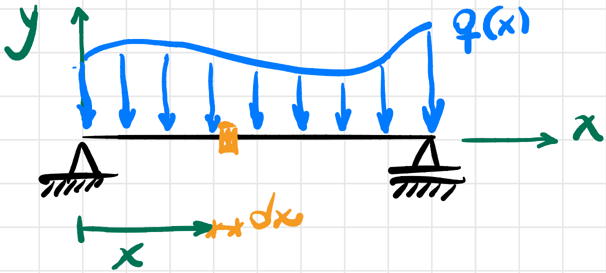
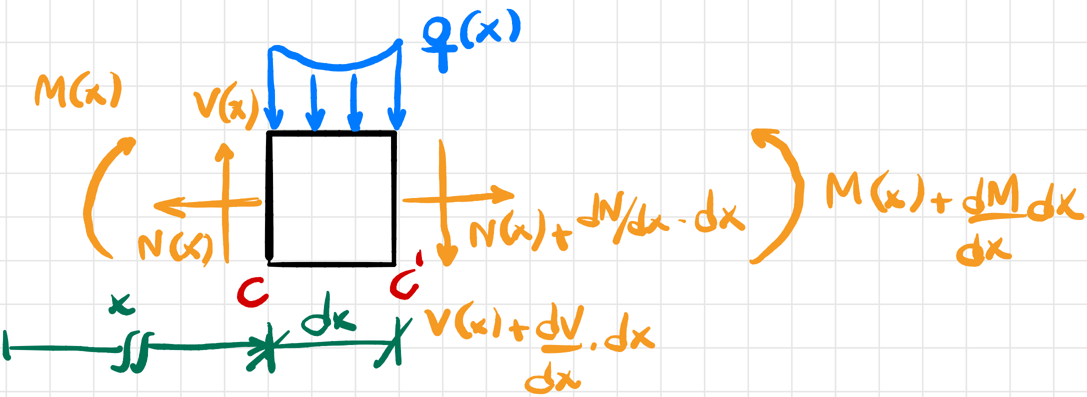
Equações Diferenciais de Equilíbrio

Como são os diagramas de esforços solicitantes quando há cargas distribuídas nas vigas?



Considere um elemento infinitesimal:



Fazendo o equilíbrio de forças na direção y e o equilíbrio de momentos:

$$\sum F_y = 0: \ \cancel{V(x)} - q(x).dx - \left(\cancel{V(x)} + \frac{dV}{dx}.dx\right) = 0$$

$$-q(x)dx - \frac{dV}{dx}.dx = 0 \iff \boxed{\frac{dV}{dx} = -q(x)} \quad (\mathrm{I})$$

$$(+)\sum M_{C'} = 0: \left(\cancel{M(x)} + \frac{dM}{dx}.dx\right) - \cancel{M(x)} - V(x)dx +$$

$$+ q(x)\,dx.\frac{dx}{2} = 0$$

desprezível

$$\frac{dM}{dx}.dx - V(x)dx = 0 \iff \boxed{\frac{dM}{dx} = V(x)} \quad (\mathrm{II})$$

Derivando II:

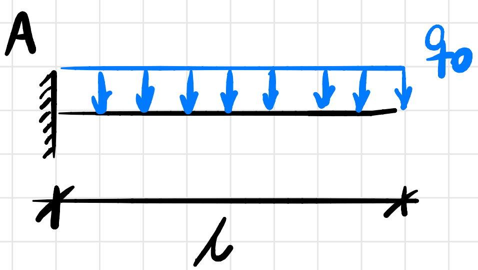
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dM}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(V(x)\right) \Rightarrow \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dV}{dx}$$

E substituindo I:

$$\boxed{\frac{d^2M}{dx^2} = -q(x)}$$

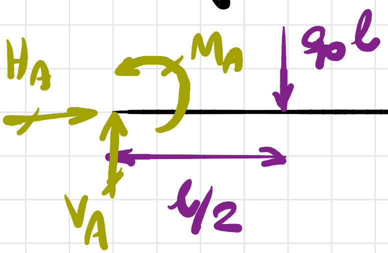
equação diferencial do equilíbrio.

Exemplo:



Solução:

1. Reações de apoio:



$$\sum F_H = 0: \quad \boxed{H_A = 0}$$

$$\sum F_V = 0: \quad \boxed{V_A = q_0 l}$$

$$\sum M_{(A)} = 0: \quad M_A - q_0 l \cdot l/2 = 0$$

$$\boxed{M_A = \frac{q_0 l^2}{2}}$$

2. Usando a equação diferencial de equilíbrio:

$$q(x) = q_0$$

Como $dV/dx = -q(x)$, então:

$$\frac{dV}{dx} = -q_0$$

Integrando:

$$V(x) = \int -q_0 \, dx = -q_0 x + C_1$$

Como condição de contorno, tem-se:

$$V(0) = V_A = q_0 \ell$$ atenção no sinal!

E assim:

$$V(0) = -q_0 \cdot 0 + C_1 = q_0 \ell \quad \therefore \quad C_1 = q_0 \ell$$

Logo:

$$\boxed{V(x) = q_0(\ell - x)}$$

Agora, $dM/dx = V(x)$. Então:

$$\frac{dM}{dx} = q_0\ell - q_0 x$$

Integrando:

$$M(x) = \int (q_0\ell - q_0 x)\,dx = q_0 \ell x - \frac{q_0 x^2}{2} + C_2$$

Como condições de contorno tem-se:

$$M(0) = -M_A = -q_0\ell/2$$ atenção ao sinal!

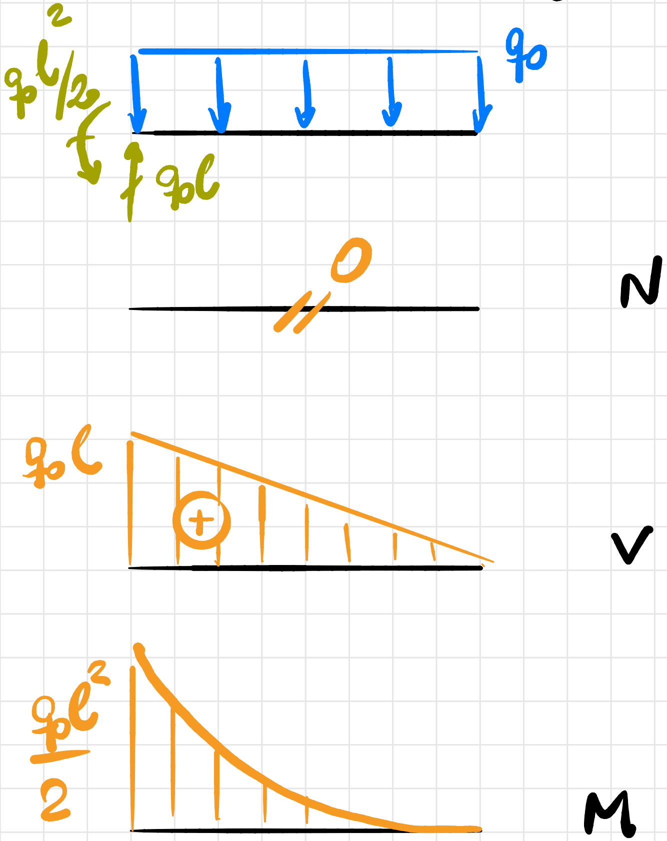
Assim:

$$M(0) = q_0\ell \cdot 0 - \frac{q_0}{2} \cdot 0^2 + C_2 = -\frac{q_0\ell}{2} \therefore C_2 = -\frac{q_0\ell}{2}$$

A expressão do momento fica:

$$\boxed{M(x) = q_0\left(-\frac{x^2}{2} + lx - \frac{l^2}{2}\right)}$$

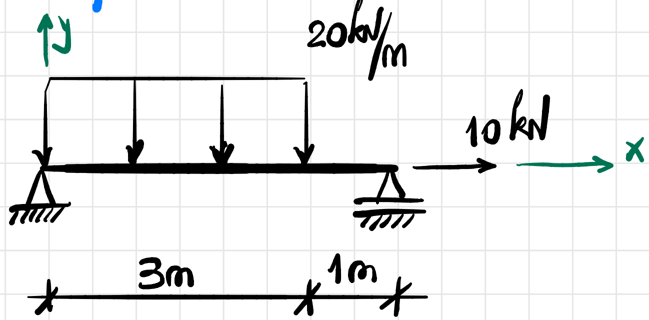
E traçando os diagramas:

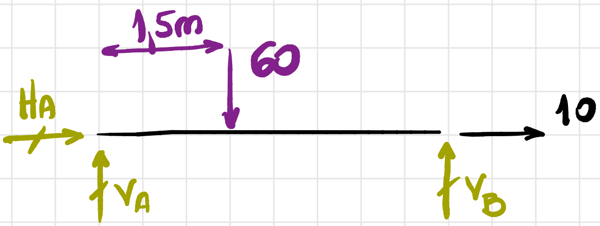


$-\frac{dM}{dx} = V = 0$

- concavidade dada pelo sinal de $q(x)$

Exemplo 2:





$$\sum F_x = 0: \quad H_A + 10 = 0 \Rightarrow \boxed{H_A = -10\,kN}$$

$$\sum F_y = 0: \quad V_A + V_B = 60$$

$$\circlearrowleft(+) \sum M_A = 0: \quad -60 \cdot 1{,}5 + V_B \cdot 4 = 0 \Rightarrow 4V_B = 90$$

$$\boxed{V_B = 22{,}5\,kN} \Longrightarrow \boxed{V_A = 37{,}5\,kN}$$

Procedendo como anteriormente até o final da carga distribuída:

$$q(x) = 20$$

$$\frac{dV}{dx} = -20 \quad , \quad V(0) = V_A = +37{,}5$$

$$V(x) = -20x + C_1 \Rightarrow \boxed{V(x) = 37{,}5 - 20x}$$

$$\frac{dM}{dx} = 37{,}5 - 20x, \quad M(0) = 0$$

$$M(x) = 37{,}5x - 10x^2 + C_2 \Rightarrow \boxed{M(x) = 37{,}5x - 10x^2}$$

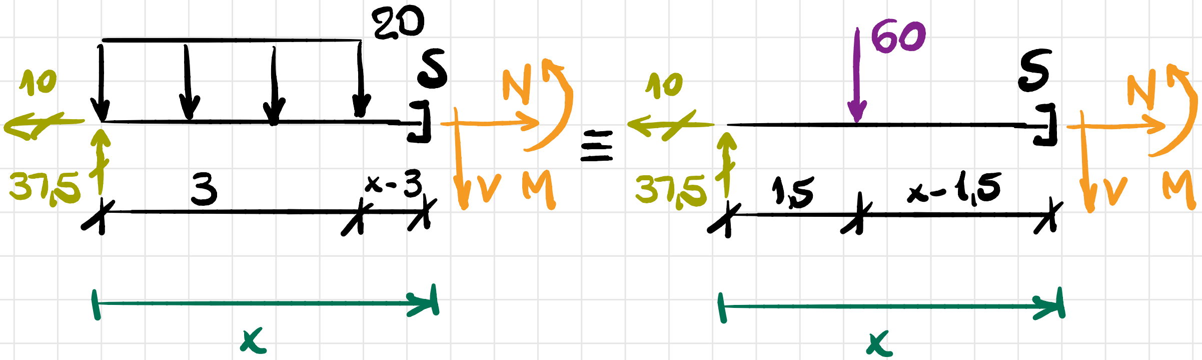
Encontrando o ponto de máximo/mínimo:

$$\frac{dM}{dx} = V(\bar{x}) = 0 \Rightarrow 37{,}5 - 20\bar{x} = 0$$

$$\therefore \underline{\underline{\bar{x} = 1{,}88m}}$$

$$\underline{\underline{M(\bar{x}) = 35{,}16 \, kNm}}$$

Fazendo um corte após a carga distribuída:



$$\sum F_x = 0: \quad N - 10 = 0 \Rightarrow \boxed{N = 10\,kN}$$

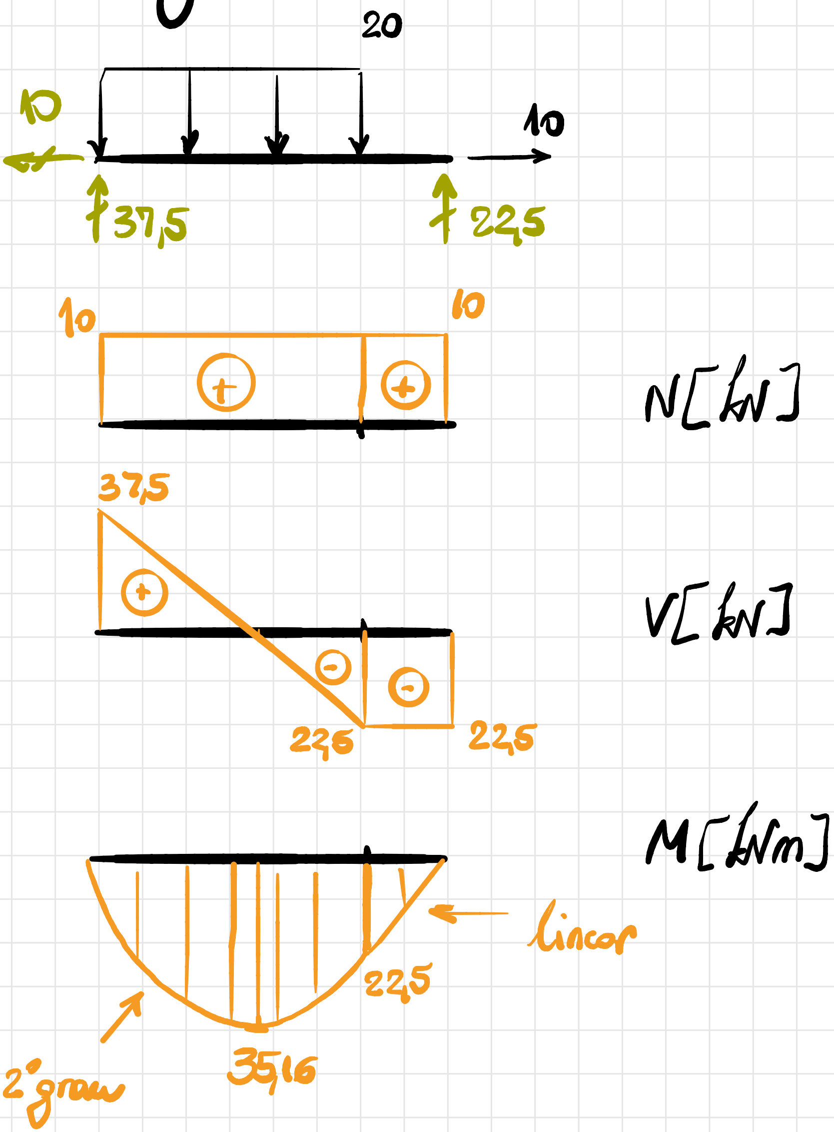
$$\sum F_y = 0: \quad 37{,}5 - 60 - V = 0 \Rightarrow \boxed{V = -22{,}5\,kN}$$

$$\circlearrowleft + \sum M_S = 0: \quad M - 37{,}5x + 60(x - 1{,}5) = 0$$

$$\boxed{M = -22{,}5x + 90}$$

* essas expressões são válidas para x entre 3 e 4 m.

Diagramas:

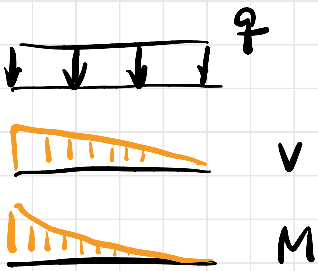


nota: não há descontinuidades no diagrama!
há uma mudança no grau das curvas!

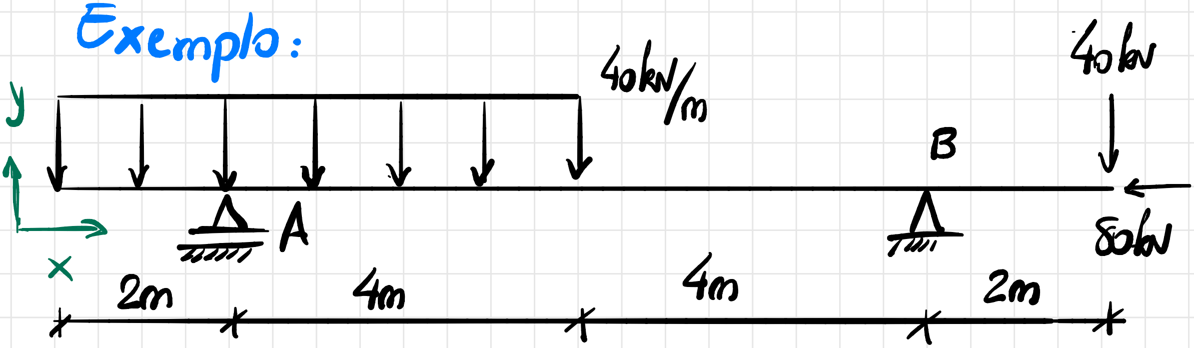
Método Gráfico

Conhecendo a equação diferencial de equilíbrio, é possível construir os diagramas de maneira direta, sem fazer os equilíbrios (para cargas distribuídas lineares, recomenda-se fazer via equação para o trecho específico).

- Força normal: se traciona $N>0$, se comprime $N<0$
- Força cortante: se tende girar a estrutura no horário $V>0$ e $V<0$ caso contrário. Vigas retas: "elevador"
- Momento: variação dada pela área do gráfico da força cortante; desenhar sempre do lado tracionado.



Exemplo:



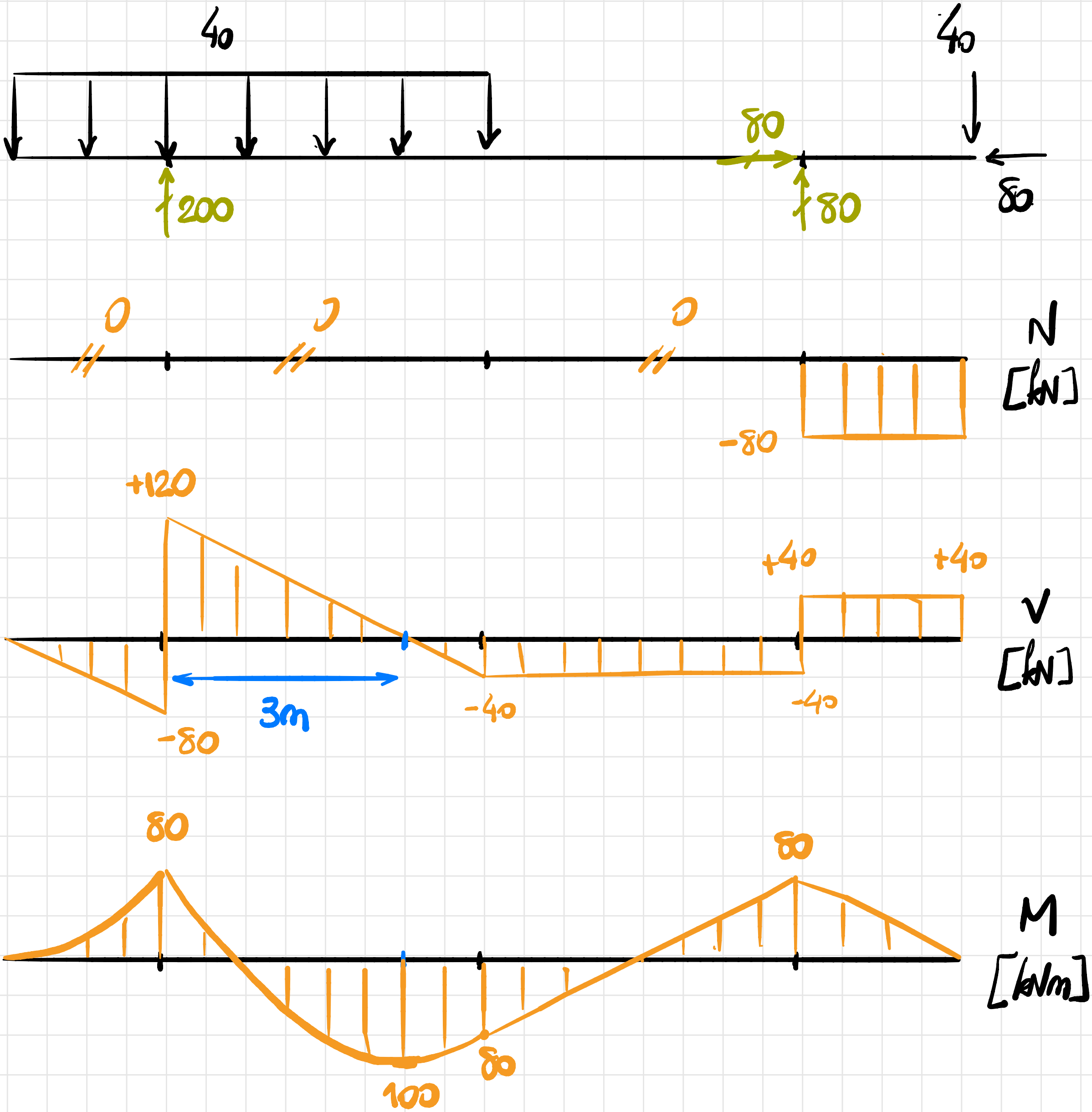
$$\sum F_H = 0: \; H_B - 80 = 0 \Rightarrow \boxed{H_B = 80\,kN}$$

$$\sum F_V = 0: \; V_A - 240 + V_B - 40 = 0 \Rightarrow V_A + V_B = 280$$

$$\circlearrowleft{+} \sum M_A = 0: \; -240.1 + V_B.8 - 40.10 = 0$$

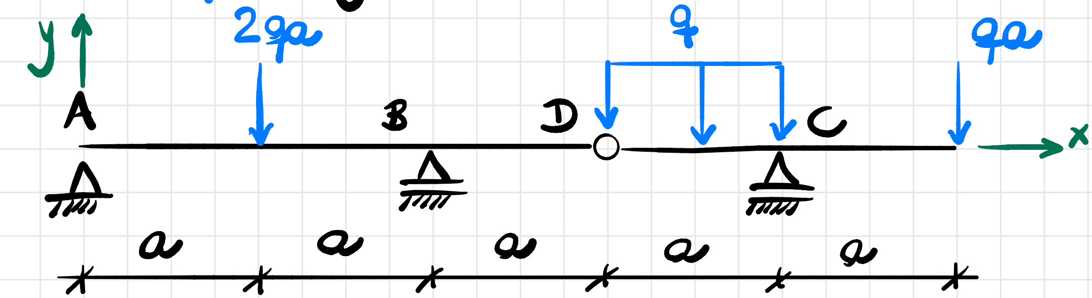
$$8V_B = 640 \Rightarrow \boxed{V_B = 80\,kN}$$

$$\therefore \; \boxed{V_A = 200\,kN}$$

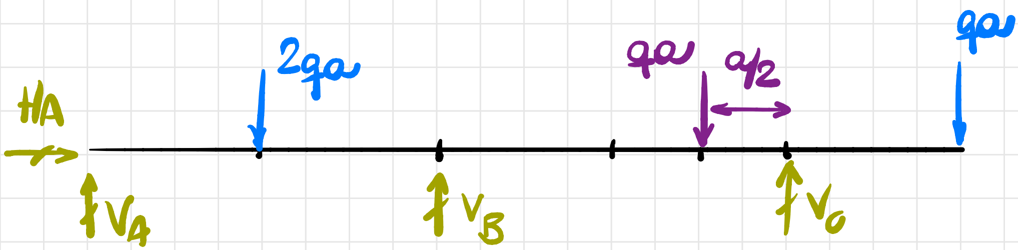


40
40
80
200
80
80
0
0
0
N
[kN]
-80
+120
+40
+40
V
[kN]
3m
-40
-40
-80
80
80
M
[kNm]
80
100

Exemplo: viga Gerber



Reações de apoio:



$$\sum F_H = 0: \quad \boxed{H_A = 0}$$

$$\sum F_V = 0: \quad V_A - 2qa + V_B - qa + V_C - qa = 0$$

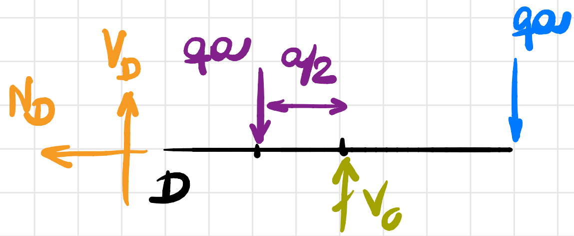
$$V_A + V_B + V_C = 4qa$$

$$\circlearrowleft(+) \sum M_A = 0: \quad -2qa \cdot a + V_B \cdot 2a - qa \cdot \tfrac{7}{2}a + V_C \cdot 4a$$

$$-qa \cdot 5a = 0$$

$$2V_B + 4V_C = \frac{21}{2} qa$$

Fazendo um corte em D e escolhendo um dos lados:

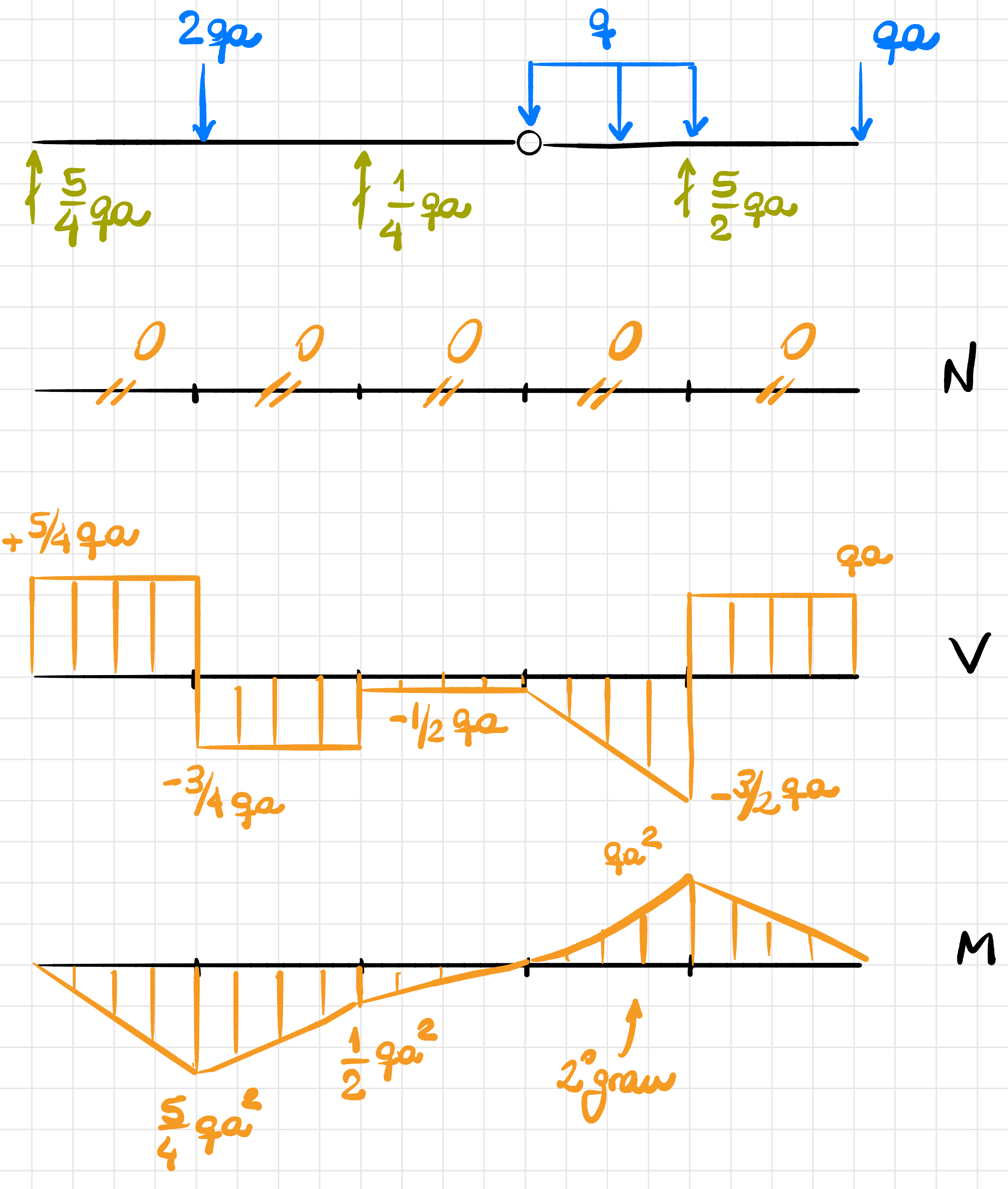


$$\circlearrowleft + \sum M_D = 0 : -qa \cdot a/2 + V_C \cdot a - qa \cdot 2a = 0$$

$$\boxed{V_C = \frac{5}{2} qa}$$

$$V_B = \frac{21}{4} qa - 2V_C \implies \boxed{V_B = \frac{1}{4} qa}$$

$$V_A = 4qa - V_B - V_C \implies \boxed{V_A = \frac{5}{4} qa}$$



2qa
q
qa
5/4 qa
1/4 qa
5/2 qa
0
0
0
0
0
N
+5/4 qa
qa
V
-1/2 qa
-3/4 qa
-3/2 qa
qa²
M
1/2 qa²
5/4 qa²
2° grau