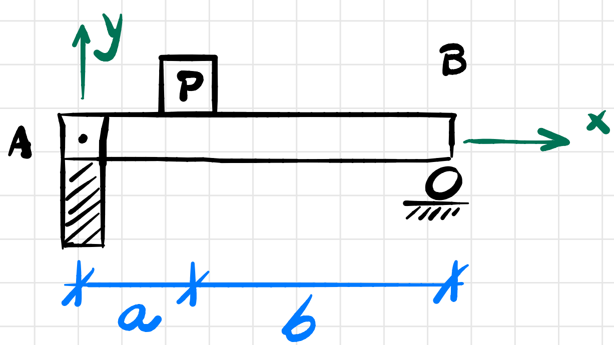
Cálculo de Reações de Apoio

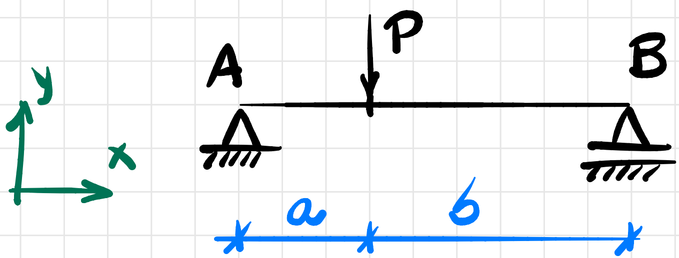
Exemplo 1:

Considere uma viga apoiada-articulada sujeita a um peso concentrado. Calcule as reações de apoio em A e B.

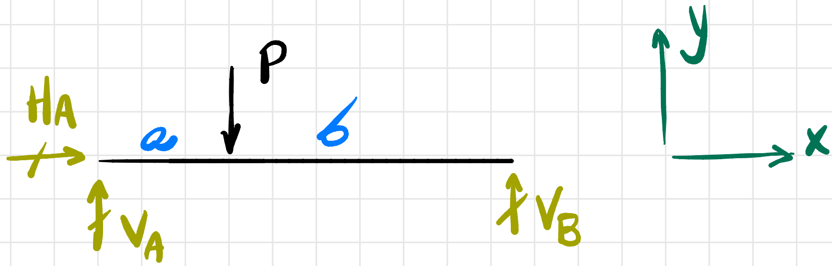
Baseado na descrição acima, tem-se a seguinte estrutura:



Solução: Representar a estrutura através de um *esquema estrutural*:



O próximo passo é substituir os vínculos por reações vinculares:



Para haver equilíbrio:

$$\sum F_x = 0 : \quad \boxed{H_A = 0}$$

$$\sum F_y = 0 : \quad V_A - P + V_B = 0 \Rightarrow V_A + V_B = P$$

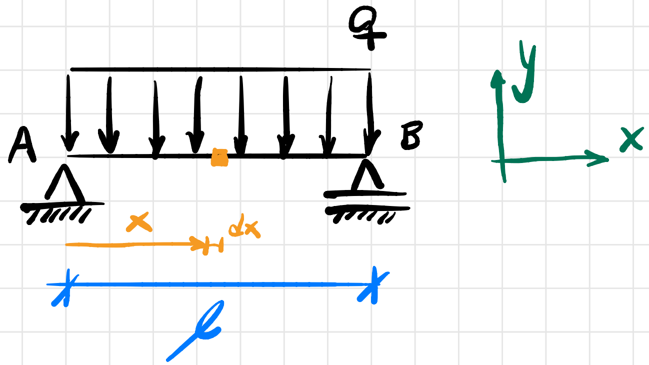
$$\curvearrowleft + \sum M_A = 0 : \quad -P \cdot a + V_B \cdot (a+b) = 0$$

$$\therefore \quad \boxed{V_B = \frac{P \cdot a}{a+b}}$$

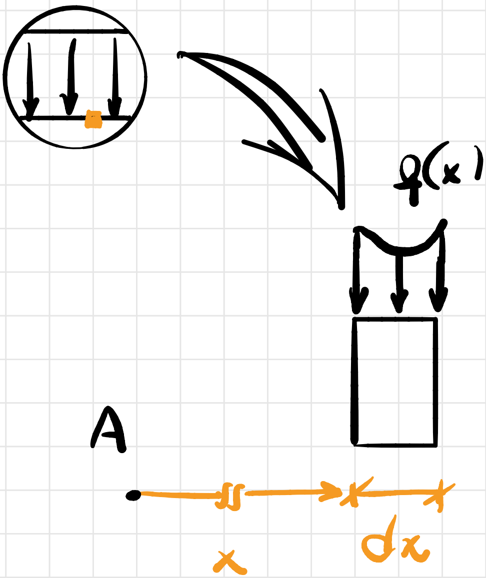
$$V_A = P - V_B = P - \frac{Pa}{a+b} \Rightarrow \boxed{V_A = \frac{Pb}{a+b}}$$

Exemplo 2:

Viga com carregamento distribuído:



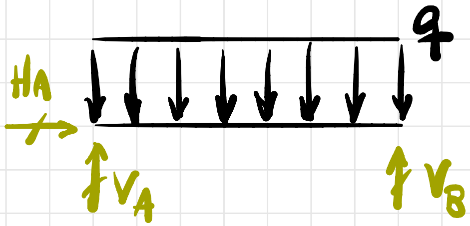
Como calcular as reações? Considere um elemento infinitesimal da viga:



a força que atua no elemento é equivalente a uma força concentrada $dF = q(x)dx$ e gera em A o momento $dM = -q(x)xdx$

Assim, integrando essa força e esse momento ao longo da viga, pode-se obter as reações de apoio.

No exemplo:



$$\sum F_x = 0 : \quad \boxed{H_A = 0}$$

$$\sum F_y = 0 : \quad V_A + V_B - \int_0^{\ell} q\,dx = 0$$

$$V_A + V_B = q \int_0^{\ell} dx \Rightarrow \quad V_A + V_B = q\ell$$

$$\circlearrowleft\!+ \sum M_A = 0 : \quad V_B . \ell - \int_0^{\ell} q x\,dx = 0$$

$$V_B \ell = q \int_0^{\ell} x\,dx \Rightarrow V_B \ell = q \frac{\ell^2}{2}$$

Assim:

$$\boxed{V_B = \frac{q\ell}{2}}$$

Voltando:

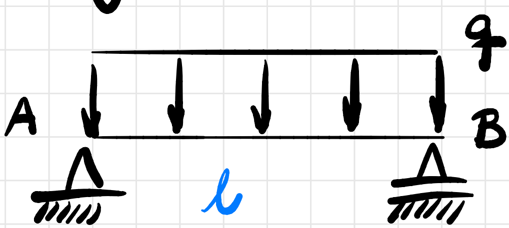
$$V_A = q\ell - V_B \Rightarrow V_A = q\ell - \frac{q\ell}{2}$$

$$\boxed{V_A = \frac{q\ell}{2}}$$

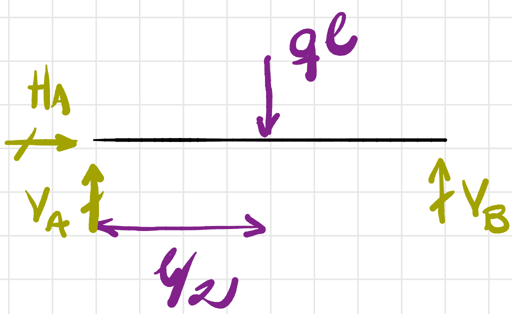
Uma maneira mais simples para efetuar o cálculo das reações de apoio é usar considerar um carregamento mecanicamente equivalente a um carregamento concentrado de módulo igual ao valor da área sob a curva $q(x)$ e posicionado no centro de gravidade dessa área.

Um carregamento é dito mecanicamente equivalente a um carregamento distribuído se possui mesma resultante e mesmo momento para qualquer polo O que o carregamento original.

Resolvendo o problema anterior usando essa abordagem:



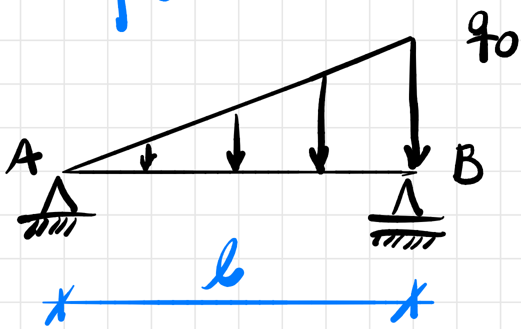
Esse problema é equivalente à:



$$
\begin{cases}
\sum F_x = 0: \; H_A = 0 \\
\sum F_y = 0: \; V_A + V_B = q\ell \\
(+)\sum M_A = 0: \; V_B \cdot \ell - q\ell \cdot \ell/2 = 0
\end{cases}
$$

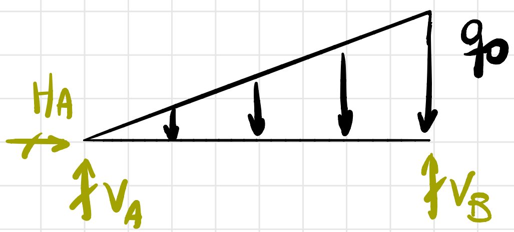
O que resulta em $V_A = V_B = q\ell/2$.

Exemplo 3:



$$q(x) = q_0\left(\frac{x}{\ell}\right)$$

Fazendo o DCL:



E o equilíbrio:

$$\sum F_x = 0 : \quad \boxed{H_A = 0}$$

$$\sum F_y = 0 : \quad V_A + V_B - \int_0^{\ell} q(x)\,dx = 0$$

$$V_A + V_B = \int_0^{\ell} q_0\left(\frac{x}{\ell}\right)dx = \frac{q_0}{\ell}\int_0^{\ell} x\,dx$$

$$V_A + V_B = \frac{q_0 \ell}{2}$$

$$\circlearrowleft^{+} \sum M_A = 0 : \quad -\int_0^{\ell} q(x).x.dx + V_B.\ell = 0$$

$$V_B \ell = \int_0^{\ell} q_0\left(\frac{x}{\ell}\right)x\,dx = \frac{q_0}{\ell}\int_0^{\ell} x^2 dx = \frac{q_0}{\ell}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\ell}$$

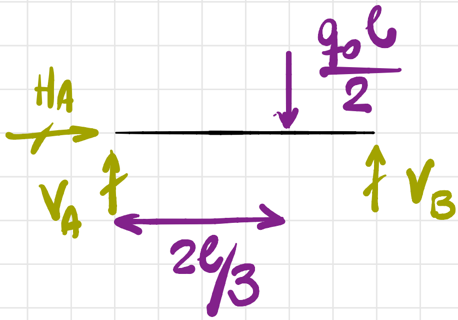
$$V_B \ell = \frac{q_0 \ell^2}{3} \Longrightarrow \boxed{V_B = \frac{q_0 \ell}{3}}$$

E substituindo:

$$V_A = \frac{q_0 \ell}{2} - V_B = \frac{q_0 \ell}{2} - \frac{q_0 \ell}{3}$$

$$\therefore \quad \boxed{V_A = \frac{q_0 \ell}{6}}$$

Usando a abordagem mecânicamente equivalente:



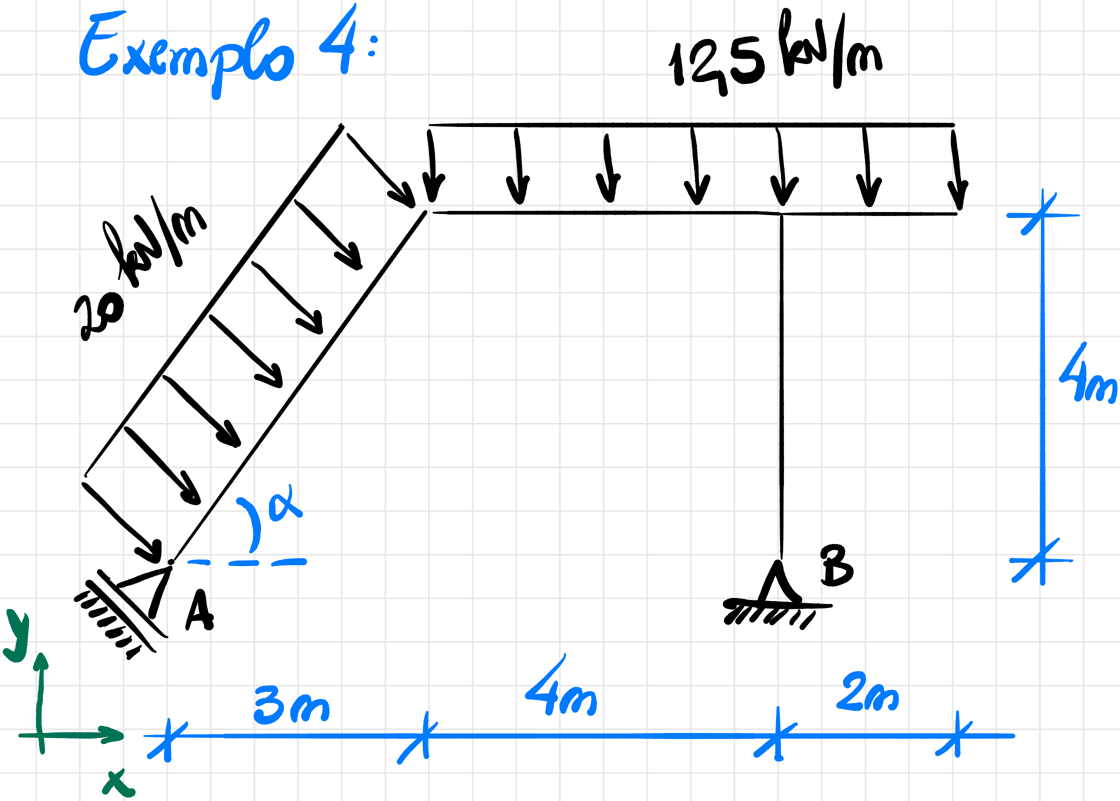
$$\sum F_x = 0: \quad \boxed{H_A = 0}$$

$$\sum F_y = 0: \quad V_A + V_B = \frac{q_0 \ell}{2}$$

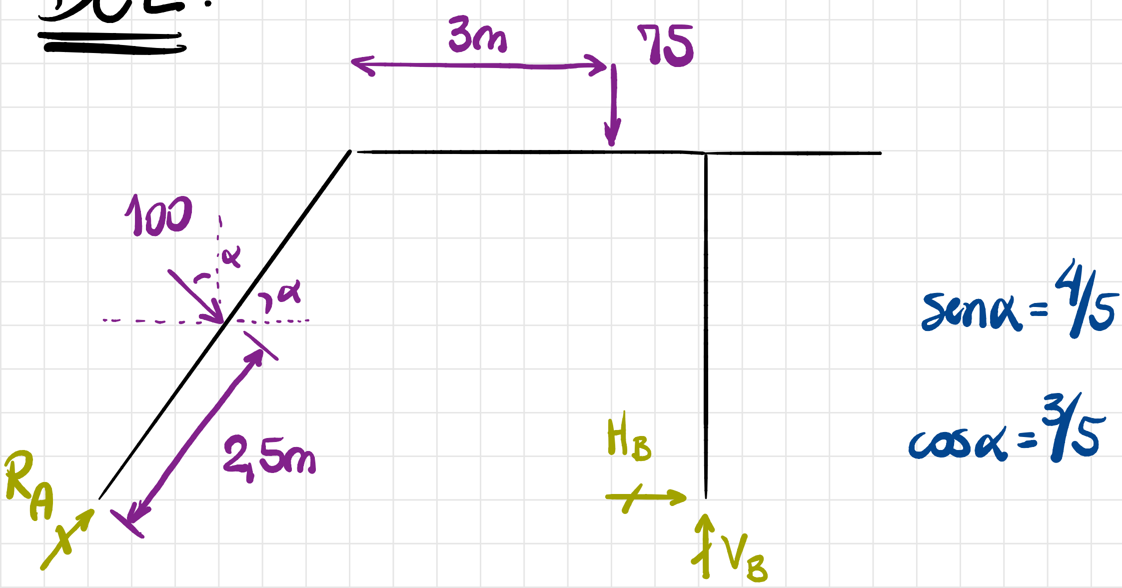
$$\curvearrowleft (+) \sum M_A = 0: \quad -\frac{q_0 \ell}{2} \cdot \frac{2\ell}{3} + V_B \cdot \ell = 0$$

$$\boxed{V_B = \frac{q_0 \ell}{3}} \implies \boxed{V_A = \frac{q_0 \ell}{6}}$$

Exemplo 4:



DCL:



Fazendo o equilíbrio:

$$\sum F_x = 0: \quad R_A . \cos\alpha + 100 \,\text{sen}\alpha + H_B = 0$$

$$\therefore \quad \frac{3}{5} R_A + H_B = -80$$

$$\sum F_y = 0: \quad R_A . \text{sen}\alpha - 100 . \cos\alpha - 75 + V_B = 0$$

$$\therefore \quad \frac{4}{5} R_A + V_B = 135$$

$$\circlearrowleft \sum M_A = 0: -100 . 2{,}5 - 75 . 6 + V_B . 7 = 0$$

$$7 V_B = 250 + 450 = 700$$

$$\therefore \quad \boxed{V_B = 100 \text{ kN}}$$

$$\frac{4}{5} R_A = 135 - V_B = 35 \Rightarrow \boxed{R_A = 43{,}75 \text{ kN}}$$

$$H_B = -80 - \frac{3}{5}R_A = -80 - 26{,}25$$

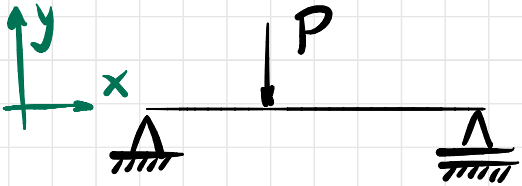
$$\therefore \quad \boxed{H_B = -106{,}25\ kN}$$

Atividade extra: usar B como pólo.

Grau de Estaticidade

O grau de estaticidade é a relação entre o número de incógnitas e o número de equações disponíveis.

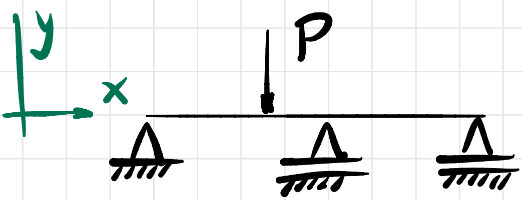
Para o problema a seguir, tem-se:



- 3 equações de equilíbrio
- 3 reações vinculares

Essa estrutura é denominada isostática, pois possui o número de equações de equilíbrio e incógnitas vinculares.

Agora, considere a seguinte estrutura:



- 3 equações de equilíbrio
- 4 reações vinculares

Nesse caso, a estrutura é dita hiperestática, uma vez que existem mais incógnitas vinculares do que equações de equilíbrio. Para esse tipo de estrutura usa-se uma medida denominada grau de hiperestaticidade (G), que é a diferença entre o número de incógnitas e o número de equações de equilíbrio. No exemplo $G = 4 - 3 = 1$ (diz-se que a estrutura é uma vez hiperestática).

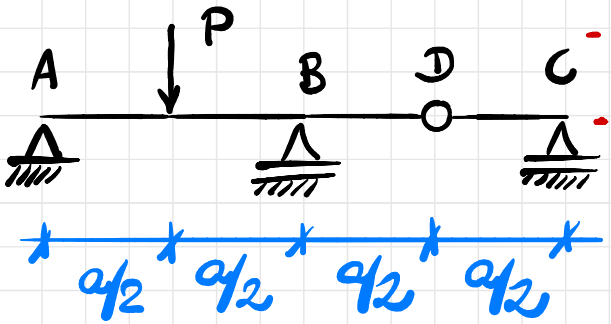
Agora considere essa última estrutura:

- 3 equações de equilíbrio
- 2 reações vinculares

Essa estrutura é denominada hipoestática, já que o número de incógnitas é menor que o número de equações de equilíbrio. Nesse tipo de estrutura ocorrem movimentos de corpo rígido.

Exemplo 5:

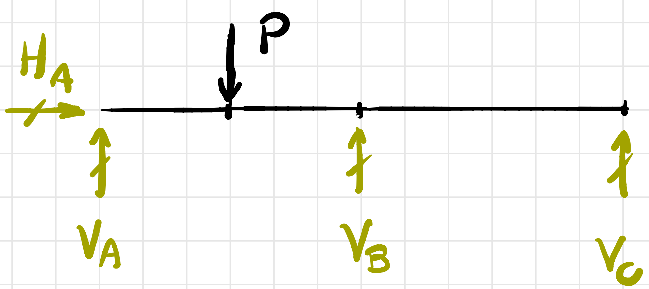
[Viga Gerber]



- 3 equações de equilíbrio
- 4 reações vinculares

hiperestático?

Observe que em D há uma articulação interna. Esse vínculo não transmite rotação entre os trechos. Isso implica que o momento é nulo na articulação. Para resolver o problema inicia-se fazendo o diagrama de corpo livre da estrutura ignorando a articulação interna.



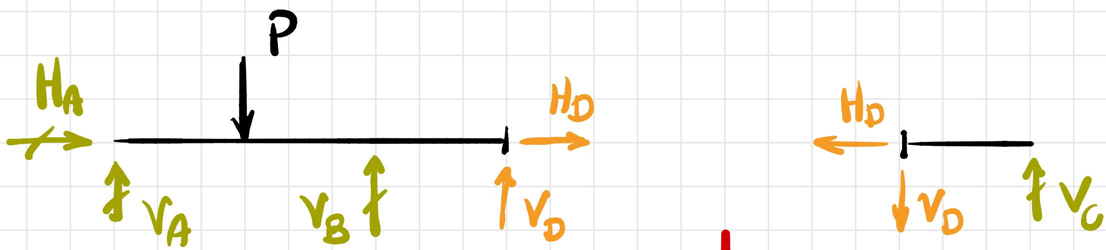
$$\sum F_x = 0: \quad \boxed{H_A = 0}$$

$$\sum F_y = 0: \quad V_A - P + V_B + V_C = 0 \quad (\mathrm{I})$$

$$\circlearrowleft + \sum M_A = 0: \quad -P.\left(a/2\right) + V_B . a + V_C . 2a = 0$$

$$\therefore \quad -P + 2V_B + 4V_C = 0 \quad (\mathrm{II})$$

Agora, fazendo um corte na articulação e substituindo pelos esforços adequados:



$$\sum F_H = 0: \quad H_A + H_D = 0$$

$$\sum F_V = 0: \quad V_A - P + V_B + V_D = 0$$

$$\circlearrowleft + \sum M_A = 0: \quad -P.\left(a/2\right) + V_B . a + V_D . \left(3a/2\right) = 0$$

$$\sum F_x = 0: \quad H_D = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad V_D - V_C = 0$$

$$\circlearrowleft + \sum M_A = 0: \quad V_C = 0$$

Qualquer um dos cortes pode ser usado.

Usando o corte CD: $\underline{\underline{V_C = 0}}$. Assim, na estrutura completa:

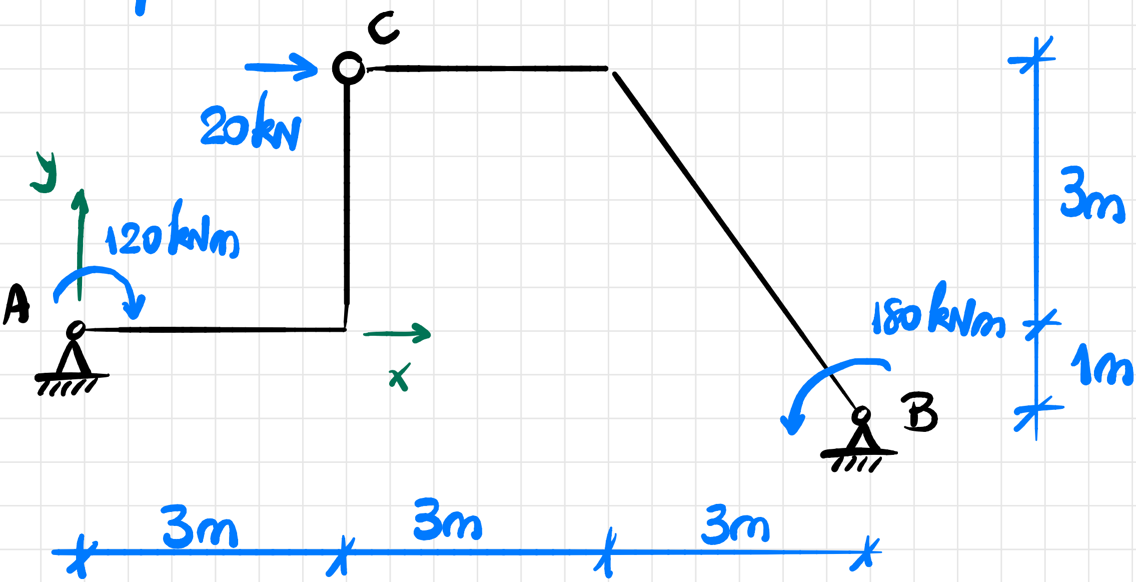
$$\begin{cases} V_A + V_B = P \\ -P + 2V_B = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \boxed{V_B = \frac{P}{2}}$$

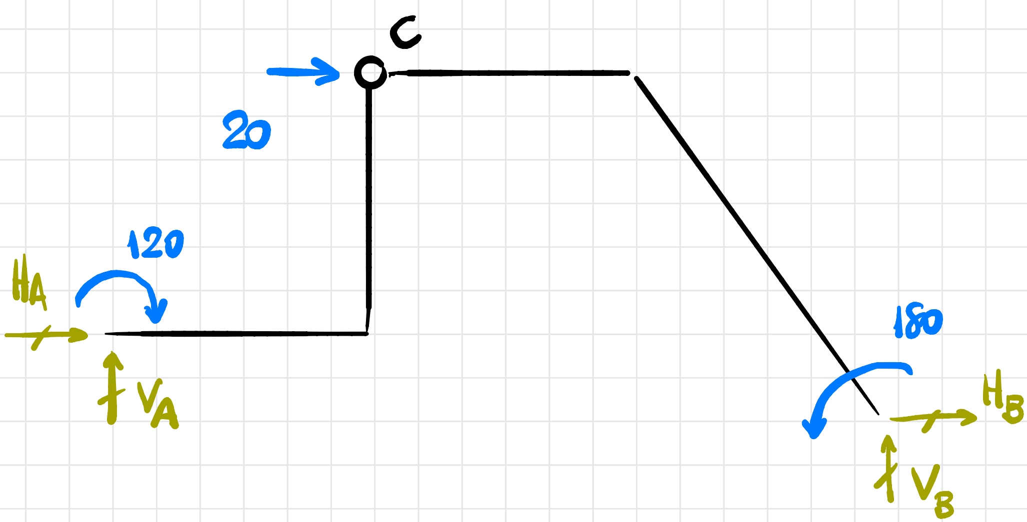
e $$\boxed{V_A = \frac{P}{2}}$$

$$\boxed{V_C = 0}$$

Exemplo 6:



DCL:



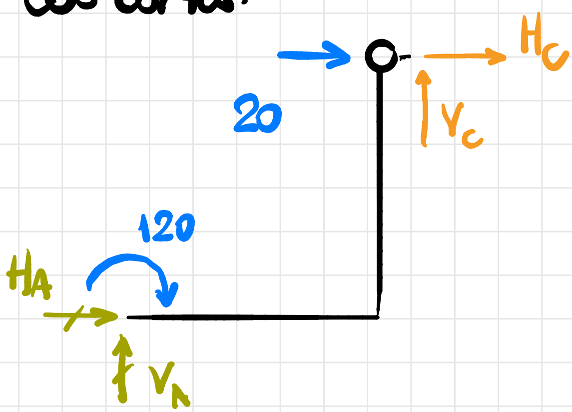
$$\sum F_x = 0: \quad H_A + 20 + H_B = 0 \quad \text{I}$$

$$\sum F_y = 0: \quad V_A + V_B = 0 \quad \text{II}$$

$$\circlearrowleft(+)\ \sum M_A = 0: \ -\cancel{120} - \cancel{20.3} + \cancel{180} + V_B . 9 + H_B . 1 = 0$$

$$H_B + 9V_B = 0 \quad \text{III}$$

Fazendo um corte na articulação e escolhendo um dos cortes:



$$\sum F_H = 0: \quad H_A + 20 + H_C = 0 \quad \text{IV}$$

$$\sum F_V = 0: \quad V_A + V_C = 0 \quad \text{V}$$

$$\circlearrowleft(+)\ \sum M_C = 0: \ -120 + H_A . 3 - V_A . 3 = 0$$

$$\therefore \ H_A - V_A = 40 \quad \text{VI}$$

Usando I, II, III e VI:

$$\begin{cases} H_A + H_B = -20 \Rightarrow H_A = -20 - H_B \\ V_A + V_B = 0 \Rightarrow V_A = -V_B \\ H_B + 9V_B = 0 \\ H_A - V_A = 40 \end{cases}$$

$$\therefore (-20 - H_B) - (-V_B) = 40$$

$$\begin{cases} V_B - H_B = 60 \\ 9V_B + H_B = 0 \end{cases}$$

$$10\,V_B = 60 \Rightarrow \boxed{V_B = 6\,kN}$$

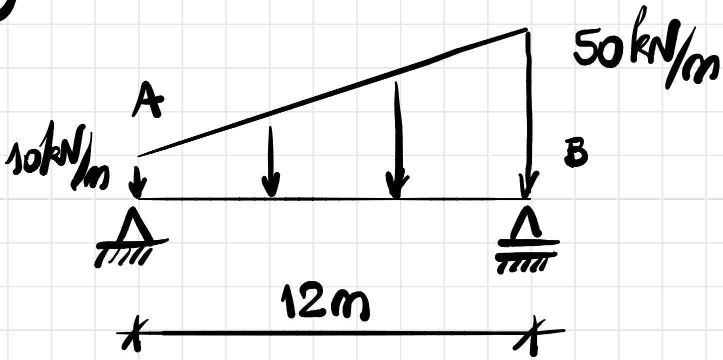
$$H_B = -9V_B \Rightarrow \boxed{H_B = -54\,kN}$$

$$V_A = -V_B \Rightarrow \boxed{V_A = -6\,kN}$$

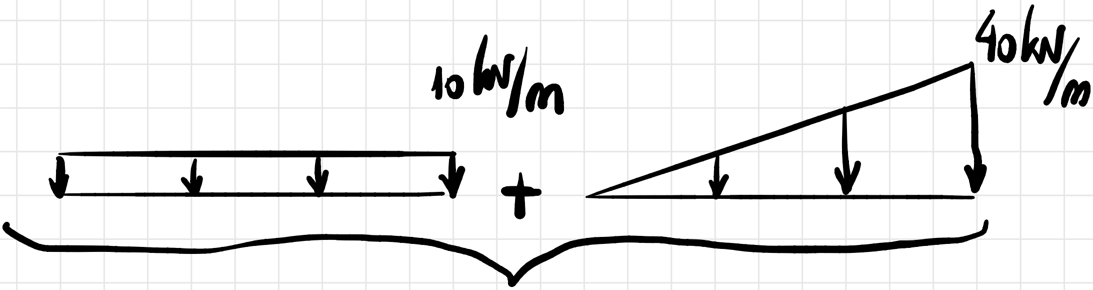
$$H_A = -20 - H_B \Rightarrow \boxed{H_A = 34\,kN}$$

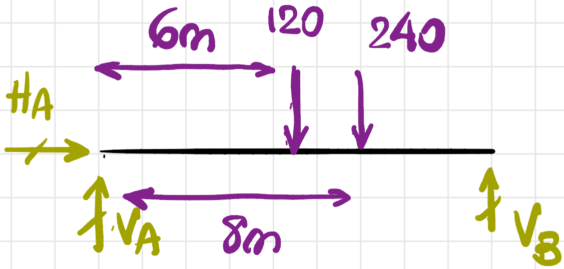
Superposição de Efeitos

Como calcular as reações de apoio da seguinte estrutura?



Se o problema em questão está dentro da hipótese de linearidade (geométrica e de material) com pequenos deslocamentos e deformações, o carregamento pode ser visto como a soma de um carregamento linear com um carregamento uniforme:





$$\sum F_x = 0: \quad H_A = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad V_A + V_B = 360$$

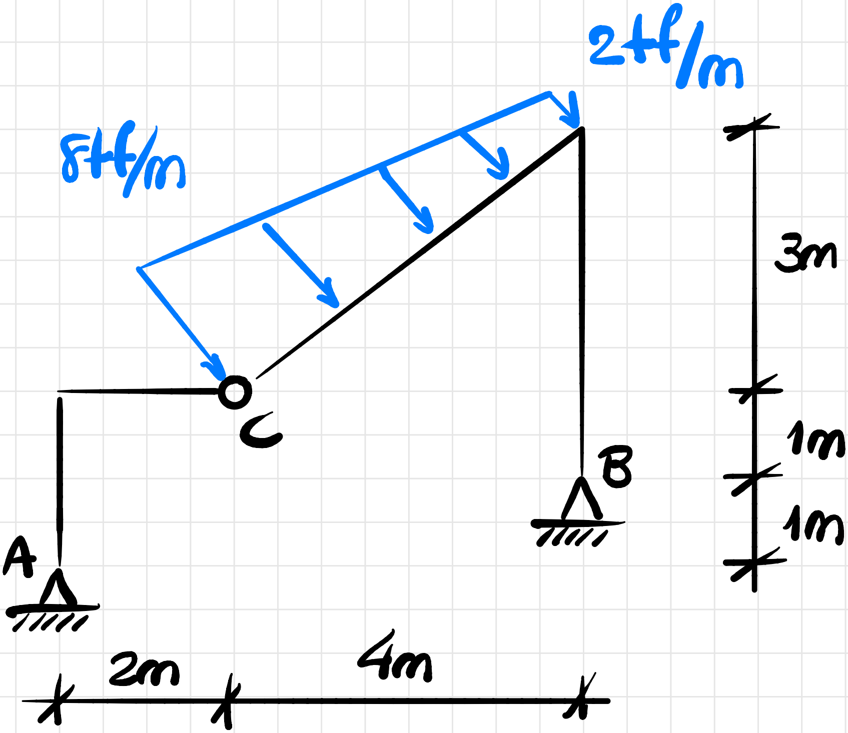
$$(+)\ \sum M_A = 0: \ -120 \cdot 6 - 240 \cdot 8 + V_B \cdot 12 = 0$$

$$12 V_B = 2640$$

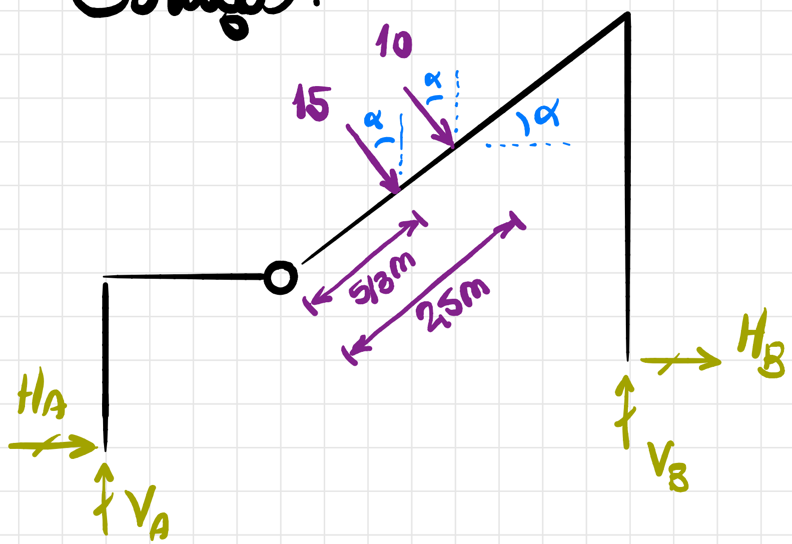
$$\therefore \boxed{V_B = 220 \text{ kN}} \Rightarrow \boxed{V_A = 140 \text{ kN}}$$

Exercício

Determinar as reações de apoio em A e B.



Soluçõ:



$sen\alpha = 3/5$

$cos\alpha = 4/5$

$$\sum F_x = 0: \quad H_A + H_B + 15sen\alpha + 10sen\alpha = 0$$

$$H_A + H_B = -15 \quad \mathrm{I}$$

$$\sum F_y = 0: \quad V_A + V_B - 15cos\alpha - 10sen\alpha = 0$$

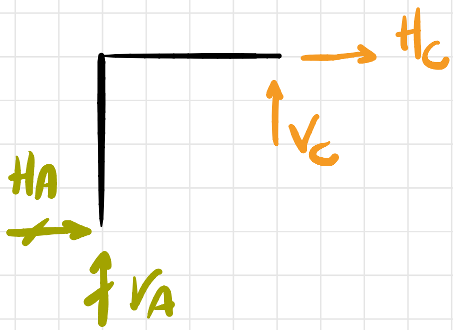
$$V_A + V_B = 20 \quad \mathrm{II}$$

$$\circlearrowleft(+) \sum M_A = 0: \quad -15.sen\alpha.3 - 15.cos\alpha.(2+4/3)$$

$$-10sen\alpha.3{,}5 - 10cos\alpha.3 - H_B.1 + V_B.6 = 0$$

$$6V_B - H_B = 120 \quad \mathrm{III}$$

Fazendo o corte na articulação:



$$(+\circlearrowleft)\ \sum M_C = 0:\quad H_A \cdot 2 - V_A \cdot 2 = 0 \Rightarrow \underline{H_A = V_A}$$

De I: $H_A = -15 - H_B$

De II: $V_A = 20 - V_B$

$$20 - V_B = -15 - H_B$$

$$\begin{cases} H_B - V_B = -35 \\ -H_B + 6V_B = 120 \end{cases}$$

$$5V_B = 85$$

$$\begin{cases} \underline{V_B = 17\,tf} \\ \underline{V_A = 3\,tf} \\ \underline{H_A = 3\,tf} \\ \underline{H_B = -18\,tf} \end{cases}$$