ZAB0161 - Álgebra Linear com Aplicações em Geometria Analítica

Aplicações geométricas de Transformação Linear

Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle

ZAB (Dpto. de Ciências Básicas) – FZEA – USP

Transformação linear

Sejam U e W dois espaços vetoriais.

Uma **transformação linear** $L: U \longrightarrow W$ é uma função de U em W tal que

a) $L(u + v) = L(u) + L(v)$ para todo $u, v \in U$

b) $L(\alpha u) = \alpha L(u)$ para todo $u \in U$, $\alpha \in \mathbb{R}$

As condições acima significam que a transformação linear L <u>preserva</u> a soma e multiplicação vezes escalar de um espaço no outro.

Núcleo e Imagem de uma Transformação linear

Sejam U e W dois espaços vetoriais.

Seja uma transformação linear $L: U \longrightarrow W$.

Núcleo de uma transformação linear

Define-se o núcleo da transformação linear L, como o conjunto

$$Ker(L) = \{u \in U \ / \ L(u) = 0\}$$

Imagem de uma transformação linear

Define-se a imagem de L, como o conjunto

$$Imag(L) = \{w \in W \ / \ \text{Existe } u \in U \text{ com } L(u) = w\}$$

O $\boldsymbol{Ker(L)}$ e a $\boldsymbol{Imag(L)}$ são espaços vetoriais.

Transformação linear e matriz associada

Considerando:

Um espaço vetorial U com base $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$

Um espaço vetorial W com base $\delta = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$

Seja a transformação linear $L: U \longrightarrow W$

A matriz associada a L está formada por n colunas, e cada coluna é a representação de cada imagem dos elementos de β na base δ:

$$[L]_\delta^\beta = [[L(\beta_1)]_\delta \quad \dots \quad [L(\beta_n)]_\delta]_\delta^\beta$$

Intervalo para dúvidas

Transformação linear e matriz associada

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow P_1$,

$$L(a,b) = (a+b)t + (2a-b)$$

com as bases $\beta = \{(1,1),(0,1)\}$ e $\delta = \{(t-1),\ 2\ \}$

Qual a matriz de *L* ??

1. Encontremos as imagens dos elementos da base β:

$$L(\beta_1) = L(1,1) = 2t+1$$
$$L(\beta_2) = L(0,1) = t-1$$

Transformação linear e matriz associada

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow P_1$,

$$L(a, b) = (a + b)t + (2a - b)$$

com as bases $\beta = \{(1,1), (0,1)\}$ e $\delta = \{(t - 1),\ 2\}$

Qual a matriz de $\boldsymbol{L}$??

1. Encontremos as imagens dos elementos da base β:

$$L(\beta_1) = L(1,1) = 2t + 1$$
$$L(\beta_2) = L(0,1) = t - 1$$

2. Determinemos as colunas para cada vetor imagem

Expressar como CL dos elementos de δ.

$$L(\beta_1) = 2t + 1 = c_1\delta_1 + c_2\delta_2 = c_1(t - 1) + 2c_2$$

Transformação linear e matriz associada

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow P_1$,

$$L(a,b) = (a+b)t + (2a-b)$$

com as bases $\beta = \{(1,1),(0,1)\}$ e $\delta = \{(t-1),\ 2\}$

Qual a matriz de *L* ??

2. Expressar como CL dos elementos de δ.

Precisamos resolver o sistema

$$L(\beta_1) = 2t + 1 = c_1 t + (2c_2 - c_1)$$

$$\begin{cases} c_1 = 2 \\ 2c_2 - c_1 = 1 \end{cases}$$

Facilmente vemos $c_1 = 2$ e $c_2 = \frac{3}{2}$

Transformação linear e matriz associada

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow P_1$,

$$L(a, b) = (a + b)t + (2a - b)$$

com as bases $\beta = \{(1,1), (0,1)\}$ e $\delta = \{(t-1),\ 2\}$

Qual a matriz de *L* ??

2. Expressar como CL dos elementos de δ.

Portanto,

$$L(\beta_1) = 2t + 1$$

$$L(\beta_1) \cong \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}_\delta$$

Transformação linear e matriz associada

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow P_1$,

$$L(a,b) = (a+b)t + (2a-b)$$

com as bases $\beta = \{(1,1),(0,1)\}$ e $\delta = \{(t-1),\ 2\}$

Qual a matriz de L ??

2. Expressar como CL dos elementos de δ. Para $L(\beta_2)$

$$L(\beta_2) = t - 1 = d_1\delta_1 + d_2\delta_2 = d_1(t-1) + d_2 2$$

$$L(\beta_2) = t - 1 = d_1 t + (2d_2 - d_1)$$

$$\begin{cases} d_1 = 1 \\ 2d_2 - d_1 = -1 \end{cases}$$

Facilmente vemos $d_1 = 1$ e $d_2 = 0$

Transformação linear e matriz associada

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow P_1$,

$$L(a, b) = (a + b)t + (2a - b)$$

com as bases $\beta = \{(1,1), (0,1)\ \}$ e $\delta = \{(t - 1),\ 2\ \}$

Qual a matriz de *L* ??

1. Encontremos as imagens dos elementos da base β:

$L(\beta_1) = L(1,1) = 2t + 1$ $L(\beta_2) = L(0,1) = t - 1$

2. Determinemos as colunas para cada vetor imagem

$L(\beta_1) \cong \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}_\delta$ $L(\beta_2) \cong \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_\delta$

Transformação linear e matriz associada

Seja a transformação linear $L\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow P_1$,

$$L(a,b) = (a+b)t + (2a-b)$$

com as bases $\beta = \{(1,1),(0,1)\}$ e $\delta = \{(t-1),\ 2\}$

Qual a matriz de *L* ??

2. Determinemos as colunas para cada vetor imagem

$$L(\beta_1) \cong \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}_\delta \quad L(\beta_2) \cong \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_\delta$$

3. Construir a matriz: $[L]_\delta^\beta = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}_\delta^\beta$

Transformação – interpretação geométrica

Seja a transformação linear $L\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow P_1$,

$$L(a,b) = (a+b)t + (2a-b)$$

com as bases $\beta = \{(1,1),(0,1)\}$ e $\delta = \{(t-1),\ 2\}$

Como utilizar a matriz ?

A. Calcular imagens de qualquer dupla ordenada:

Seja (r,r) quais os polinômios que podem ser construídos? E qual sua característica particular?

Isto é, estamos interessados nas imagens de uma reta

$$\mathcal{L}\colon (x,y) = r(1,1) \ /\ r \in \mathbb{R}$$

Transformação – interpretação geométrica

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow P_1$,

$$L(a,b) = (a+b)t + (2a-b)$$

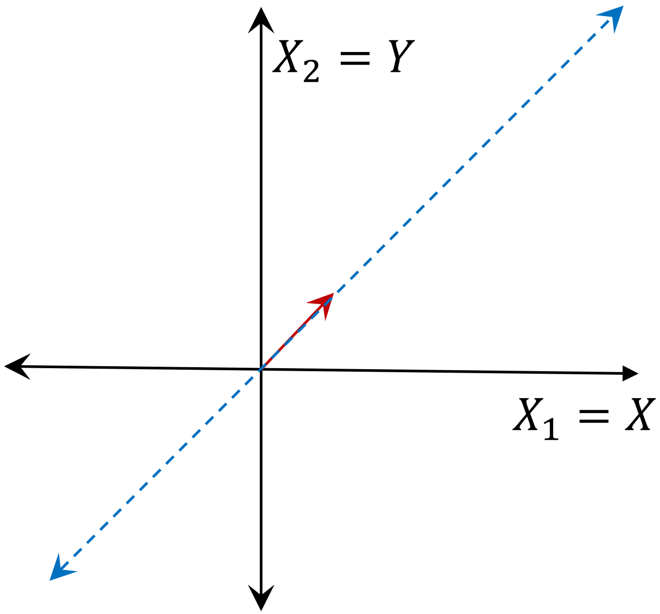
com as bases $\beta = \{(1,1),(0,1)\}$ e $\delta = \{(t-1),\ 2\,\}$

Como utilizar a matriz ?

A. Calcular imagens de qualquer dupla ordenada:

Seja (r,r)

$\mathcal{L}: (x,y) = r(1,1)\ /\ r \in \mathbb{R}$



Transformação – interpretação geométrica

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow P_1$,

$$L(a, b) = (a + b)t + (2a - b)$$

com as bases $\beta = \{(1,1), (0,1)\}$ e $\delta = \{(t - 1),\ 2\ \}$

Como utilizar a matriz ?

A. Calcular imagens de qualquer dupla ordenada:

A base não é canônica, calculamos as colunas (duplas)

Seja $(r, r) = f_1(1,1) + f_2(0,1) = (f_1, f_1 + f_2)$

resolvendo $f_1 = r$ e $f_2 = 0$.

$$(r, r) \cong \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}_\beta$$

Transformação – interpretação geométrica

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow P_1$,

$$L(a,b) = (a+b)t + (2a-b)$$

com as bases $\beta = \{(1,1),(0,1)\}$ e $\delta = \{(t-1),\ 2\}$

Como utilizar a matriz ?

A. Calcular imagens de qualquer dupla ordenada:

Para $(r,r) \cong \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}_\beta$

$$L\left(\begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}_\beta\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}_\delta^\beta \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}_\beta = \begin{bmatrix} 2r \\ \frac{3}{2}r \end{bmatrix}_\delta = r\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}_\delta$$

Transformação – interpretação geométrica

Seja a transformação linear $L\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow P_1$,

$$L(a,b) = (a+b)t + (2a-b)$$

com as bases $\beta = \{(1,1),(0,1)\}$ e $\delta = \{(t-1),\ 2\ \}$

Como utilizar a matriz ?

A. Observar: $L(r,r) = (2r)t + r$

$$rL(1,1) = r(2t+1)$$

Para

$$L\left(\begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}_\beta\right) = r\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}_\delta \cong r\left(2(t-1) + \frac{3}{2}(2)\right) = r(2t+1)$$

Transformação – interpretação geométrica

Seja a transformação linear $L\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow P_1$,

$$L(a, b) = (a + b)t + (2a - b)$$

com as bases $\beta = \{(1,1), (0,1)\}$ e $\delta = \{(t - 1),\ 2\}$

Como utilizar a matriz ?

A. Observar: $(r, r) = r(1,1)$ / $r \in \mathbb{R}$?

É uma reta em $\mathbb{R}^2$

E a imagem ?

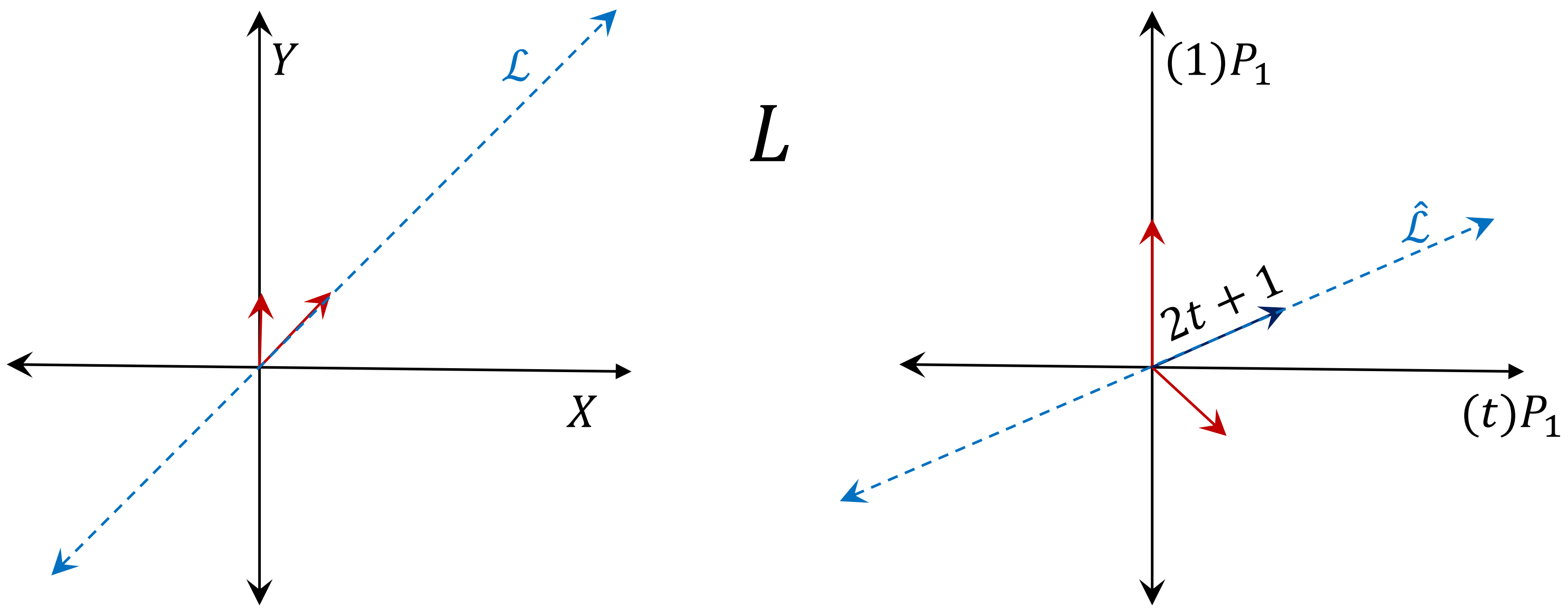
$$L\left(\begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}_\beta\right) = r\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}_\delta \cong r(2t + 1)$$

também é uma reta em P_1.

Transformação – interpretação geométrica

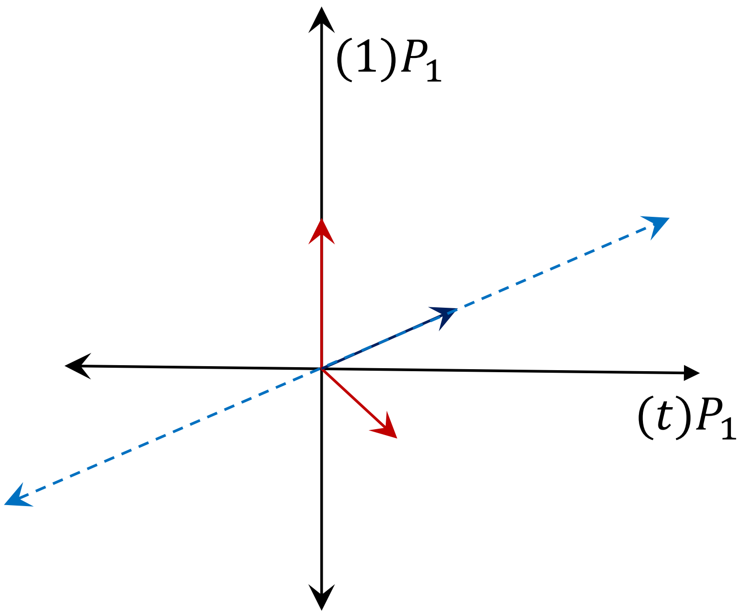
$$L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow P_1 \text{ e } \beta = \{(1,1),(0,1)\} \text{ e } \delta = \{(t-1),\ 2\}$$

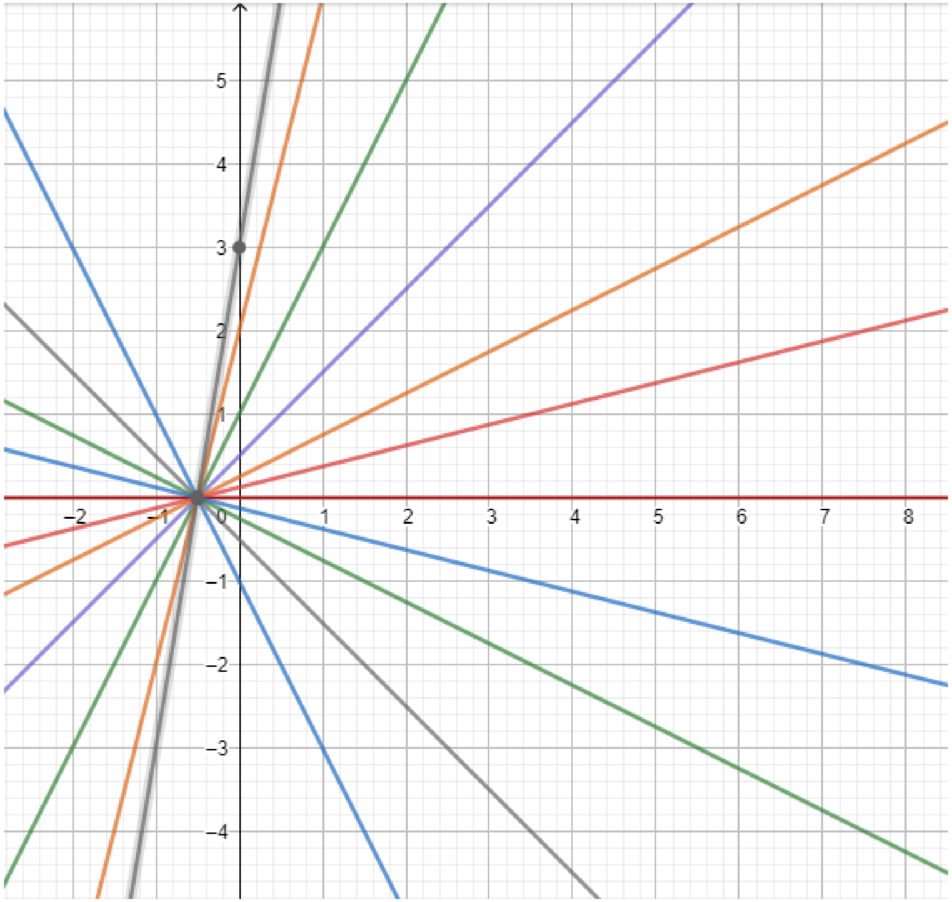
$$\mathcal{L}: p = r(1,1) / \ r \in \mathbb{R} \qquad \hat{\mathcal{L}}: p = r(2t+1) / \ r \in \mathbb{R}$$



Transformação – interpretação geométrica

Gráficos dos elementos da reta de polinômios





Intervalo para dúvidas

Transformação – interpretação geométrica

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow P_1$,

$$L(a,b) = (a+b)t + (2a-b)$$

com as bases $\beta = \{(1,1),(0,1)\}$ e $\delta = \{(t-1),\ 2\}$

Como utilizar a matriz ?

B. Seria muito mais fácil: $L(r,r) = r(2t+1)$

Porque utilizar a matriz associada ?

Resposta: Para automatizar cálculo computacional de transformações lineares.

Por agora parece pouco.

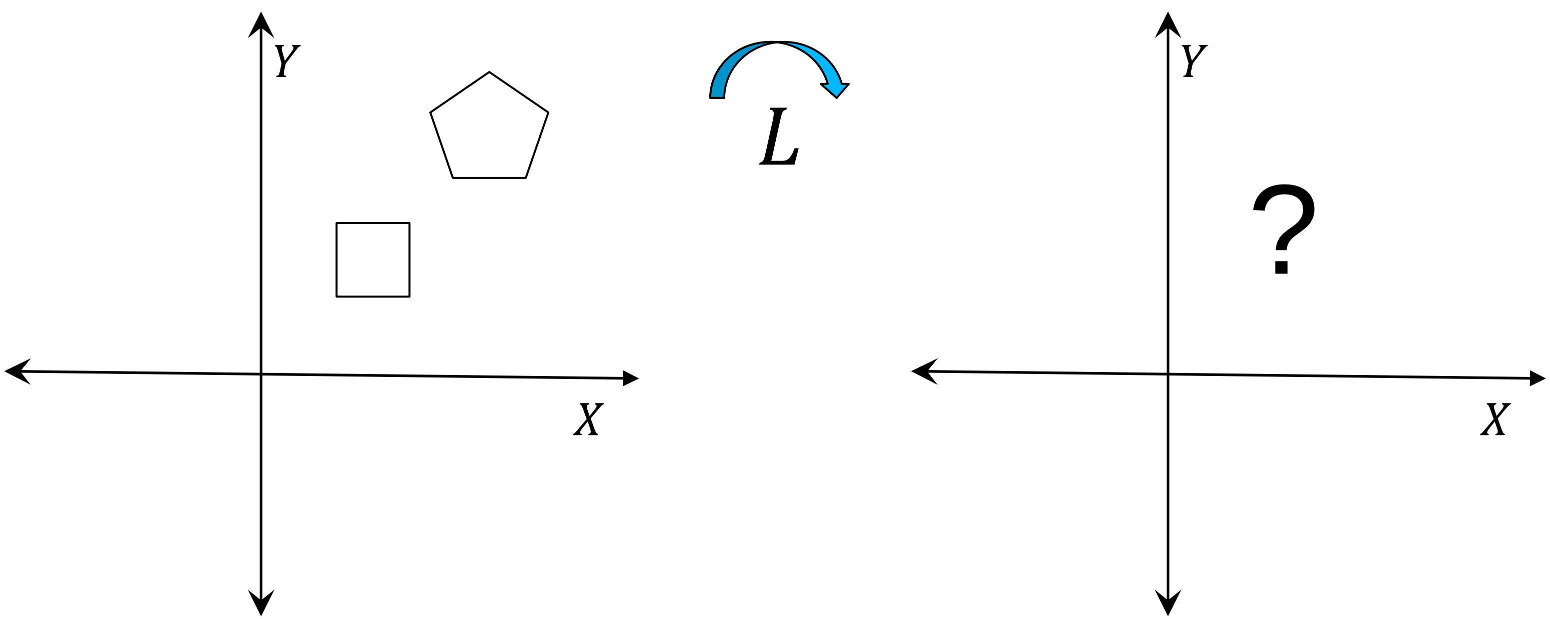
Principal uso: é utilizado quando temos poucos dados.

Transformação – interpretação geométrica

Para entender vejamos um exemplo:

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, com

$L(x, y) = (x + y, 2x + 3y)$. O que faz L ???

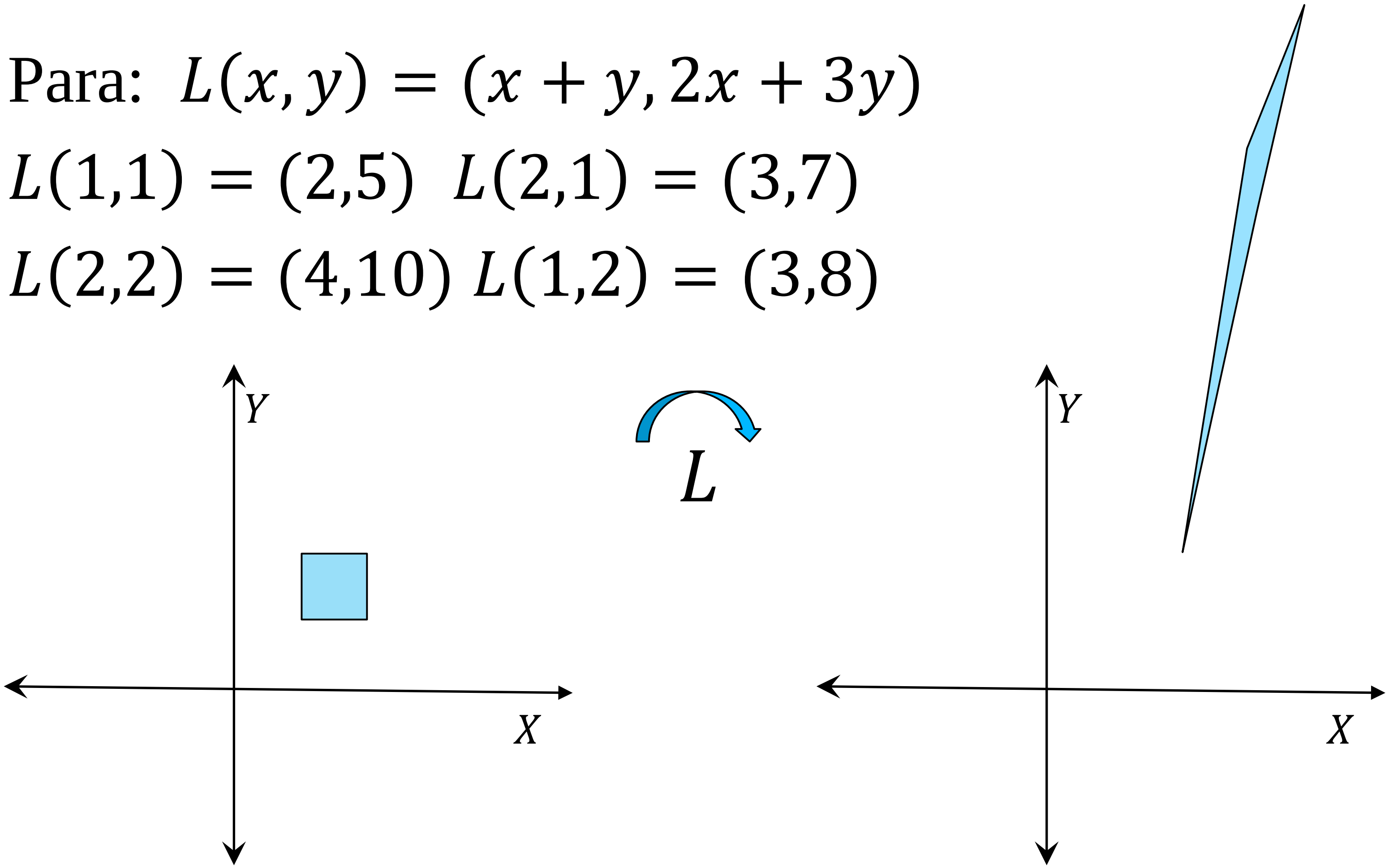


Transformação – interpretação geométrica

Para: $L(x, y) = (x + y, 2x + 3y)$

$L(1,1) = (2,5)$ $L(2,1) = (3,7)$

$L(2,2) = (4,10)$ $L(1,2) = (3,8)$

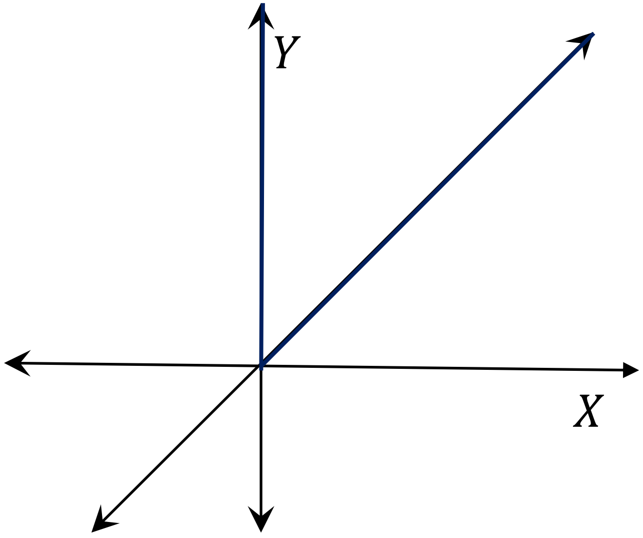


Deformou o quadrado. Não é triângulo.

Transformação – interpretação geométrica

Na prática precisamos deformar um objeto (figura) considerando que conhecemos alguns dados e isso deve ser um padrão para toda outra deformação.

- Preciso deformar com uma transformação linear.
- No caso não tenho fórmula definida.
- Poucos dados.



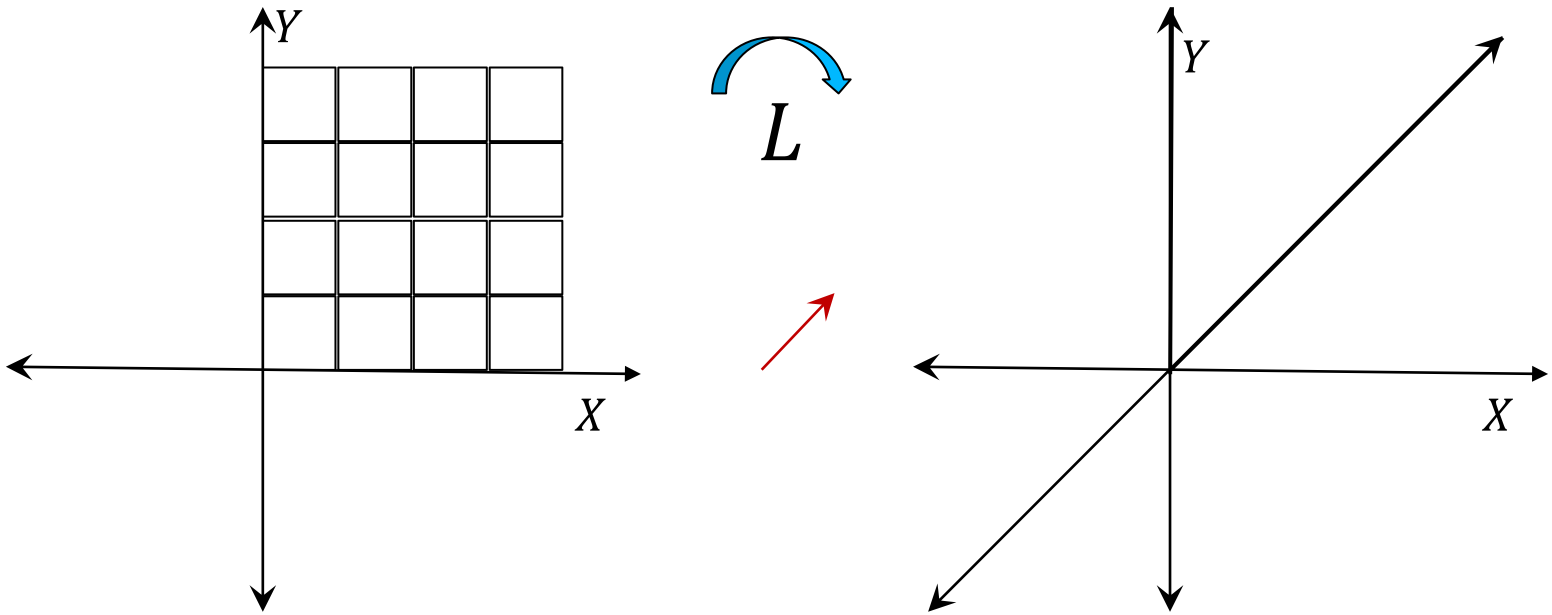
Exemplo: Tenho um espaço para transporte como na figura.

Transformação – interpretação geométrica

Exemplo:

Precisamos de uma transformação linear $L\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$L(x, y) = ???$$

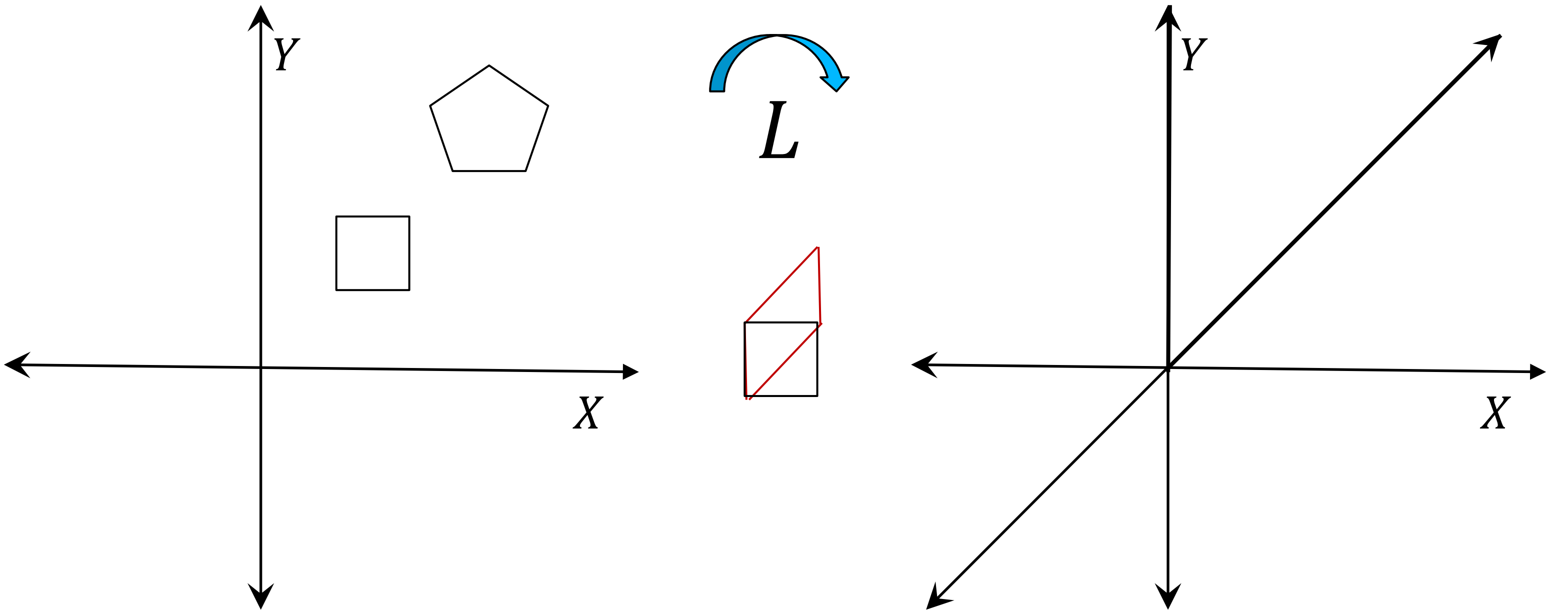


Transformação – interpretação geométrica

Exemplo:

Precisamos de uma transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$L(x,y) = ???$ Deforme o quadrado sem perder a área.

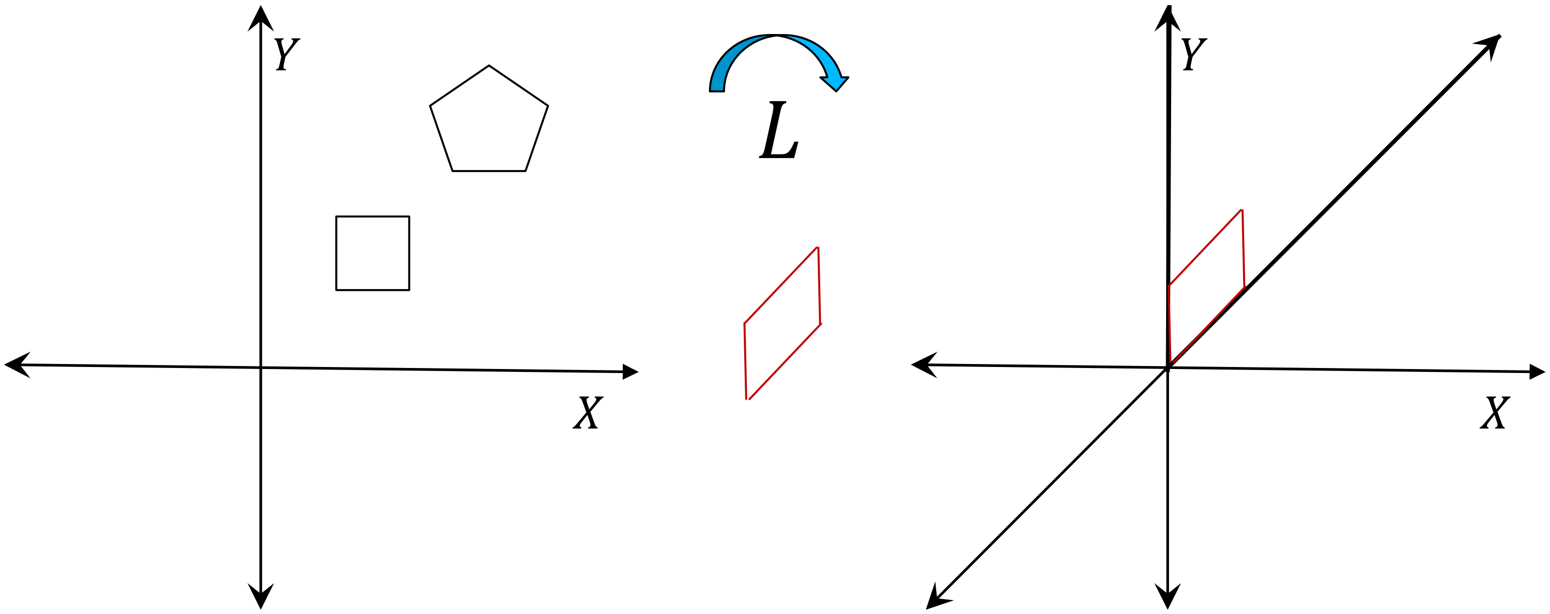


Transformação – interpretação geométrica

Exemplo:

Precisamos de uma transformação linear $L\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

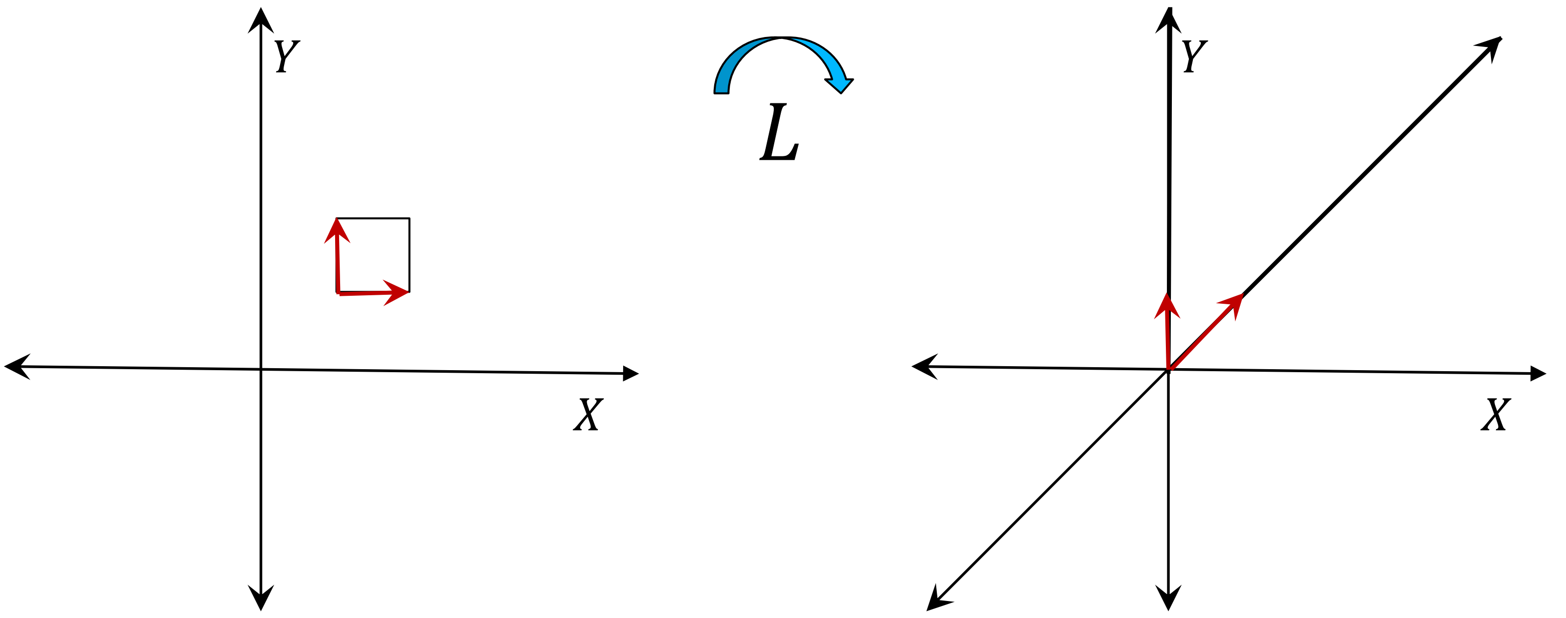
$L(x, y) = ???$



Transformação – interpretação geométrica

Precisamos de uma transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$L(x, y) \cong L\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left[[L(\beta_1)]_\delta [L(\beta_2)]_\delta\right]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

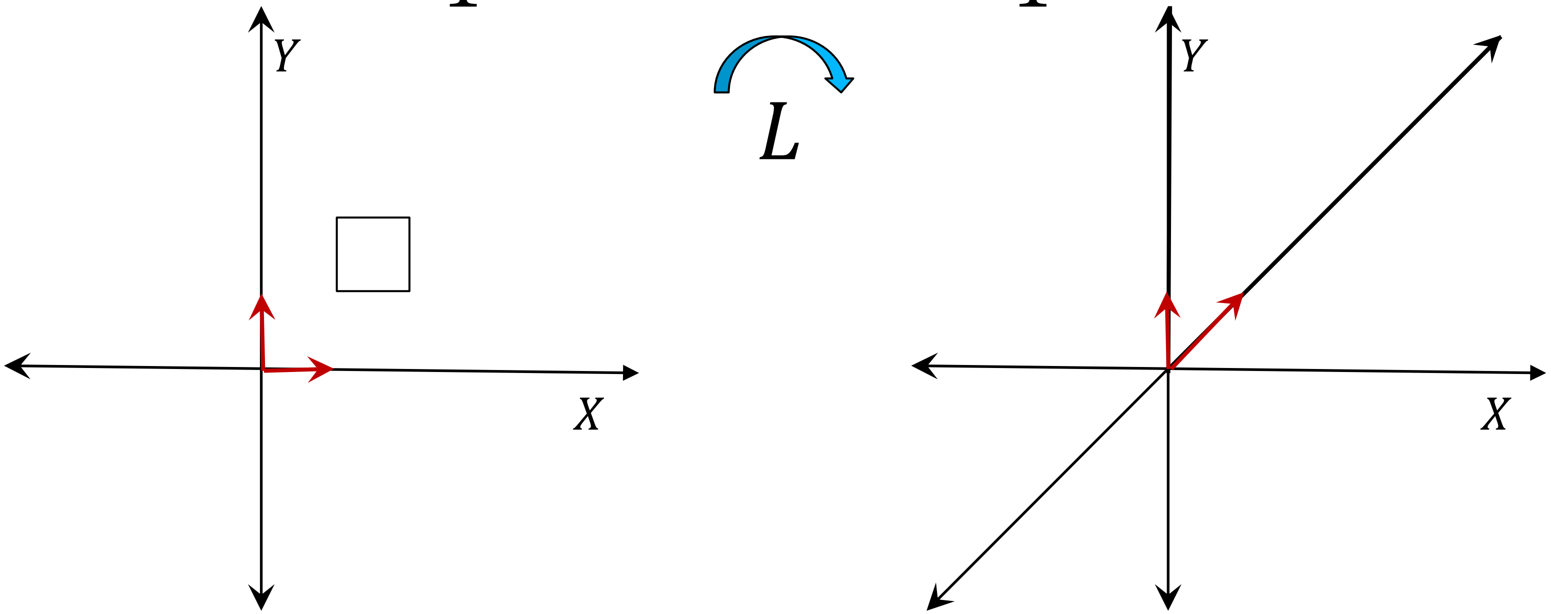


Transformação – interpretação geométrica

Precisamos de uma transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\delta = \{(1,0),(0,1)\}$

$[L(\beta_1)]_\delta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $[L(\beta_2)]_\delta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

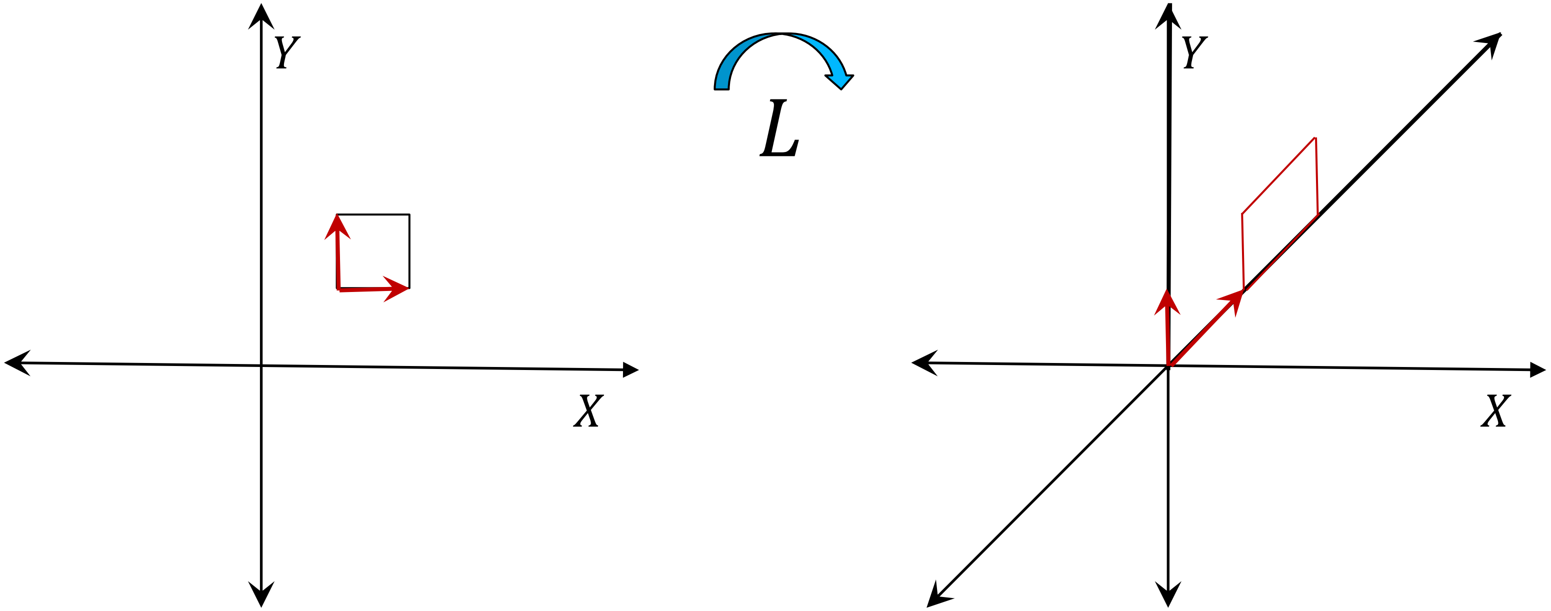


Transformação – interpretação geométrica

Assim, temos a transformação linear $L\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$[L]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x+y \end{bmatrix} \Rightarrow L(x,y) = (x, x+y)$$

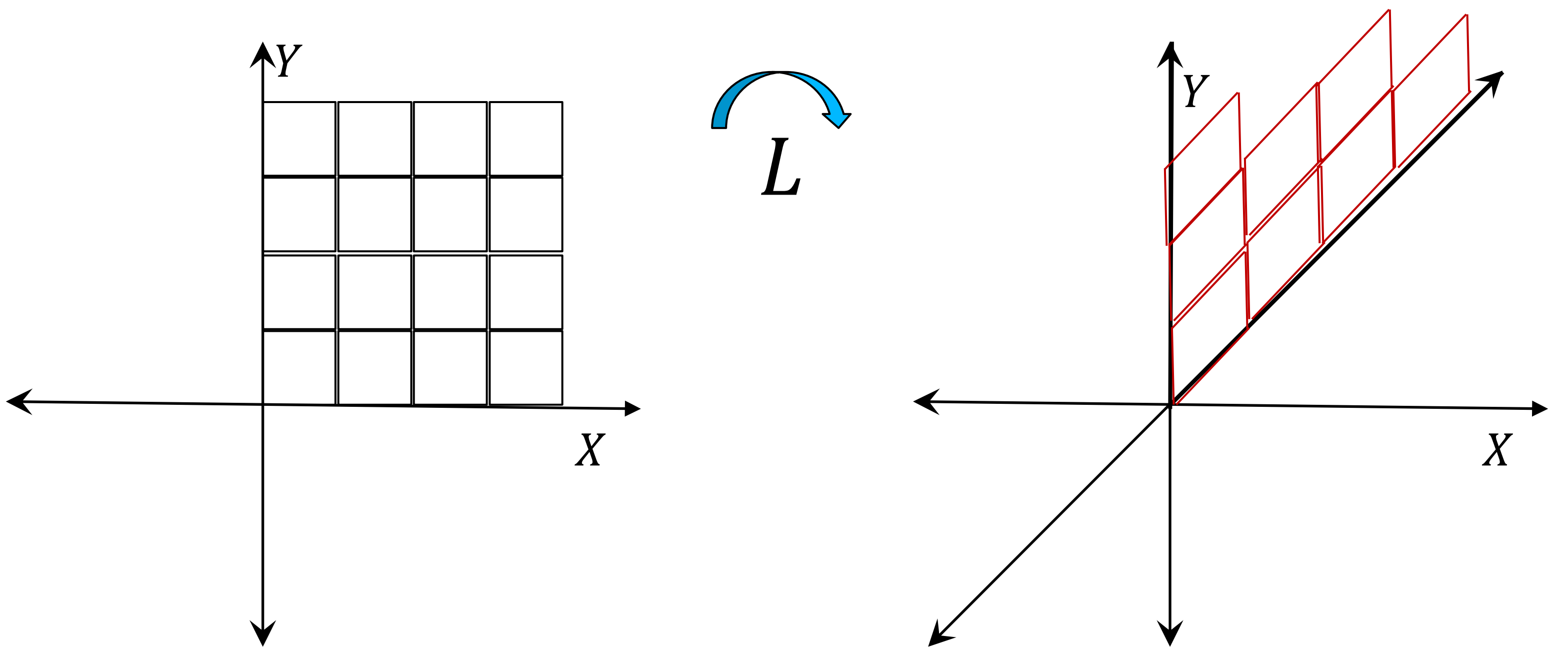
$L(1,1) = (1,2)$ $L(2,1) = (2,3)$ $L(2,2) = (2,4)$ $L(1,2) = (1,3)$



Transformação – interpretação geométrica

Determinamos a transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

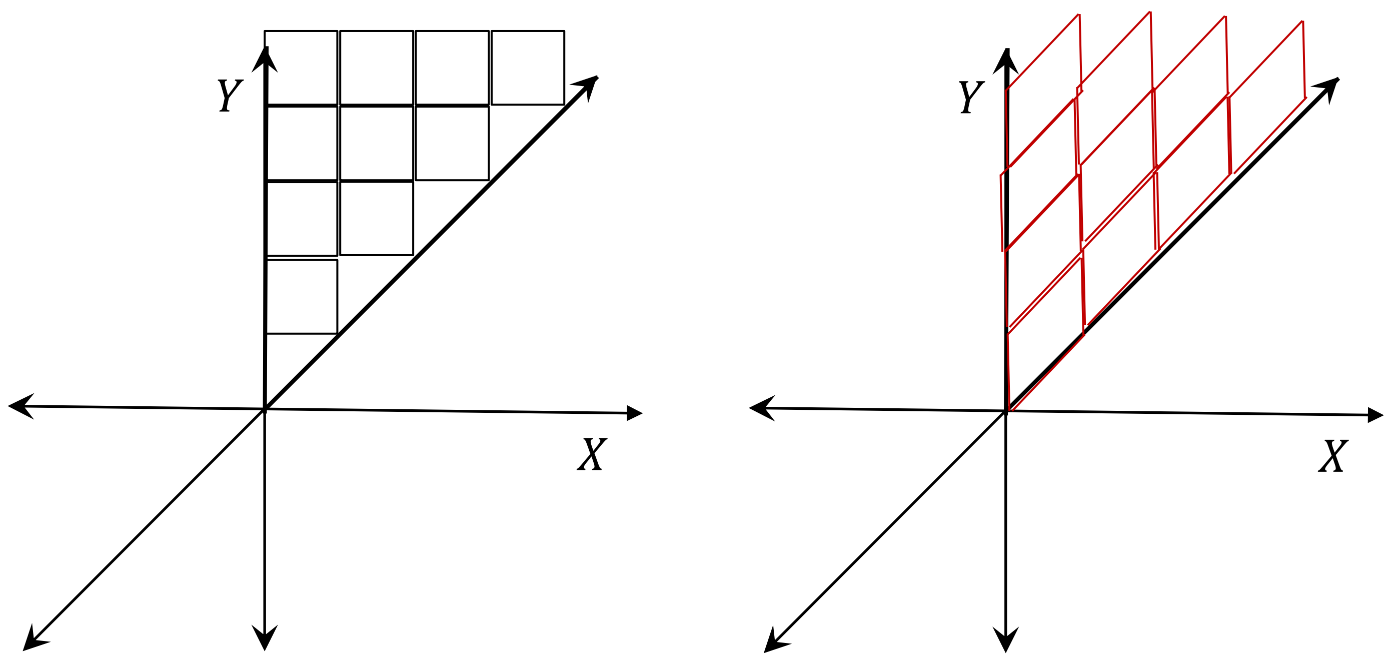
$$L(x, y) = (x, x + y)$$



Transformação – interpretação geométrica

Determinamos a transformação linear $L\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$L(x, y) = \ (x, x + y)$$



Transformação – interpretação geométrica

Assim, é possível definir uma transformação linear utilizando um número de dados igual à dimensão do espaço de partida.

Todo o trabalho foi identificar as imagens dos elementos da base, atendendo o problema.

Com esses dados é possível determinar uma matriz associada a uma transformação linear.

A partir da matriz pode-se determinar uma fórmula para a transformação linear procurada.

Intervalo para dúvidas

O que significa bases diferentes ??

Quando U e W são o mesmo espaço vetorial mas as bases são diferentes

$$\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_n\} \text{ e } \delta = \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$$

O que significa ???

Por exemplo:

$U = \mathbb{R}^2$ com a base $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$, e

$W = \mathbb{R}^2$ com a base $\delta = \{(1,1), (0,1)\}$

O que significa bases diferentes ??

Exemplo: $U = \mathbb{R}^2$ e $W = \mathbb{R}^2$ com as bases diferentes

$$\beta = \{(1,0),(0,1)\} \text{ e } \delta = \{(1,1),(0,1)\}$$

Para poder identificar o que significa, utilizemos a transformação linear "identidade" entre os espaços.

Seja $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, com $L(x,y) = (x,y)$.

$$L(1,0) = (1,0)$$

$$L(0,1) = (0,1)$$

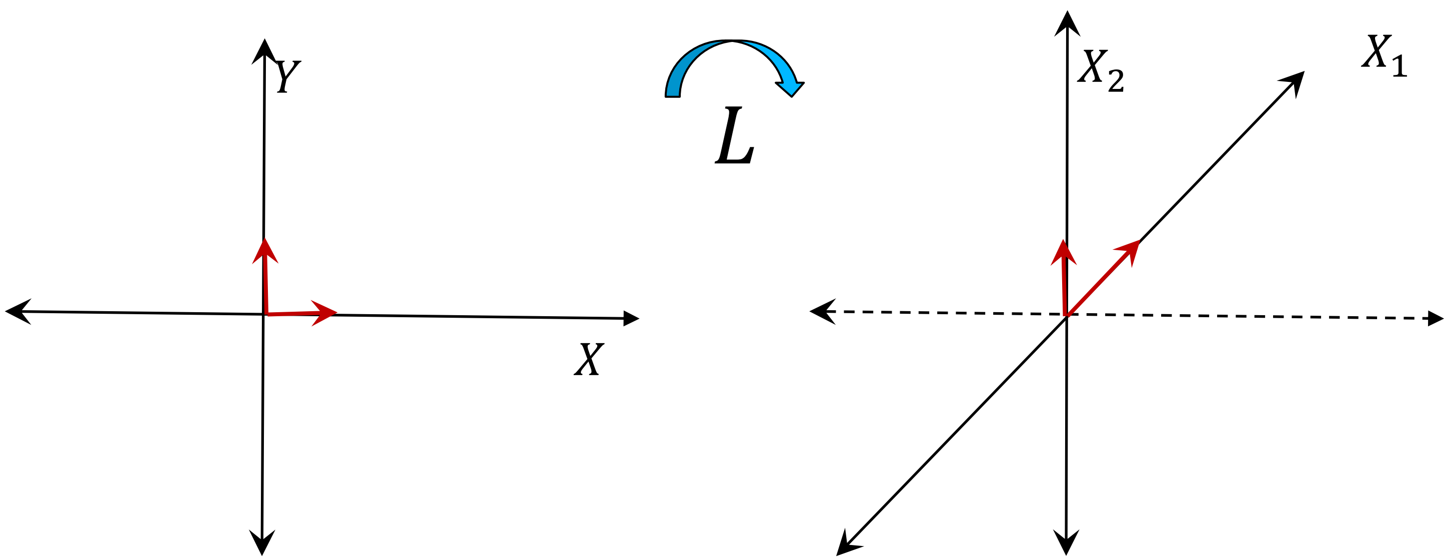
O que significa bases diferentes ??

Exemplo: $U = \mathbb{R}^2$ e $W = \mathbb{R}^2$ com as bases diferentes

$$\beta = \{(1{,}0), (0{,}1)\} \;\text{ e }\; \delta = \{(1{,}1), (0{,}1)\}$$

Seja $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, com $L(x, y) = (x, y)$.

$L(1{,}0) = (1{,}0) \quad L(0{,}1) = (0{,}1)$



O que significa bases diferentes ??

Seja $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x, y) = (x, y)$ com as bases

$$\beta = \{(1,0), (0,1)\} \text{ e } \delta = \{(1,1), (0,1)\}$$

Para montar a matriz da TL combinamos os β em δ:

$$L(1,0) = (1,0) = c_1(1,1) + c_2(0,1) = (c_1, c_1 + c_2)$$

$c_1 = 1$ e $c_2 = -1$

$$L(0,1) = (0,1) = d_1(1,1) + d_2(0,1) = (d_1, d_1 + d_2)$$

$d_1 = 0$ e $d_2 = 1$

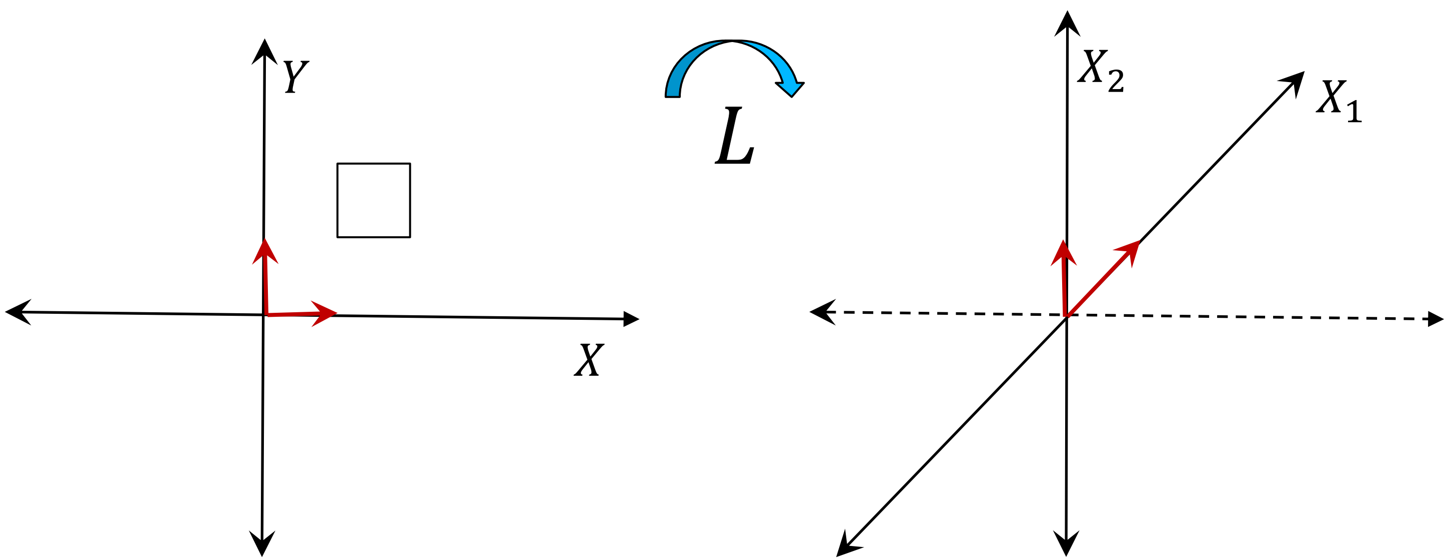
$$[L]_\delta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_\delta^\beta$$

O que significa bases diferentes ??

Seja $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x, y) = (x, y)$ com as bases

$$\beta = \{(1,0), (0,1)\} \text{ e } \delta = \{(1,1), (0,1)\}$$

Vejamos a transformação do quadrado com vértices em P = (1,1), Q = (2,1), R = (2,2) e S = (1,2)



O que significa bases diferentes ??

Seja $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ L(x,y) = (x,y)$ com as bases

$$\beta = \{(1,0),(0,1)\} \text{ e } \delta = \{(1,1),(0,1)\}$$

$$\mathrm{P} = (1,1) \Rightarrow [L]\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}_\delta^\beta \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_\delta$$

$$\mathrm{Q} = (2,1) \Rightarrow [L]\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}_\delta^\beta \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}_\delta$$

$$\mathrm{R} = (2,2) \Rightarrow [L]\left(\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}_\delta^\beta \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}_\delta$$

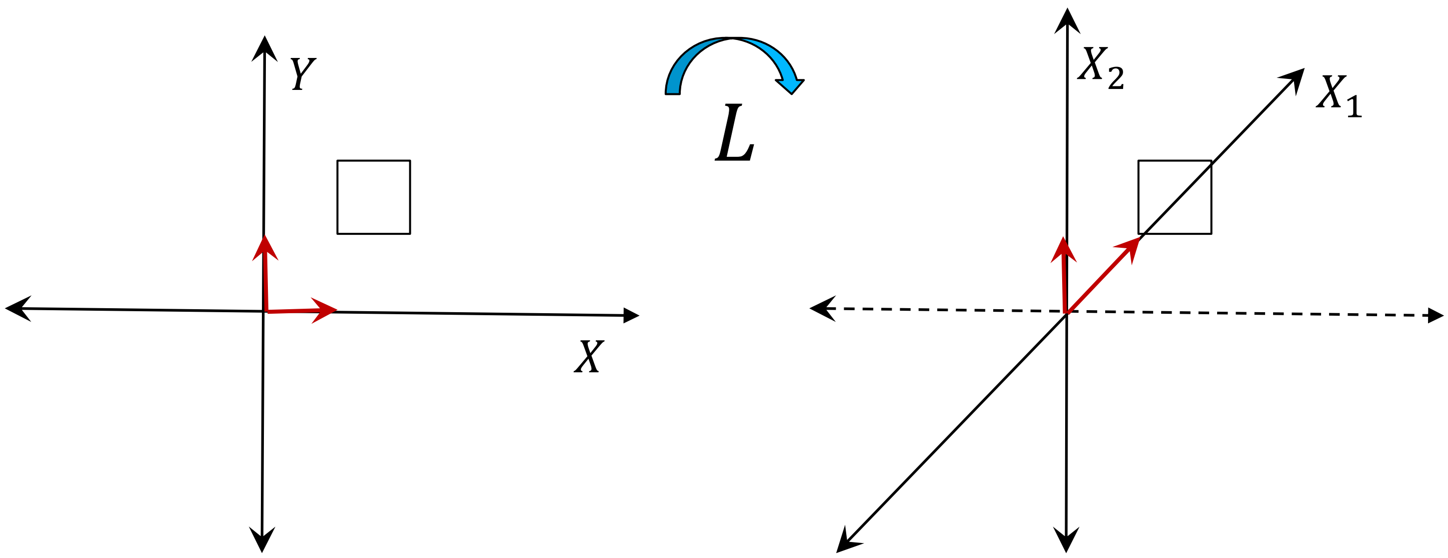
$$\mathrm{S} = (1,2) \Rightarrow [L]\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}_\delta^\beta \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}_\delta$$

O que significa bases diferentes ??

Seja $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x,y) = (x,y)$ com as bases

$$\beta = \{(1,0),(0,1)\} \text{ e } \delta = \{(1,1),(0,1)\}$$

$$[L](P) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_\delta, [L](Q) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}_\delta, [L](R) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}_\delta, [L](S) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_\delta$$

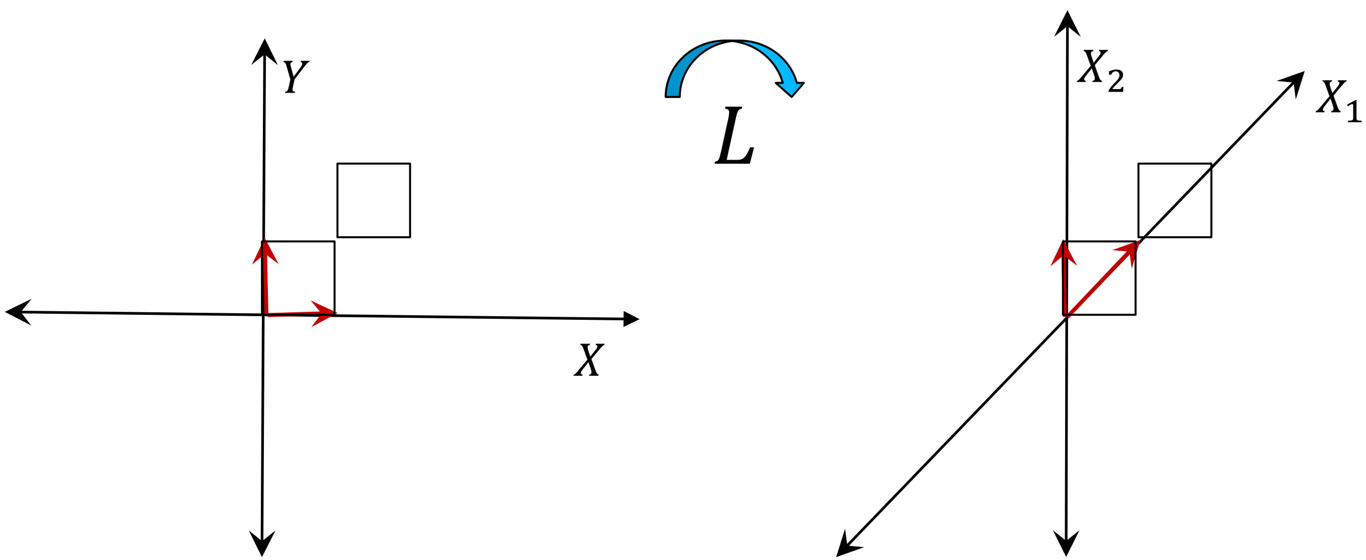


O que significa bases diferentes ??

Seja $L:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x,y) = (x,y)$ com as bases

$$\beta = \{(1,0),(0,1)\} \text{ e } \delta = \{(1,1),(0,1)\}$$

Observar: Com a base δ temos outros eixos e a medida da unidade depende dos vetores da base ...



Intervalo para dúvidas

Mudança de coordenadas

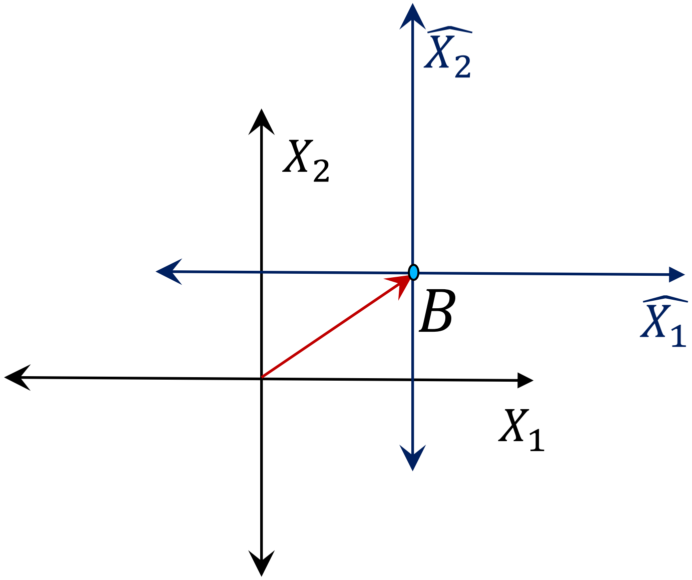
Mudança de coordenadas por translação

Considera-se: $X = \hat{X} + B$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{x_1} \\ \widehat{x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \widehat{x_1} \\ \widehat{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{x_1} = x_1 - b_1 \\ \widehat{x_2} = x_2 - b_2 \end{cases}$$

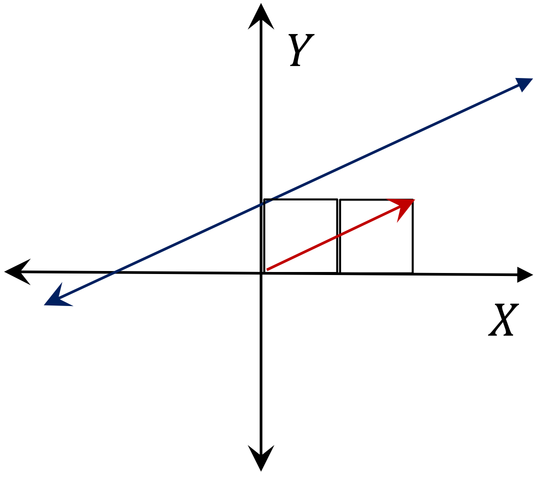


Mudança de coordenadas

Consideremos uma reta que nos eixos originais não é espaço vetorial, podemos fazer dela um espaço vetorial ? A reta representa um dado principal ...

Suponha que a reta $2y - x = 2$

é a estrada principal da planta.



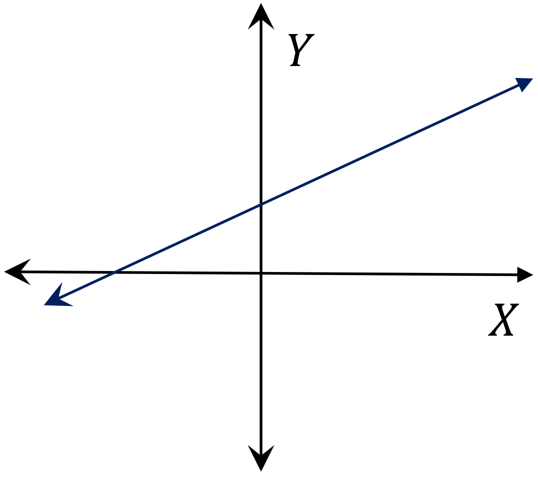
Como fazer para que

seja espaço vetorial? , sem modificar nenhuma instalação que provavelmente já está desenhada...

Mudança de coordenadas

Consideremos uma reta que nos eixos originais não é espaço vetorial, podemos fazer dela um espaço vetorial ? A reta representa um dado principal ...

Suponha que a reta $2y - x = 2$ é a estrada principal da planta. Lembrando: Para ser espaço vetorial deve passar pela origem.



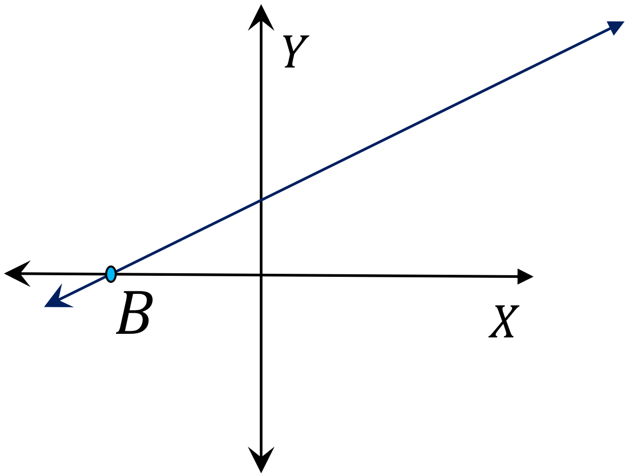
Não passa pela origem: substituindo $(0,0)$ dá $0 = 2$.

Mudança de coordenadas

Parece uma boa ideia, considerar uma equação igualada a zero. Então: $2y - x = 2$

escrevemos: $2y - x - 2 = 0$

$$2y - (x + 2) = 0$$



Aqui aplicamos a translação de eixos, da forma mais simples

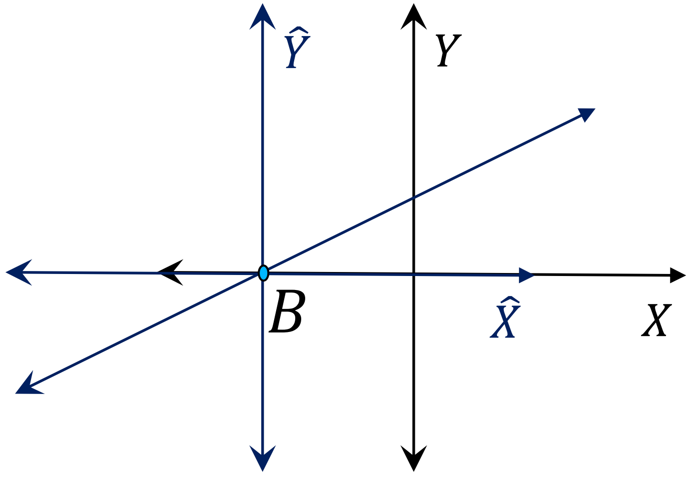
$$\begin{cases} \hat{x} = x + 2 \\ \hat{y} = y \end{cases}$$

Construímos $B = (-2,0)$, que será a nova origem.

Mudança de coordenadas

Assim, a reta: $2y - x = 2$

ou $2y - (x + 2) = 0$



Representa-se por

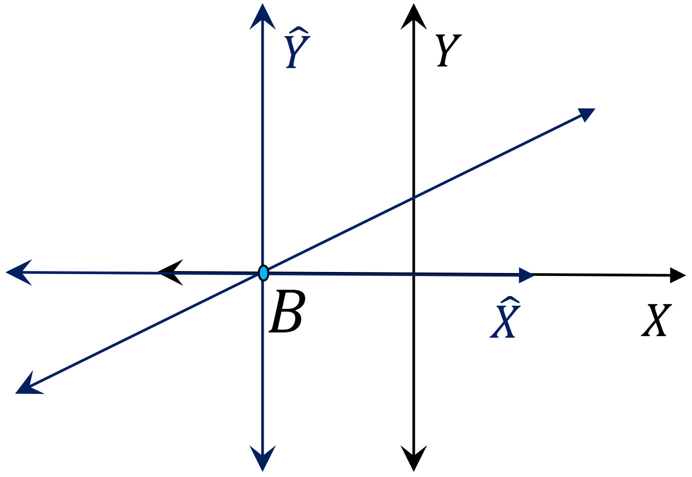
$2\hat{y} - \hat{x} = 0$

Temos deslocado os eixos ao ponto de interseção da reta com o eixo das abcissas, o somando alterado foi o correspondente a x.

Mudança de coordenadas

Assim, a reta: $2y - x = 2$

ou $2y - (x + 2) = 0$



Representa-se por

$2\hat{y} - \hat{x} = 0$

Por outro lado, se é conhecido um ponto especial da reta (prédio principal), o qual sendo a origem, facilitaria referenciar outras unidades, então o ponto B deveria ser essa informação.

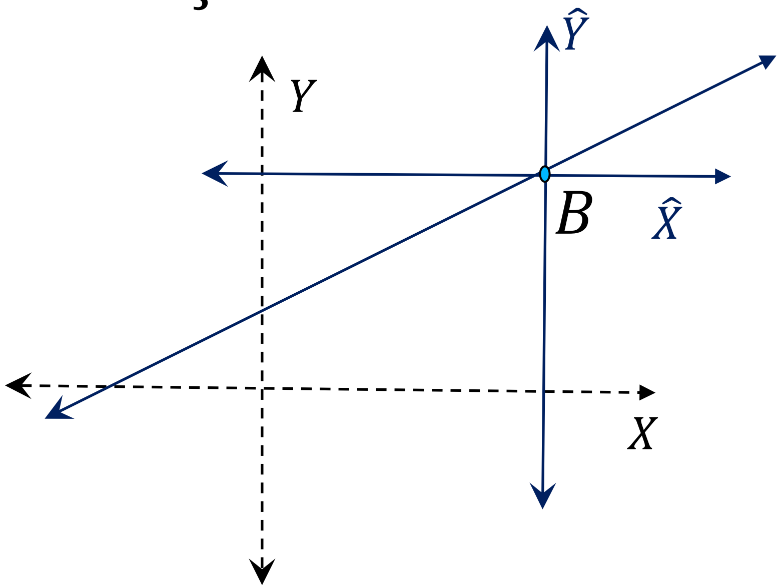
Mudança de coordenadas

Seja a reta: $2y - x = 2$

Supondo que o ponto de interesse é $B = (4,3)$

Então, pelas fórmulas da mudança

$$\begin{cases} \hat{x} = x - 4 \\ \hat{y} = y - 3 \end{cases}$$



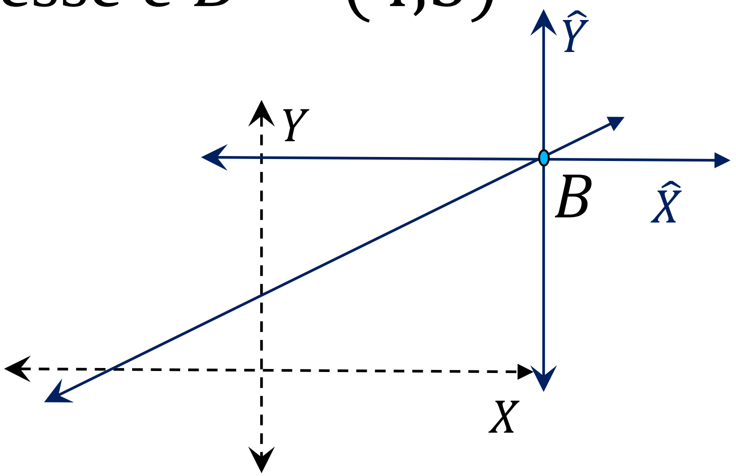
Daqui

$$\begin{cases} x = \hat{x} + 4 \\ y = \hat{y} + 3 \end{cases}.$$

Mudança de coordenadas

Seja a reta: $2y - x = 2$

Supondo que o ponto de interesse é $B = (4,3)$



Então,

$$\begin{cases} x = \hat{x} + 4 \\ y = \hat{y} + 3 \end{cases}.$$

Substituindo temos:

$$2y - x = 2 \Rightarrow 2(\hat{y} + 3) - (\hat{x} + 4) = 2$$

A equação da reta é:

$$2\hat{y} - \hat{x} = 0$$

Intervalo para dúvidas

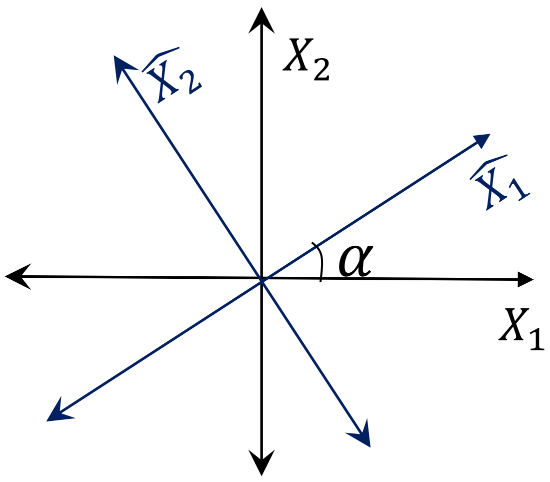
Mudança de coordenadas

Mudança de coordenadas por rotação

Considera-se: $X = A\hat{X}$, onde A é a matriz de rotação de α graus. A matriz A^{-1} é a rotação de $(-\alpha)$ graus.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \widehat{x_1} \\ \widehat{x_2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \widehat{x_1} \\ \widehat{x_2} \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{x_1} = x_1 cos\alpha + x_2 sen\alpha \\ \widehat{x_2} = -x_1 sen\alpha + x_2 cos\alpha \end{cases}$$

Mudança de coordenadas

Com a mudança de eixos por translação a reta passa pela origem adequada.

Com esse sucesso, pensamos:

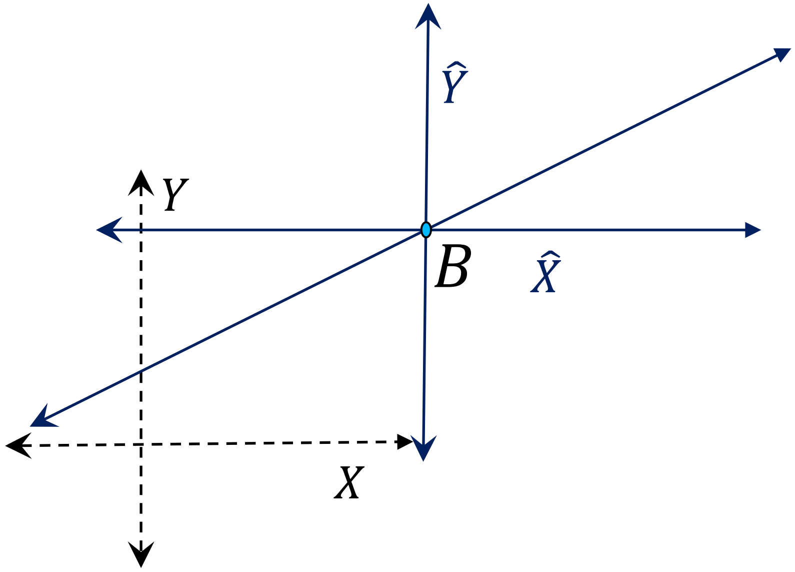
E a reta poderia ser um eixo de referência ???

A equação da reta é:

$$2\hat{y} - \hat{x} = 0$$

onde

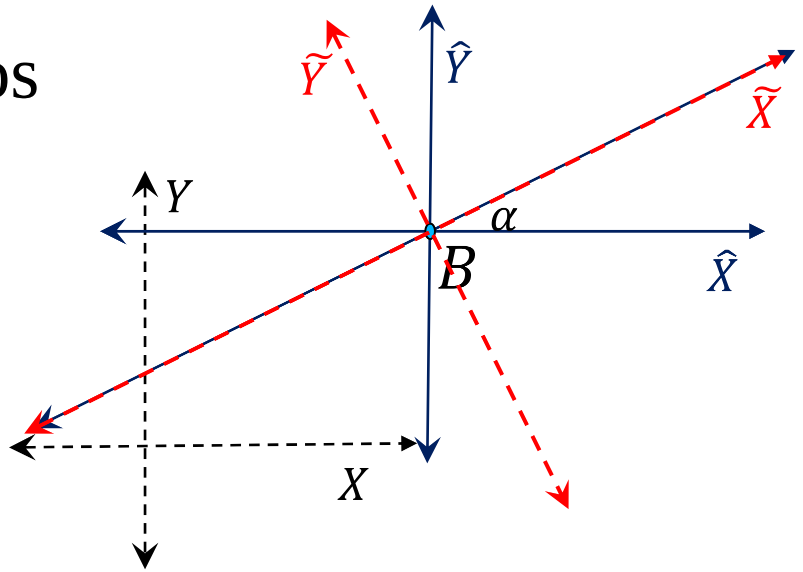
$$\begin{cases} \hat{x} = x + 4 \\ \hat{y} = y + 3 \end{cases}$$



Mudança de coordenadas

Basta rotacionar os eixos $\hat{X}\hat{Y}$ obtendo novos eixos $\tilde{X}\tilde{Y}$ fazendo que o eixo $\tilde{X}$ seja a reta desejada.

Mas quantos graus devemos girar para conseguir ???



A reta é: $2\hat{y} - \hat{x} = 0$

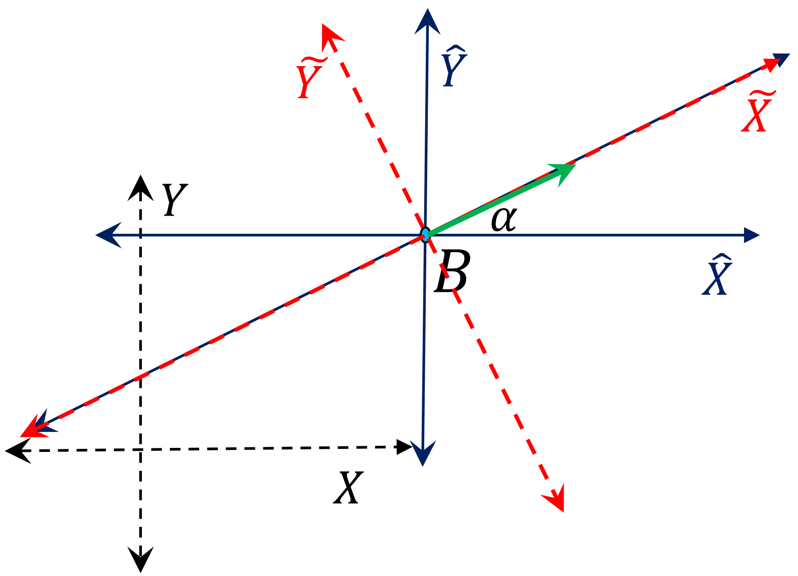
Precisamos do vetor de direção da reta $v = (2,1)$

Mudança de coordenadas

Rotacionando os eixos $\hat{X}\hat{Y}$ para os novos eixos $\tilde{X}\tilde{Y}$.

A reta é: $2\hat{y} - \hat{x} = 0$

A mudança por rotação:



$$\begin{cases} \widehat{x_1} = x_1 cos\alpha + x_2 sen\alpha \\ \widehat{x_2} = -x_1 sen\alpha + x_2 cos\alpha \end{cases}$$

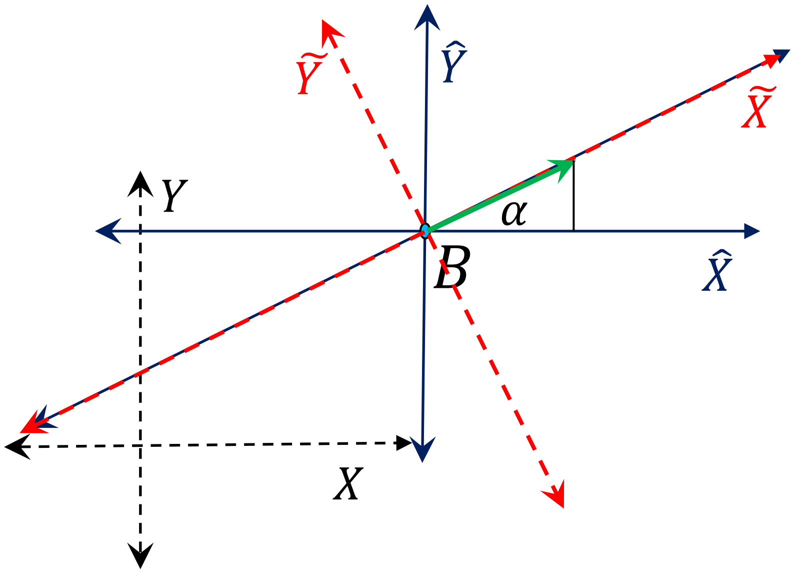
$$\begin{cases} \tilde{x} = \hat{x} cos\alpha + \hat{y} sen\alpha \\ \tilde{y} = -\hat{x} sen\alpha + \hat{y} cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{x} = \tilde{x} cos\alpha - \tilde{y} sen\alpha \\ \hat{y} = \tilde{x} sen\alpha + \tilde{y} cos\alpha \end{cases}$$

Mudança de coordenadas

Rotacionando os eixos $\hat{X}\hat{Y}$ para os novos eixos $\tilde{X}\tilde{Y}$.

A reta é: $2\hat{y} - \hat{x} = 0$



A mudança por rotação:

$$\begin{cases} \hat{x} = \tilde{x}cos\alpha - \tilde{y}sen\alpha \\ \hat{y} = \tilde{x}sen\alpha + \tilde{y}cos\alpha \end{cases}$$

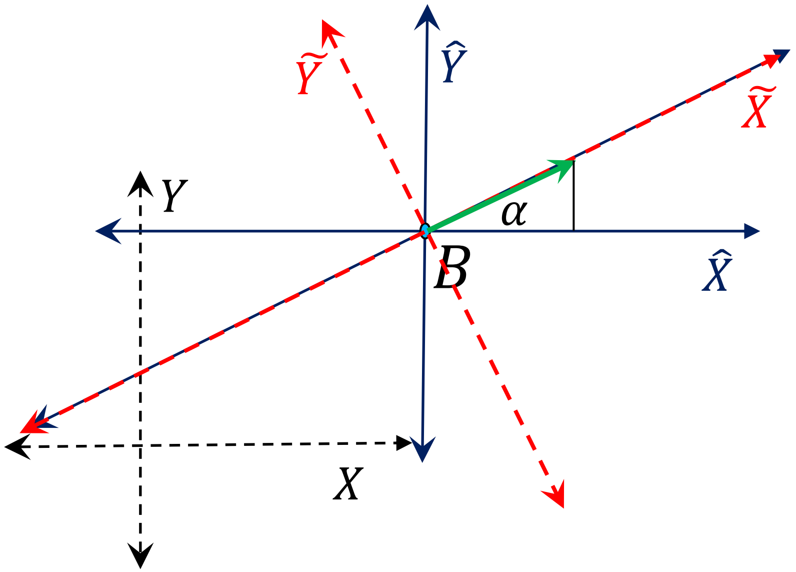
Com o vetor de direção da

reta $v = (2,1)$ obtemos $cos\alpha$ e $sen\alpha$.

Mudança de coordenadas

Rotacionando os eixos $\hat{X}\hat{Y}$ para os novos eixos $\tilde{X}\tilde{Y}$.

A reta é: $2\hat{y} - \hat{x} = 0$



$$cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

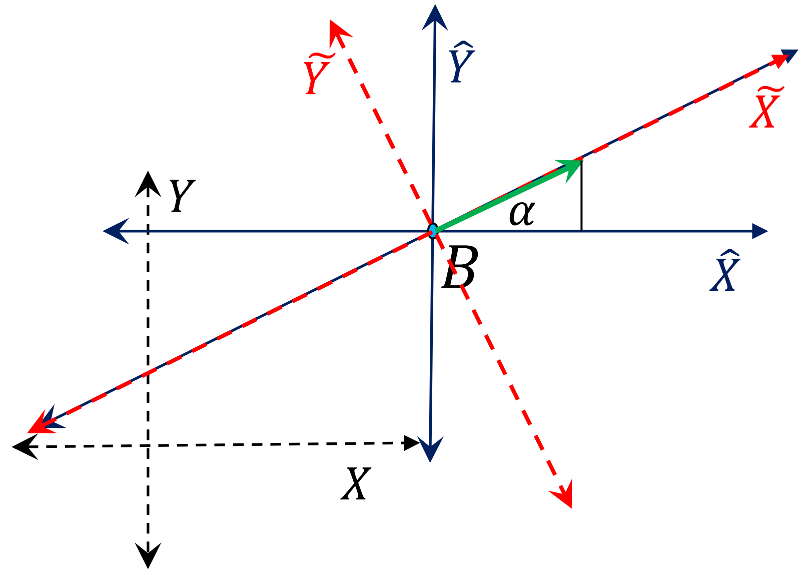
$$sen\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{cases} \hat{x} = \tilde{x}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \tilde{y}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ \hat{y} = \tilde{x}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \tilde{y}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \end{cases}$$

Mudança de coordenadas

Rotacionando os eixos $\hat{X}\hat{Y}$ para os novos eixos $\tilde{X}\tilde{Y}$.

A reta é: $2\hat{y} - \hat{x} = 0$



$$\begin{cases} \hat{x} = \tilde{x}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \tilde{y}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ \hat{y} = \tilde{x}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \tilde{y}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \end{cases}$$

Então

$$2\hat{y} - \hat{x} = 0$$

$$2\left(\tilde{x}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \tilde{y}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right) - \left(\tilde{x}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \tilde{y}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right) = 0$$

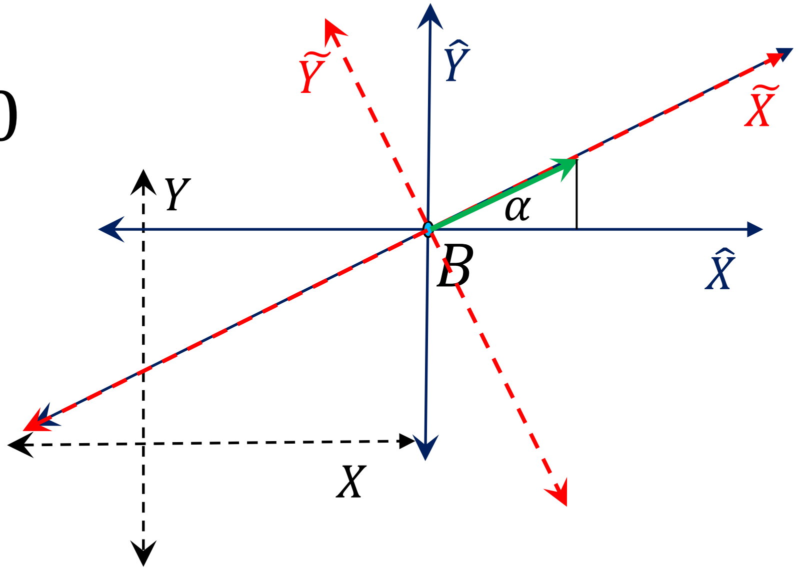
Mudança de coordenadas

Rotacionando os eixos $\hat{X}\hat{Y}$ para os novos eixos $\tilde{X}\tilde{Y}$.

A reta é: $2\hat{y} - \hat{x} = 0$

$$2(\tilde{x} + 2\tilde{y}) - (2\tilde{x} - \tilde{y}) = 0$$

$$(2\tilde{x} + 4\tilde{y}) - 2\tilde{x} + \tilde{y} = 0$$



Reduzindo

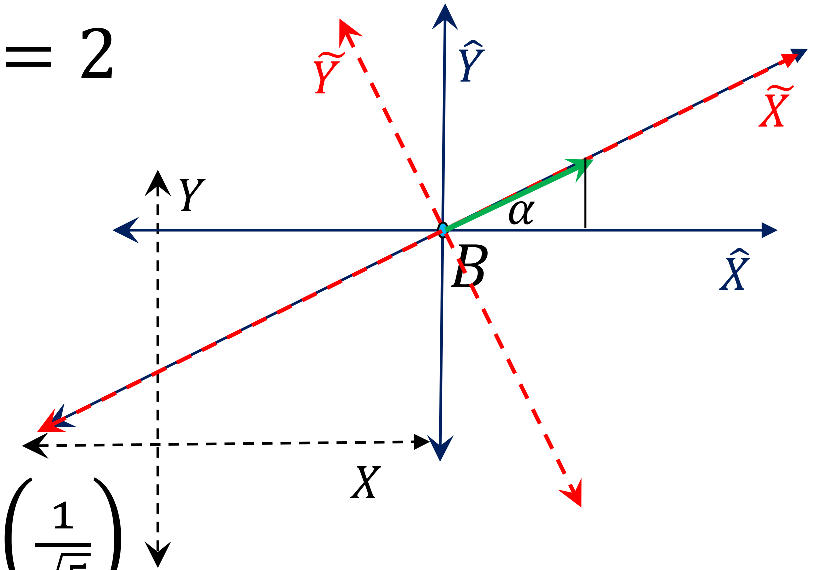
$$\tilde{y} = 0$$

Certíssimo, a reta nos novos eixos é uma reta horizontal e sobre o eixo das abcissas.

Observar: A equação reduzida.

Mudança de coordenadas

Relacionando os eixos XY com $\hat{X}\hat{Y}$ e com $\tilde{X}\tilde{Y}$.



Equação original: $2y - x = 2$

Translação: $\begin{cases} x = \hat{x} + 4 \\ y = \hat{y} + 3 \end{cases}$

Equação: $2\hat{y} - \hat{x} = 0$

Rotação: $\begin{cases} \hat{x} = \tilde{x}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \tilde{y}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ \hat{y} = \tilde{x}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \tilde{y}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \end{cases}$

Equação: $\tilde{y} = 0$

Dúvidas ???