Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia de Minas e de Petróleo

TENSOR DE TENSÕES
PARTE 3

PMI3305 - Mecânica das Rochas Aplicada à Mineração I
Prof. Eduardo César Sansone

DETERMINAÇÃO DAS TENSÕES PRINCIPAIS

Como visto anteriormente, a tensão atuante segundo certo plano pode ser dada por:

$\mathbf{T} = \sigma\,\mathbf{n}$

ou

$$\mathbf{T} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \mathbf{x} \begin{Bmatrix} (x,a) \\ (y,a) \\ (z,a) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \mathbf{x} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

De onde derivam 3 equações:

$T_x = \sigma_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z$
$T_y = \tau_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \tau_{yz}n_z$
$T_z = \tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z$

Onde:

$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$

Para que a tensão T seja uma tensão principal devemos ter:

$T_x = \sigma_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z = \sigma n_x$
$T_y = \tau_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \tau_{yz}n_z = \sigma n_y$
$T_z = \tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z = \sigma n_z$

ou

$(\sigma_{xx}-\sigma)n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z = 0$
$\tau_{xy}n_x + (\sigma_{yy}-\sigma)n_y + \tau_{yz}n_z = 0$
$\tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + (\sigma_{zz}-\sigma)n_z = 0$

E para que este sistema de equações possua uma solução não-trivial devemos ter:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx}-\sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy}-\sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz}-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

"Equação Característica"

As soluções desta equação característica (autovalores da matriz) serão as tensões principais e o tensor característico será aquele que a partir de uma rotação do sistema de coordenadas resultará em uma tensão [σ*] que tenha apenas termos na diagonal ou termos normais:

$$[\sigma^*] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

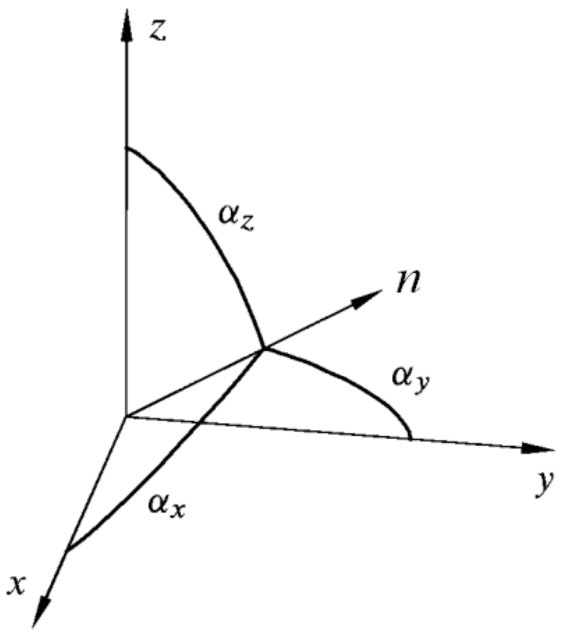
DETERMINAÇÃO DAS TENSÕES PRINCIPAIS

Conhecidas as tensões principais, a determinação da orientação do plano sobre o qual cada uma destas tensões é aplicada pode ser feita pela resolução dos vários sistemas:

$(\sigma_{xx}-\sigma)n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z = 0$
$\tau_{xy}n_x + (\sigma_{yy}-\sigma)n_y + \tau_{yz}n_z = 0$
$\tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + (\sigma_{zz}-\sigma)n_z = 0$
$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$

Com $\sigma = \sigma_1$, σ_2 e σ_3.

Resultando nos cossenos diretores de cada plano n_x, n_y e n_z e os ângulos correspondentes.



Exercício 1:

Um ponto material está submetido ao estado plano de tensões onde atuam as seguintes tensões:

σ_{xx} **= 4 MPa**
σ_{yy} **= 8 MPa**
τ_{xy} **= 3,464 MPa**

Determine as tensões principais atuantes.

Dados de Exercício:
σ_{xx} **= 4 MPa**
σ_{yy} **= 8 MPa**
τ_{xy} **= 3,464 MPa**

$$\Rightarrow \sigma = \begin{Bmatrix} 4 & 3,464 \\ 3,464 & 8 \end{Bmatrix}$$

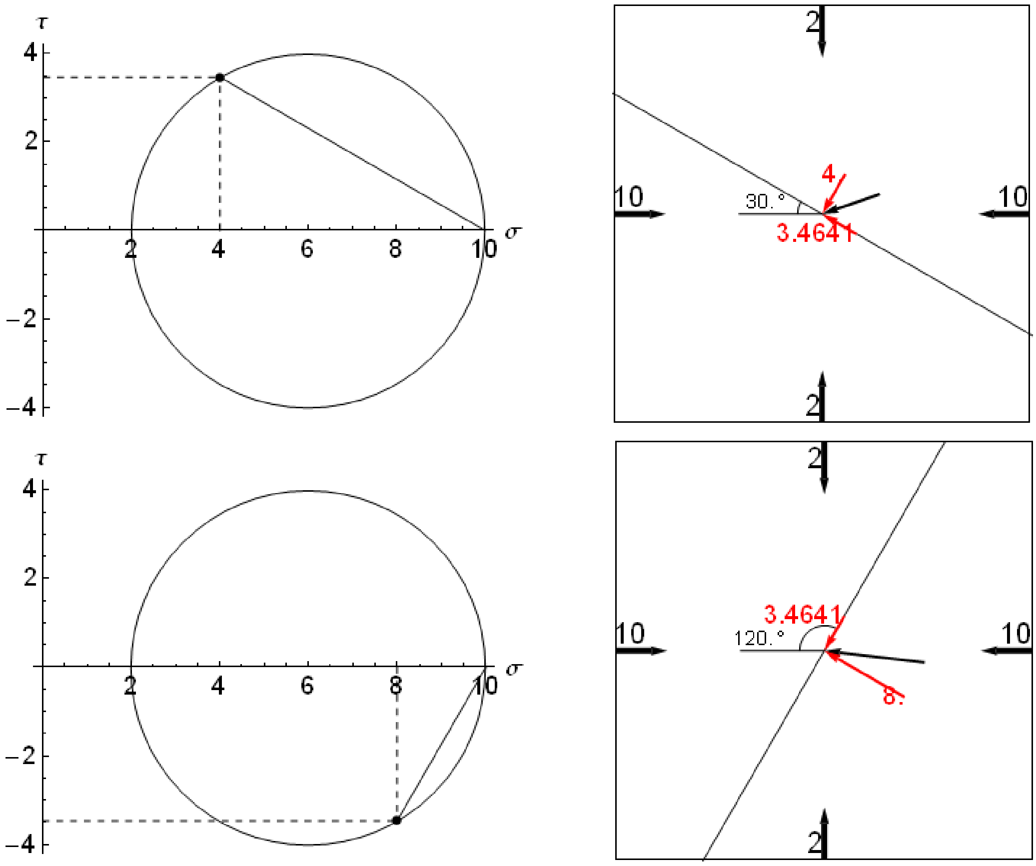
EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA:

$$\begin{vmatrix} 4-\sigma & 3,464 \\ 3,464 & 8-\sigma \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4-\sigma)(8-\sigma) - 12 = 0$$

$$\sigma^2 - 12\sigma + 32 - 12 = 0$$

$$\sigma^2 - 12\sigma + 20 = 0 \quad \begin{cases} \sigma_1 = 10 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = 2 \text{ MPa} \end{cases}$$

σ_1 = 10 MPa
σ_2 = 2 MPa



Círculos de Mohr e tensões atuantes

TENSÃO DESVIADORA

A média das tensões principais é chamada de tensão normal octaédrica, σ_{oct}:

$$\sigma_{oct} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

O tensor octaédrico será:

$$[\sigma_{oct}] = \begin{bmatrix} \sigma_{oct} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{oct} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{oct} \end{bmatrix}$$

Aplicando-se o princípio da superposição das tensões, é possível decompor qualquer estado de tensões em um componente isostático e um componente que é resultado da diferença entre o tensor da tensão para o ponto e o componente isostático. O componente isostático é dado por $[\sigma_{oct}]$ e a tensão desviadora é definida como o tensor:

$[s] = [\sigma] - [\sigma_{oct}]$

ou

$$[s] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_{oct} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{oct} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{oct} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_{oct} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_{oct} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_{oct} \end{bmatrix}$$

OBRIGADO!

Contato:
Prof. Eduardo César Sansone
esansone@usp.br