

ZAB 0161 - Álgebra linear com aplicações em
geometria analítica
Lista 7 - Geometria em \mathbb{R}^n . Transformações
lineares e Matrizes.

1 de junho de 2023

Geometria em \mathbb{R}^n :

1. Os vértices de um triângulo são os pontos A , B e C , onde: $\|BA\| = a$ e $\|AC\| = 2a$. Determine a equação da reta que contém a bissetriz interior do triângulo no ângulo correspondente ao vértice A .

Resolução: A reta que contém a bissetriz é definida por $\mathcal{L}: Q = P_0 + ut$, onde $t \in \mathbb{R}$. Como a bissetriz terá origem no vértice A , podemos adotá-lo como o ponto de passagem necessário para encontrar a equação. Assim para encontrarmos u precisamos de dois vetores de mesmo tamanho, que podemos usar AB e $\frac{1}{2}AC$. Ou seja, $u = AB + \frac{1}{2}AC$, que desenvolvendo temos $u = \frac{1}{2}(C + 2B - 3A)$. Portanto, $\mathcal{L}: Q = A + \frac{1}{2}(C + 2B - 3A)t$.

2. Desenvolvida em aula. Vide vídeo aula de retas.
3. Sejam $M = (1, 0, 0)$, $N = (2, 2, 2)$ e $R = (-1, 1, 3)$ os pontos médios dos lados de um triângulo, cuja área não é nula. Determine os vértices do triângulo.

Resolução: Como temos os pontos médios dos lados do triângulo podemos estabelecer relações com os seus vértices: $\frac{A+B}{2} = N$, $\frac{A+C}{2} = M$ e $\frac{B+C}{2} = R$. Desenvolvendo, temos que $A+B = (4, 4, 4)$, $B = (-2, 2, 6) - C$ e $C = (2, 0, 0) - A$. Assim, desenvolvendo essas equações fazendo as devidas substituições, temos que $A = (4, 1, -1)$, $B = (0, 3, 5)$ e $C = (-2, -1, 1)$.

Transformação Linear e Matriz associada:

1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde $T(x, y, z) = (x - y, x + 2y, z + x)$. Determine uma base para o núcleo da transformação T .

Resolução: O núcleo da transformação está formado pelos (x, y, z) tal

que $T(x, y, z) = 0$, isto é $(x - y, x + 2y, z + x) = (0, 0, 0)$. Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

a única solução é o vetor $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Assim não existe conjunto não nulo que seja base do núcleo de T .

2. Determine a matriz associada a transformação T do exercício 1.

Resolução: Podemos escrever

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ x + 2y \\ z + x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

A matriz associada será

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Seja a transformação linear $L : R^2 \rightarrow R^2$ para a qual temos $L(1, 1) = (1, -2)$ e $L(-1, 1) = (2, 3)$.

- (a) Calcule $L(-1, 5)$

Resolução: Como temos a imagem de $(1, 1)$ e de $(-1, 1)$, expressamos o vetor $(-1, 5)$ como combinação linear dos anteriormente mencionados: $(-1, 5) = a(1, 1) + b(-1, 1)$. Daqui temos que $a = 2$ e $b = 3$. Aplicando agora a transformação:

$$T(-1, 5) = T(2(1, 1) + 3(-1, 1)) = 2T(1, 1) + 3T(-1, 1) = (8, 5).$$

- (b) Calcule $L(a_1, a_2)$

Resolução: De maneira similar: $(a_1, a_2) = a(1, 1) + b(-1, 1)$, onde $a = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$ e $b = \frac{1}{2}(a_2 - a_1)$. Logo
 $T(a_1, a_2) = T\left(\frac{1}{2}(a_1 + a_2)(1, 1) + \frac{1}{2}(a_2 - a_1)(-1, 1)\right)$
 $T(a_1, a_2) = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)T(1, 1) + \frac{1}{2}(a_2 - a_1)T(-1, 1)$. Assim
 $T(a_1, a_2) = \frac{1}{2}(3a_2 - a_1, a_2 - 5a_1)$.

4. Seja a transformação linear $L : P_1 \rightarrow P_1$ tal que $L(t + 1) = 2t + 3$ e $L(t - 1) = 3t - 2$.

- (a) Determine $L(6t - 4)$.

Resolução: Como temos a imagem de $t + 1$ e de $t - 1$, expressamos o vetor $6t - 4$ como combinação linear dos anteriormente mencionados: $6t - 4 = \alpha(t + 1) + \beta(t - 1)$. Daqui temos que $\alpha = 1$ e $\beta = 5$. Aplicando agora a transformação:

$$T(6t - 4) = T((t + 1) + 5(t - 1)) = (2t + 3) + 5(3t - 2) = 17t - 7.$$

(b) Determine $L(at + b)$

Resolução: De maneira similar: $at + b = \alpha(t + 1) + \beta(t - 1)$, onde

$\alpha = \frac{1}{2}(a + b)$ e $\beta = \frac{1}{2}(a - b)$. Logo

$$T(at + b) = \frac{1}{2}(a + b)T(t + 1) + \frac{1}{2}(a - b)T(t - 1).$$

$$\text{Assim } T(at + b) = \frac{1}{2}[(5a - b)t + (a + 5b)].$$

5. Determine a matriz associada a transformação L do exercício 4.

Resolução: Considerando no conjunto de partida a base $\beta = \{(t + 1), (t - 1)\}$ e a base canônica no conjunto de chegada $\gamma = \{1, t\}$, observamos que

$$[L(\beta_1)] = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ e } [L(\beta_2)] = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ logo a matriz é } [L]_{\gamma\beta} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

6. Seja a transformação linear $L : P_2 \rightarrow P_2$ definida como $L(at^2 + bt + c) = (a + c)t^2 + (b + c)t$.

(a) $t^2 - t - 1$ pertence ao $\text{Ker}(L)$?

Resolução: Se pertence ao núcleo a imagem deve ser 0. Calculando $T(t^2 - t - 1) = 0t^2 - 2t = -2t$ que não é o polinômio zero, então $(t^2 - t - 1) \notin \text{Ker}(T)$.

(b) $t^2 + t - 1$ pertence ao $\text{Ker}(L)$?

Resolução: Novamente, $L(t^2 + t - 1) = 0t^2 + 0t = 0$. Como a imagem é zero, o polinômio $(t^2 + t - 1) \in \text{Ker}(T)$.

(c) $2t^2 - t$ pertence à $\text{Img}(L)$?

Resolução: Supondo que existe um polinômio $at^2 + bt + c$, tal que $T(at^2 + bt + c) = 2t^2 - t$. Então do sistema $a + c = 2$ e $b + c = -1$ temos infinitas soluções, em particular fazendo $c = 1$, então $b = -2$ e $a = 1$. Logo $T(t^2 - 2t + 1) = 2t^2 - t$, portanto pertence à imagem.

(d) $t^2 - t + 2$ pertence à $\text{Img}(L)$?

Resolução: Para $t^2 - t + 2$, temos $T(at^2 + bt + c) = t^2 - t + 2$. Mas pela definição da transformação a imagem não tem termo constante, assim o polinômio não pertence ao conjunto imagem.

(e) Determine uma base para o $\text{Ker}(L)$.

Resolução: Calculando o núcleo, $T(at^2 + bt + c) = 0$, então $(a + c)t^2 + (b + c)t = 0$. Então do sistema $a + c = 0$ e $b + c = 0$, $a = -c$ e $b = -c$, portanto o polinômio do núcleo terá a forma $-ct^2 - ct + c = c(-t^2 - t + 1)$.

Uma base para o núcleo é $\beta = \{-t^2 - t + 1\}$.

(f) Determine uma base para a imagem de L , $\text{Img}(L)$.

Resolução: Toda imagem tem a forma

$$(a + c)t^2 + (b + c)t = at^2 + bt + c(t^2 + t).$$

Assim, as imagens são combinação linear dos polinômios $\{t^2, t, t^2 + t\}$. Mas o terceiro elemento é combinação linear dos primeiros dois, e esses dois são linearmente independentes, então uma base para a imagem é $\{t^2, t\}$.

7. Seja a transformação linear $L : M_{22} \rightarrow M_{22}$ definida como

$$L \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a+b & b+c \\ a+d & b+d \end{bmatrix}.$$

(a) Determine uma base para o $Ker(L)$.

Resolução: Sabemos que o núcleo está formado pelas matrizes cuja imagem é o zero (matriz). Então

$$\begin{bmatrix} a+b & b+c \\ a+d & b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

o que fornece um sistema de equações $a+b=0$, $b+c=0$, $a+d=0$ e $b+d=0$, resolvendo temos: $a=c=d=-b$, então $a=0$, $b=0$, $c=0$ e $d=0$. Assim $Ker(L) = \{0\}$, portanto a base é o conjunto vazio.

(b) Determine uma base para a imagem de L , $Imag(L)$.

Resolução: A imagem pode ser representada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a+b & b+c \\ a+d & b+d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & b \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d & d \end{bmatrix} \\ &= a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Precisamos verificar se essas quatro matrizes são L.I., e conforme a parte (a) acima verifica-se que a única combinação linear do zero são coeficientes todos zero, então é um conjunto L.I. Logo uma base para imagem é

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$