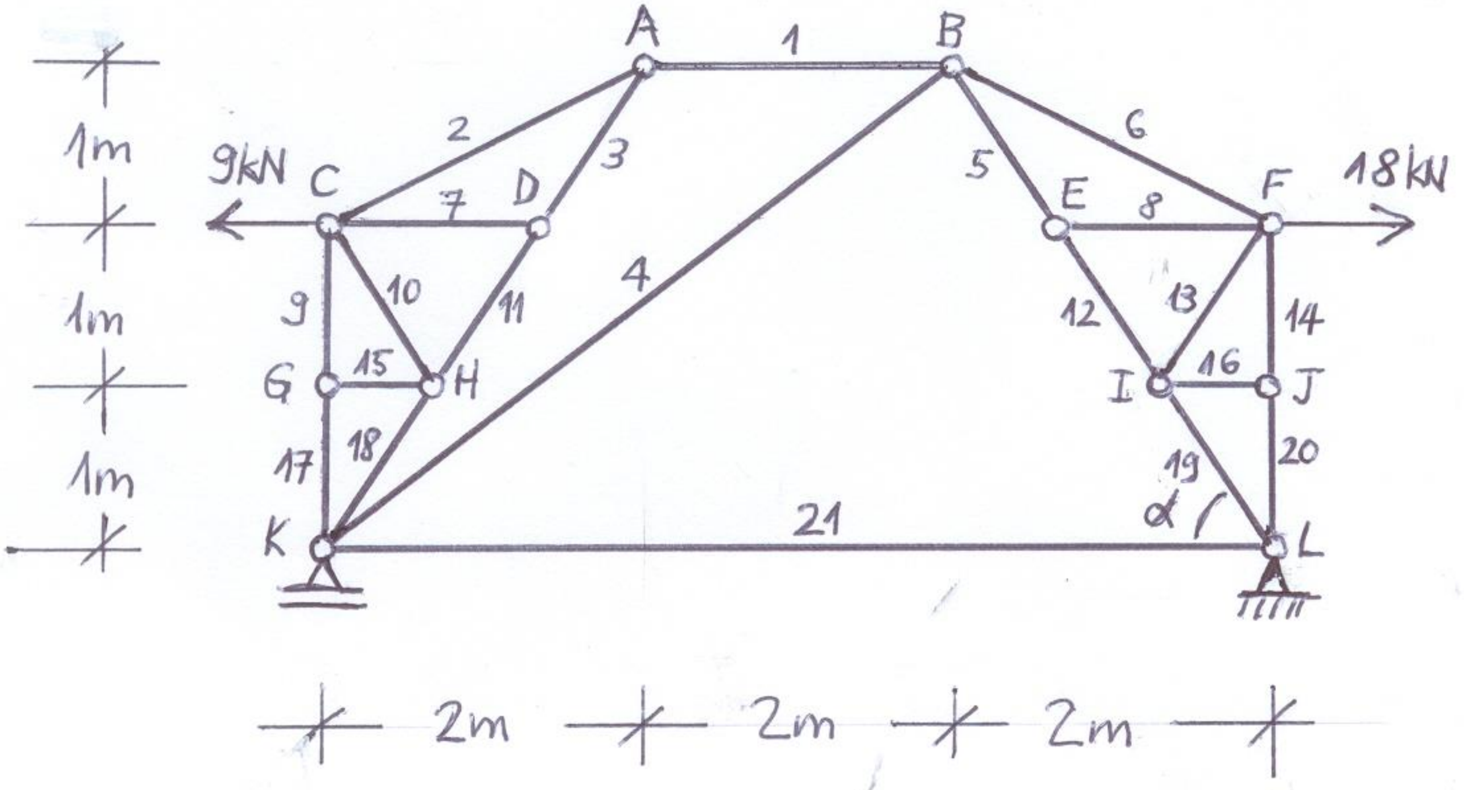
$\mathbf{N_{27} = 16\ kN}$

$\Sigma F_x = 0$

$- N_{12} – 20 * \cos a - 60 = 0$

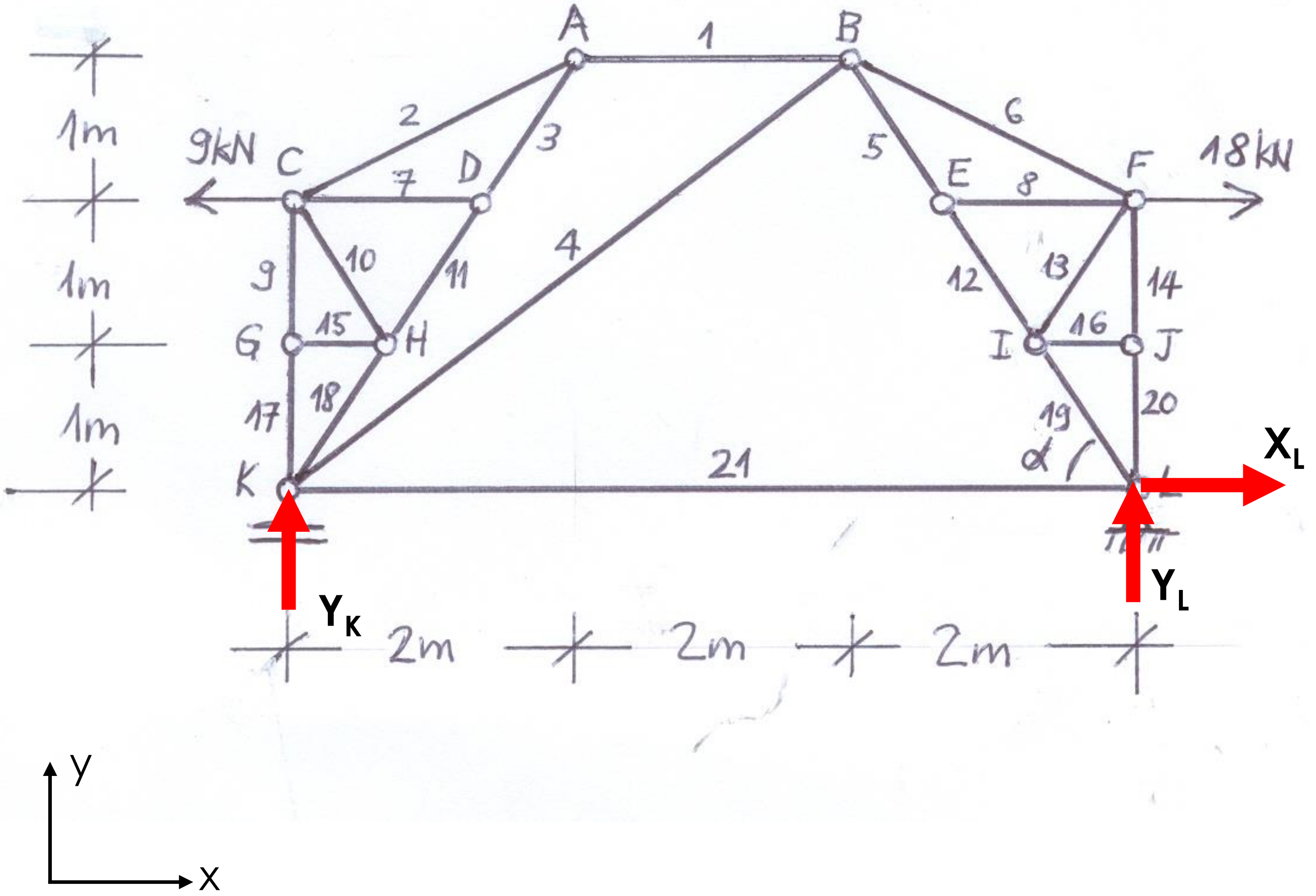
$- N_{12} - 20 * 3/5 - 60 = 0$

$\mathbf{N_{12} = -\ 72\ kN}$



Exemplo (P2 2006)

Questão 3 (3,0) Calcule os esforços nas barras 1, 19, 20 e 21 da treliça ilustrada. Dados: a=56,31˚, cosa=0,555; sena=0,832



14/04/2020

Reações de apoio

$\Sigma F_x = 0$

$X_L + 18 - 9 = 0$

$\mathbf{X_L = -9\ kN}$

$\Sigma M_K = 0$

$Y_L * 6 + 9 * 2 - 18 * 2 = 0$

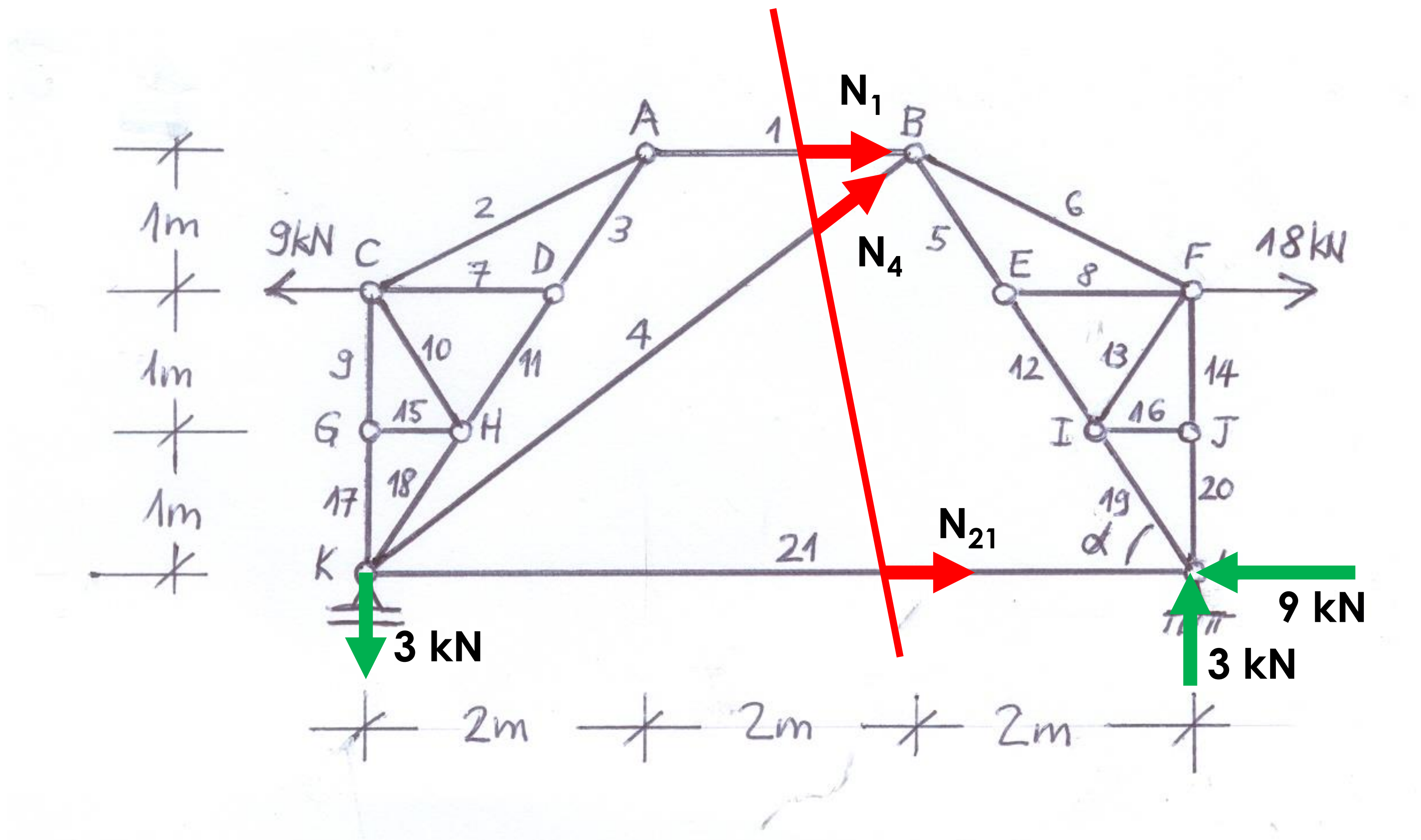
$\mathbf{Y_L = 3\ kN}$

$\Sigma F_y = 0$

$Y_K + Y_L = 0$

$Y_K + 3 = 0$

$\mathbf{Y_K = -3\ kN}$



Corte de Ritter

Equilíbrio da parte esquerda da treliça:

$\Sigma F_y = 0$

$N_4 * 3/5 – 3 = 0$

$\mathbf{N_4 = 5\ kN}$

$\Sigma M_K = 0$

$- N_1 * 3 + 9 * 2 = 0$

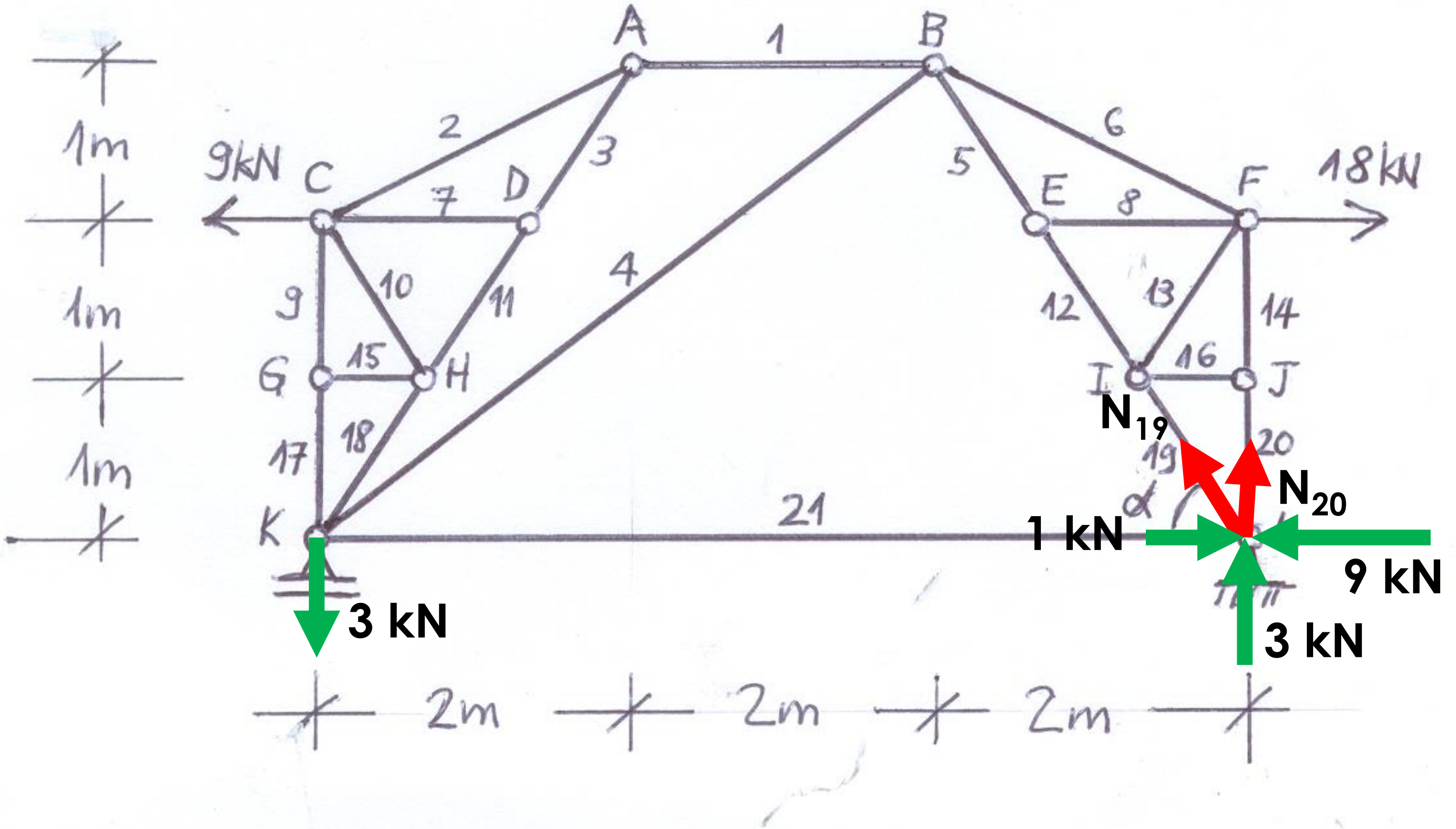
$\mathbf{N_1 = 6\ kN}$

$\Sigma F_X = 0$

$- 9 + N_1 + N_4 * 4/5 + N_{21} = 0$

$- 9 + 6 + 5 * 4/5 + N_{21} = 0$

$\mathbf{N_{21} = - 1\ kN}$



Equilíbrio do nó L

$\Sigma F_x = 0$

$- N_{19} * \cos a + 1 - 9 = 0$

$- N_{19} * 0{,}555 - 8 = 0$

$\mathbf{N_{19} = - 14{,}4\ kN}$

$\Sigma F_y = 0$

$3 + N_{19} * \operatorname{sen} a + N_{20} = 0$

$3 - 14{,}4 * 0{,}832 + N_{20} = 0$

$\mathbf{N_{21} = 9\ kN}$