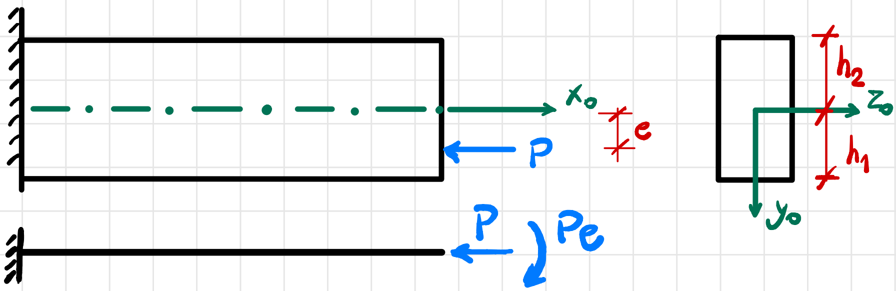
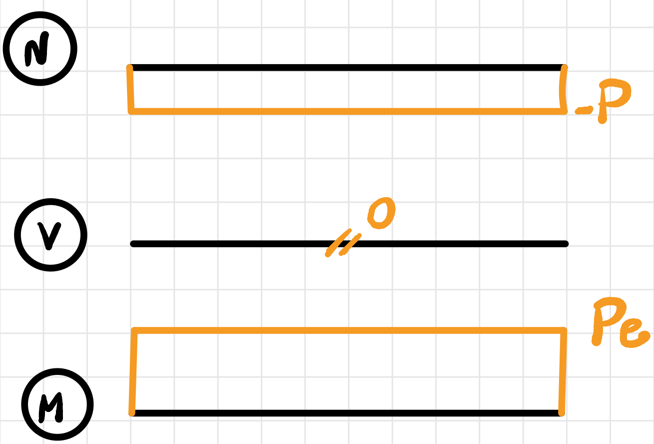
Flexão Normal Composta

Na flexão normal composta há esforços normais além de forças cortantes e momentos fletores não constantes. Mas qual o efeito da força normal na flexão?

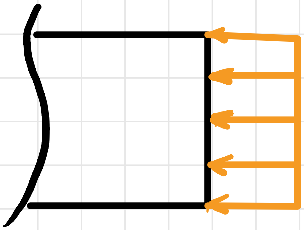
Considere uma força aplicada fora do baricentro da figura:



Os diagramas ficam:

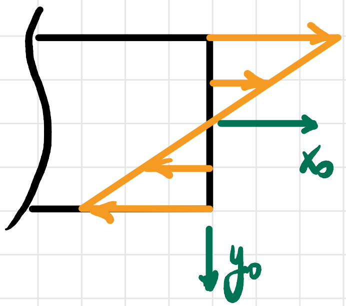


Se cada efeito fosse tratado em separado:



$$\sigma_N = -\frac{P}{A}$$

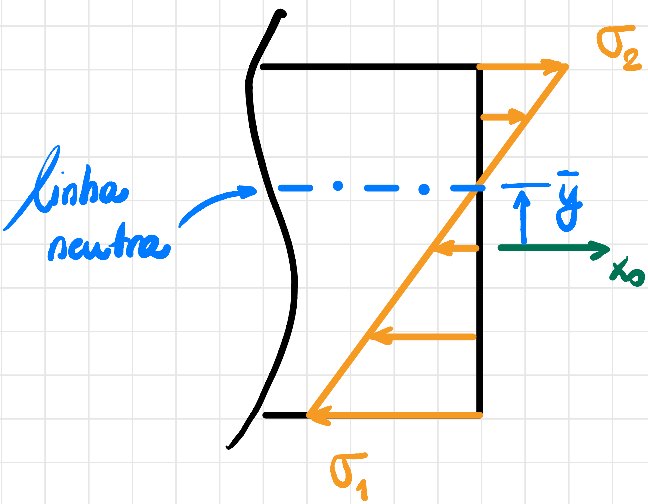
efeito da força normal



$$\sigma_M = \frac{Pe}{I_{x_0}}\, y$$

efeito do momento fletor

Como o problema é linear, é possível sobrepor os efeitos. Assim, a tensão fica:



$\boxed{\text{A linha neutra deixa de ser baricêntrica!}}$

A tensão total pode ser calculada por:

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M$$

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I_{z_0}} \cdot y}$$

Assim, para o exemplo:

$$\sigma_2 = -\frac{P}{A} + \frac{Pe}{I_{z_0}} \cdot h_2$$

$$\sigma_1 = -\frac{P}{A} - \frac{Pe}{I_{z_0}} \cdot h_1$$

Para obter a linha neutra:

$$\sigma = -\frac{P}{A} - \frac{Pe}{I_{z_0}} \bar{y} = 0 \longrightarrow \bar{y} = \frac{-I_{z_0}}{Ae}$$

ou usando semelhança de triângulos:

$$\frac{|\sigma_1|}{h_1 + \bar{y}} = \frac{\sigma_2}{h_2 - \bar{y}} = \frac{|\sigma_1| + \sigma_2}{h_1 + h_2}$$

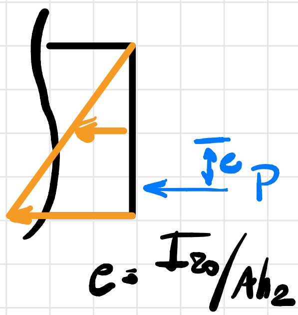
Já as condições de projeto:

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_C \le \sigma_1 \le \bar{\sigma}_T \\ \bar{\sigma}_C \le \sigma_2 \le \bar{\sigma}_T \end{cases}$$

* levar em conta os sinais!

Um caso particular interessante é o que exige que a estrutura esteja apenas sob compressão, ou seja, $\bar{\sigma}_T = 0$:

$$\sigma_2 \le 0 \rightarrow -\frac{P}{A} + \frac{Peh_2}{I_{z0}} \le 0$$

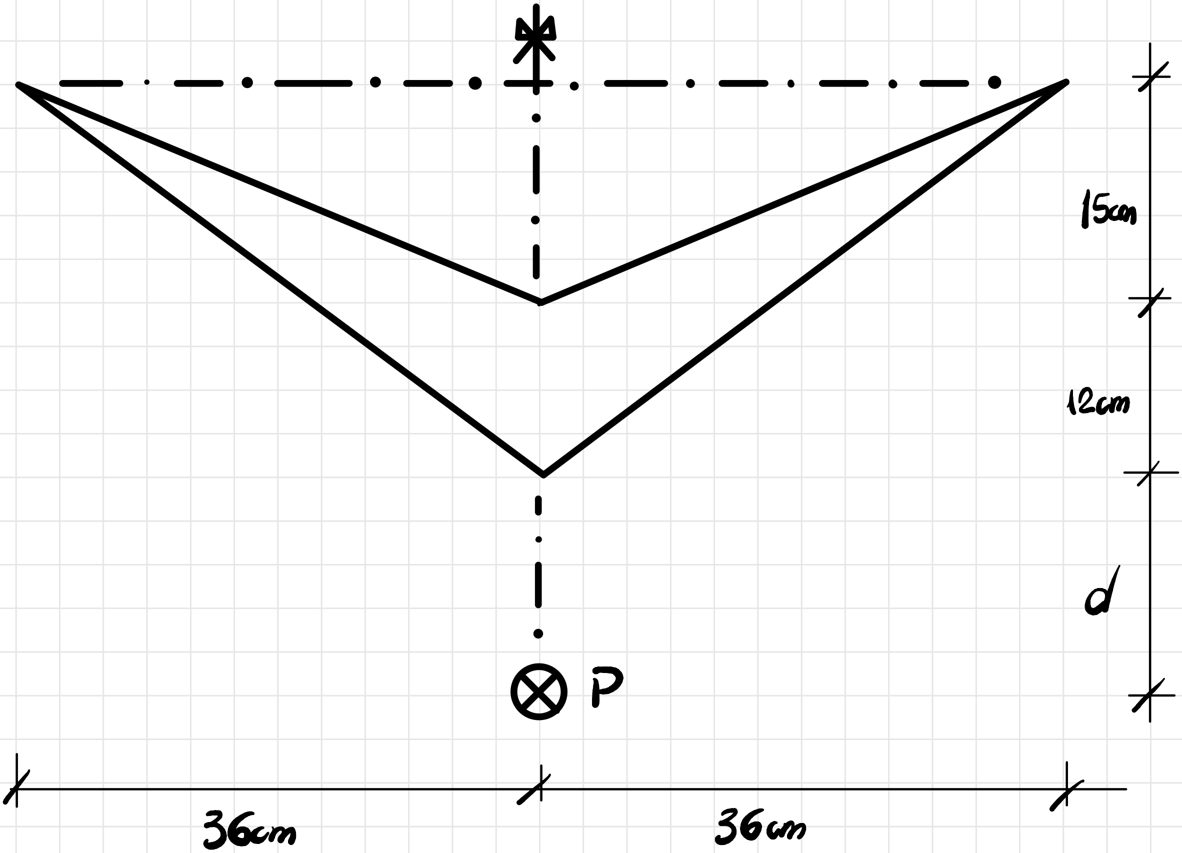


$$\therefore \boxed{e \le \frac{I_{z0}}{Ah_2}}$$

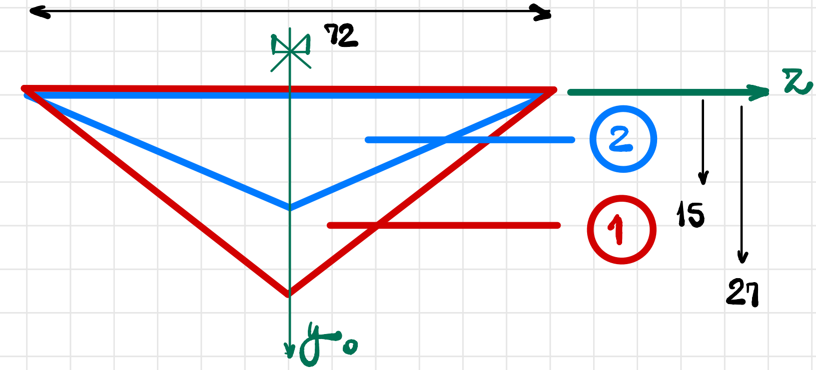
Se a seção for retangular $(b \times h)$, $A = bh$, $h_2 = h/2$ e $I_{z0} = bh^3/12$. Assim:

$$e \le \frac{bh^3/12}{bh \cdot h/2} \rightarrow \boxed{e \le h/6}$$

Exemplo: Para um pilar com a seção transversal dada a seguir, encontre 'd' de tal forma que as tensões de tração e compressão sejam iguais em módulo.



Cálculo das Propriedades



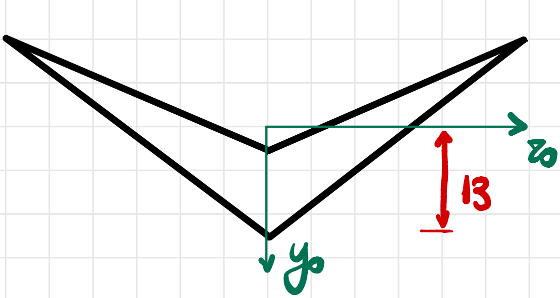
	y [cm]	A [cm²]	I_{z0} [cm⁴]	d [cm]	d²A [cm⁴]
1	5	540	6.750	9	43.740
2	9	972	39.366	5	24.300

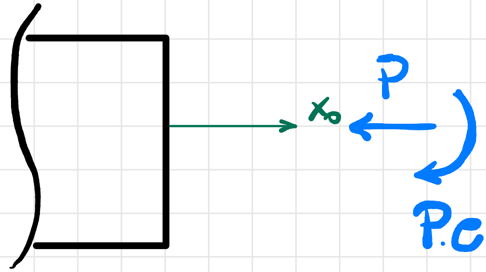
$$A = 972 - 540 = 432\,cm^2$$

$$y_G = \frac{9.972 - 5.540}{432} = 14\,cm$$

$$I_{z0} = (39366 + 24300) - (6750 + 43740)$$

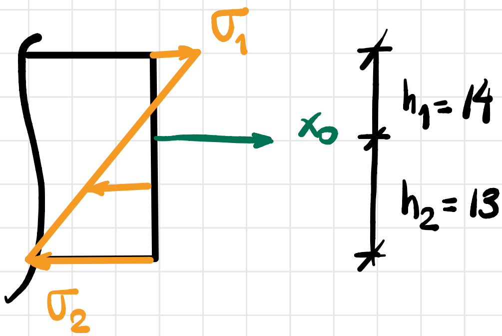
$$I_{z0} = 13.176\,cm^4$$





$$\underline{e = d + 13}$$

A tensão fica:



com $N = -P$ e
$M = -Pe$

$$\sigma_1 = -\frac{P}{A} - \frac{Pe}{I_{z_0}}(-h_1) = \frac{Peh_1}{I_{z_0}} - \frac{P}{A}$$

$$\sigma_2 = -\frac{P}{A} - \frac{Pe}{I_{z_0}}(h_2) = -\left(\frac{Peh_2}{I_{z_0}} + \frac{P}{A}\right)$$

Supondo que haja tração e compressão:

$$\sigma^T = \sigma_1 \quad e \quad \sigma^C = \sigma_2$$

Para que tração e compressão sejam iguais em módulo:

$$|\sigma^T| = |\sigma^C| \longrightarrow |\sigma_1| = |\sigma_2|$$

$$\underbrace{\left|\frac{Peh_1}{I_{z0}} - \frac{P}{A}\right|}_{\text{número positivo}} = \left|\underbrace{-\left(\frac{Peh_2}{I_{z0}} + \frac{P}{A}\right)}_{\text{número negativo}}\right|$$

$$\frac{\cancel{P}eh_1}{I_{z0}} - \frac{\cancel{P}}{A} = \frac{\cancel{P}eh_2}{I_{z0}} + \frac{\cancel{P}}{A}$$

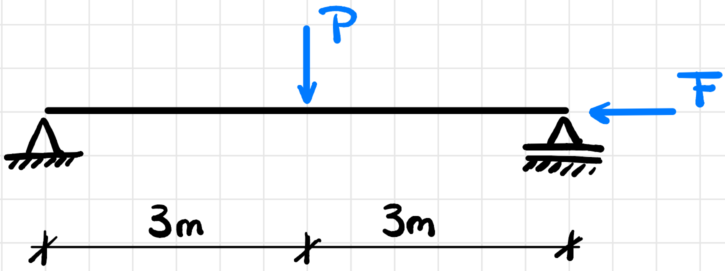
$$\frac{e}{I_{z0}}(h_1 - h_2) = \frac{2}{A} \longrightarrow e = \frac{2 I_{z0}}{A(h_1 - h_2)}$$

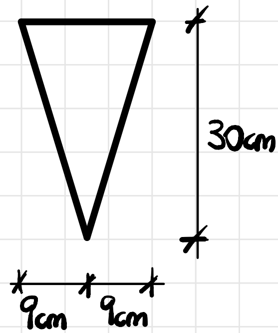
$$e = \frac{2 . 13176}{432.(14-13)} \longrightarrow e = 61cm$$

Como $d = e - 13$:

$$\boxed{d = 48cm}$$

Exemplo: Achar a força F que permite aplicar a maior força P possível. Calcular este maior valor de P.

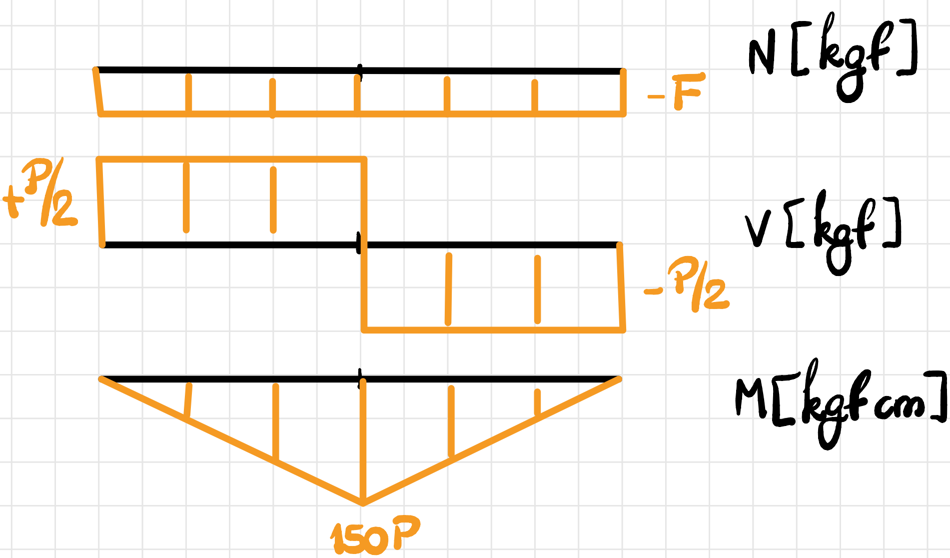


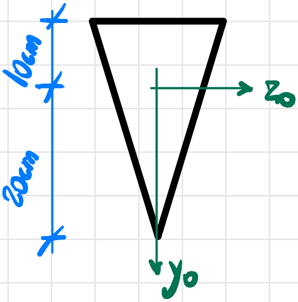


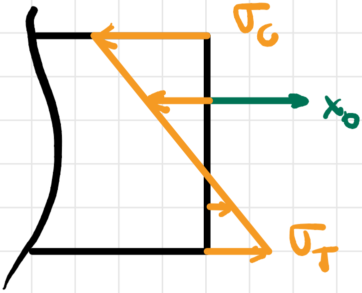
Dados $\begin{cases} \bar{\sigma}_T = 800 \text{ kgf/cm}^2 \\ \bar{\sigma}_c = 1100 \text{ kgf/cm}^2 \end{cases}$

Para F = 0, quanto vale $P_{máx}$?

Diagramas







$A = 270\,cm^2$

$I_{z_0} = 13.500\,cm^4$

As tensões nos extremos ficam:

$$\sigma_T = -\frac{F}{270} + \frac{150P}{13500}\cdot 20 \longrightarrow \sigma_T = \frac{2}{9}P - \frac{F}{270}$$

$$\sigma_c = -\frac{F}{270} + \frac{150P}{13500}\cdot(-10) \longrightarrow \sigma_c = -\frac{P}{9} - \frac{F}{270}$$

Impondo os limites:

$$\sigma_T \leq \bar{\sigma}_T \longrightarrow 2/9\,P - F/270 \leq 800$$

$$\therefore\ 60P - F \leq 216.000$$

$$|\sigma_c| \leq \bar{\sigma}_c \longrightarrow P/9 + F/270 \leq 1100$$

$$\therefore\ 30P + F \leq 297.000$$

O máximo dos carregamentos ocorre se ambos os limites são atingidos:

$$\begin{cases} 60P - F = 216000 \\ 30P + F = 297000 \end{cases}$$

$$90P = 513000 \longrightarrow \underline{P_{máx} = 5700\,kgf}$$

$$e \quad \underline{F = 126000\,kgf.}$$

Para o caso de $F=0$, tem-se:

$$60P \leq 216000 \quad e \quad 30P \leq 297000$$

$$P \leq 3600\,kgf. \qquad P \leq 9900\,kgf.$$

Ou seja, para $F=0$, $\underline{P_{máx} = 3600\,kgf.}$