PEF EPUSP – PEF 5710 – Otimização Estrutural – 1ª Prova – 29/04/2021

GABARITO

Questão 1: Programação linear.

Uma concreteira tem duas usinas de concreto (A e B) e duas pedreiras (1 e 2) que fornecem o agregado grosso. A Tabela abaixo mostra a capacidade de consumo (m³ de brita por dia) de cada usina e as distâncias entre as pedreiras e as usinas (km). Cada pedreira pode fornecer até 200 m³/dia, e o custo do transporte da brita é de $10/km/m³. Pelo menos 300 m³/dia de agregado são necessários para atender à produção de concreto que a empresa costuma vender por dia. **Formular matricialmente o problema de minimizar o custo do transporte, incluindo as variáveis de folga (*slack variables*) necessárias.**

Sugestão para definição das variáveis de projeto: há quatro trajetos possíveis, de cada uma das duas pedreiras para cada uma das duas usinas.

Tabela

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Usina | Distância da pedreira 1 (km) | Distância da pedreira 2 (km) | Consumo máx. de cada usina (m³/dia) |
| A | 24 | 20,5 | 240 |
| B | 17,2 | 18 | 300 |

**1. Variáveis de projeto**

$x\_{1}=$ metros cúbicos de brita transportados da pedreira 1 para a usina A

$x\_{2}=$ metros cúbicos de brita transportados da pedreira 2 para a usina A

$x\_{3}=$ metros cúbicos de brita transportados da pedreira 1 para a usina B

$x\_{4}=$ metros cúbicos de brita transportados da pedreira 2 para a usina B

**2. Função objetivo, custo total do transporte por dia**

$$f\left(x\right)=10\left(24x\_{1}+20,5x\_{2}+17,2x\_{3}+18x\_{4}\right)$$

$$f\left(x\right)=240x\_{1}+205x\_{2}+172x\_{3}+180x\_{4}$$

**3. Restrições**

$x\_{1}+x\_{2}\leq 240$ (consumo máximo da usina A)

$x\_{3}+x\_{4}\leq 300$ (consumo máximo da usina B)

$x\_{1}+x\_{3}\leq 200$ (produção da pedreira 1)

$x\_{2}+x\_{4}\leq 200$ (produção da pedreira 2)

$x\_{1}+x\_{2}+x\_{3}+x\_{4}\geq 300$ (quantidade de brita necessária por dia)

**4. Introduzindo variáveis de folga**

$$x\_{1}+x\_{2}+x\_{5}=240$$

$$x\_{3}+x\_{4}+x\_{6}=300$$

$$x\_{1}+x\_{3}+x\_{7}=200$$

$$x\_{2}+x\_{4}+x\_{8}=200$$

$$x\_{1}+x\_{2}+x\_{3}+x\_{4}-x\_{9}=300$$

**5. Matricialmente**

**5.1 Função objetivo**

$$f\left(x\right)=c^{T}x$$

onde

$$c^{T}=\left[\begin{matrix}\begin{matrix}240&205&172\end{matrix}&\begin{matrix}180&0&0\end{matrix}&\begin{matrix}0&0&0\end{matrix}\end{matrix}\right]^{T}$$

$$x^{T}=\left[\begin{matrix}\begin{matrix}x\_{1}&x\_{2}&x\_{3}\end{matrix}&\begin{matrix}x\_{4}&x\_{5}&x\_{6}\end{matrix}&\begin{matrix}x\_{7}&x\_{8}&x\_{9}\end{matrix}\end{matrix}\right]^{T}$$

**5.2 Restrições**

$$Ax=b$$

$$A=\left[\begin{matrix}\begin{matrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{matrix}&\begin{matrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{matrix}&\begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{matrix}\\\begin{matrix}0&1&0\\1&1&1\end{matrix}&\begin{matrix}1&0&0\\1&0&0\end{matrix}&\begin{matrix}0&1&0\\0&0&-1\end{matrix}\end{matrix}\right]$$

$$b^{T}=\left[\begin{matrix}\begin{matrix}240&300&200\end{matrix}&\begin{matrix}200&300\end{matrix}\end{matrix}\right]^{T}$$

**6. Resultado (não pedido)**

$x\_{1}=$ 0

$x\_{2}=$ 0

$x\_{3}=$ 200

$x\_{4}=$ 100

Custo mínimo: $ 52.400

**Comentário:** do ponto de vista do menor custo de transporte de brita, a melhor decisão gerencial seria desativar a Usina A.