ZAB0161 - Álgebra Linear com Aplicações em Geometria Analítica

Geometria vetorial

Planos em $\mathbb{R}^{n}$ $\left(\mathbb{R}^{2}, \mathbb{R}^{3}\right)$

Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle

ZAB (Dpto. de Ciências Básicas) – FZEA – USP

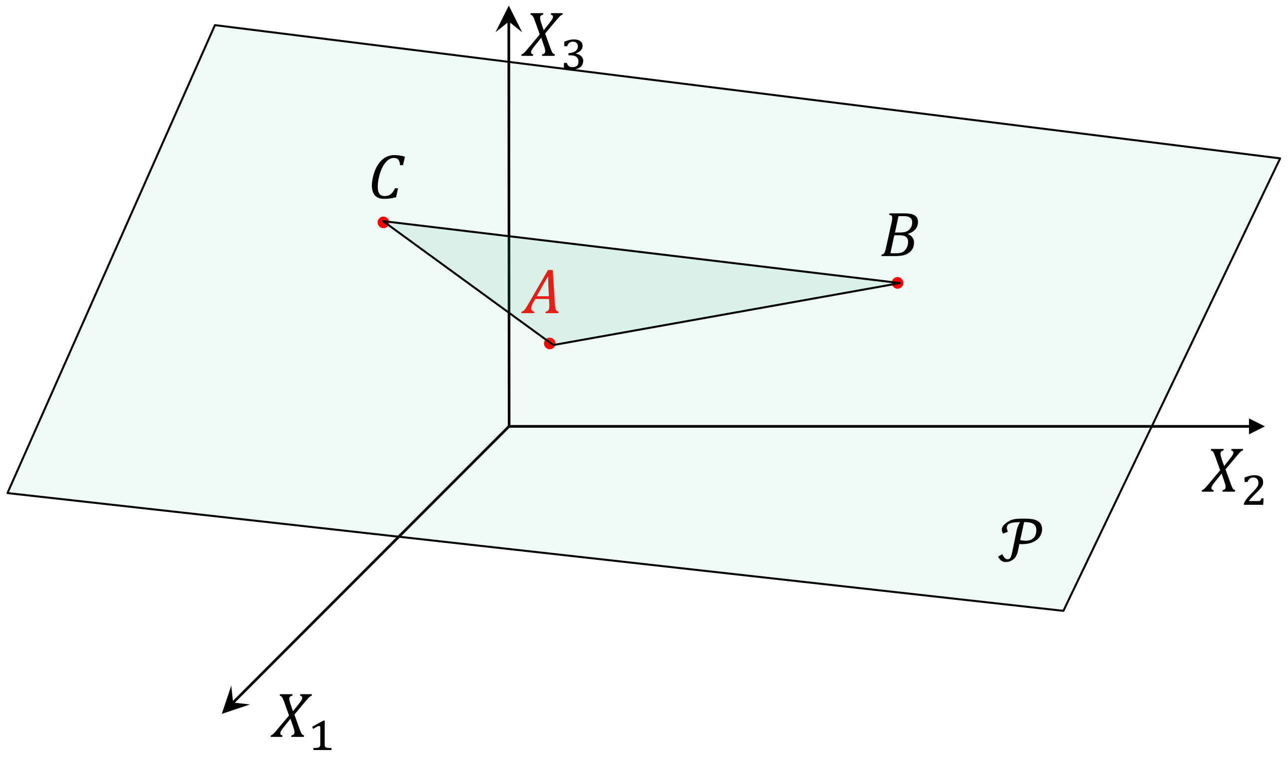
Axioma de Hilbert

Uma das premissas propostas por David Hilbert (1899) no livro “Grundlagem der Geometrie” (“Fundamentos da Geometria”) para fundamentar um tratamento moderno da geometria euclidiana foi:

Três pontos distintos A, B e C não situados na mesma reta sempre determinam completamente um plano.

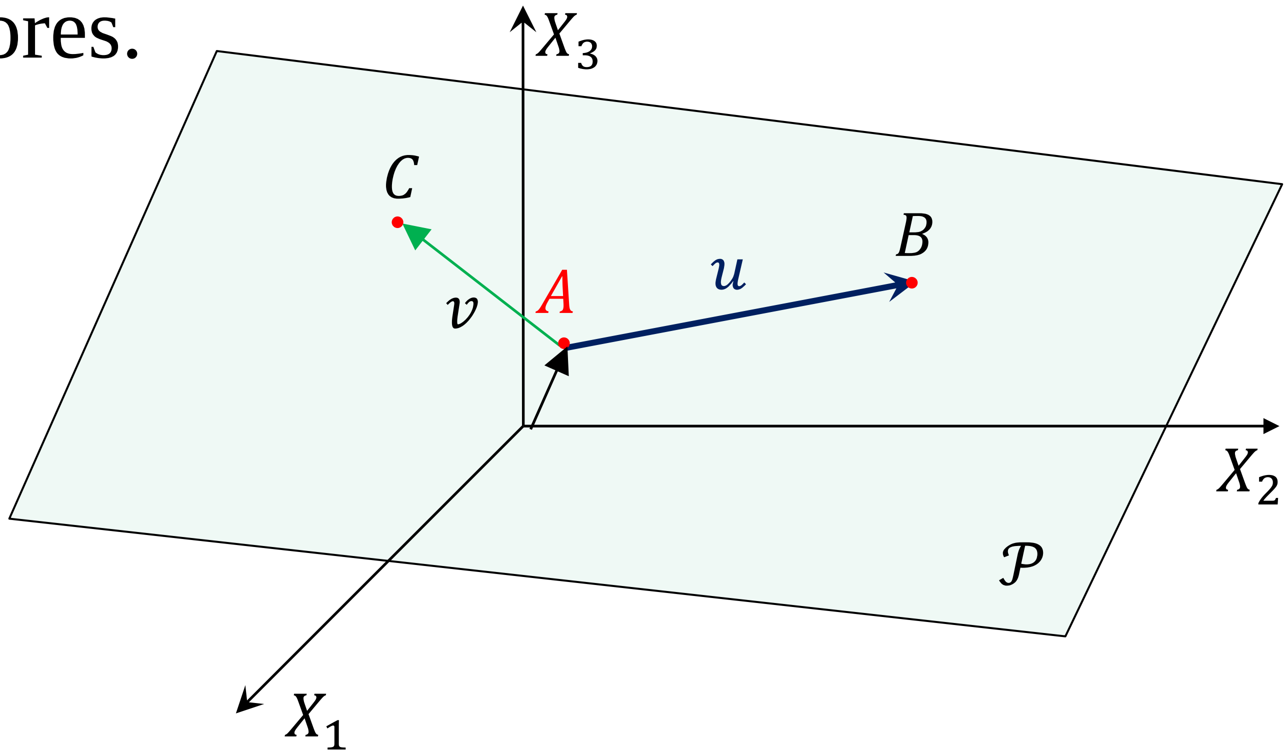
Plano em $\mathbb{R}^3$

Em $\mathbb{R}^3$. No desenho está o plano que contêm os três pontos diferentes. $\mathcal{P}$ é o conjunto de todos os pontos coplanares com os pontos A, B e C.



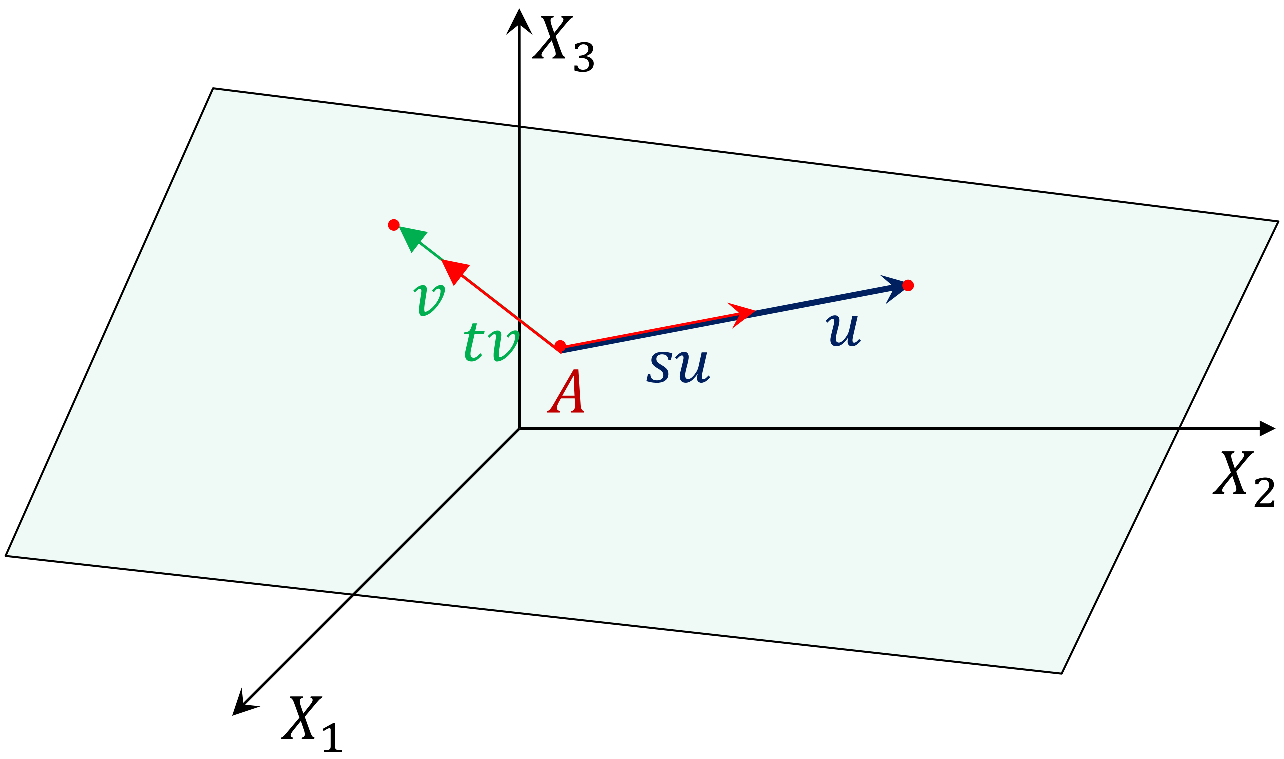
Plano em $\mathbb{R}^3$

Em $\mathbb{R}^3$. Com três pontos diferentes podemos formar dois vetores não nulos. Assim, ficamos com um ponto e os outros dois são substituidos pelos vetores.



Plano em $\mathbb{R}^3$

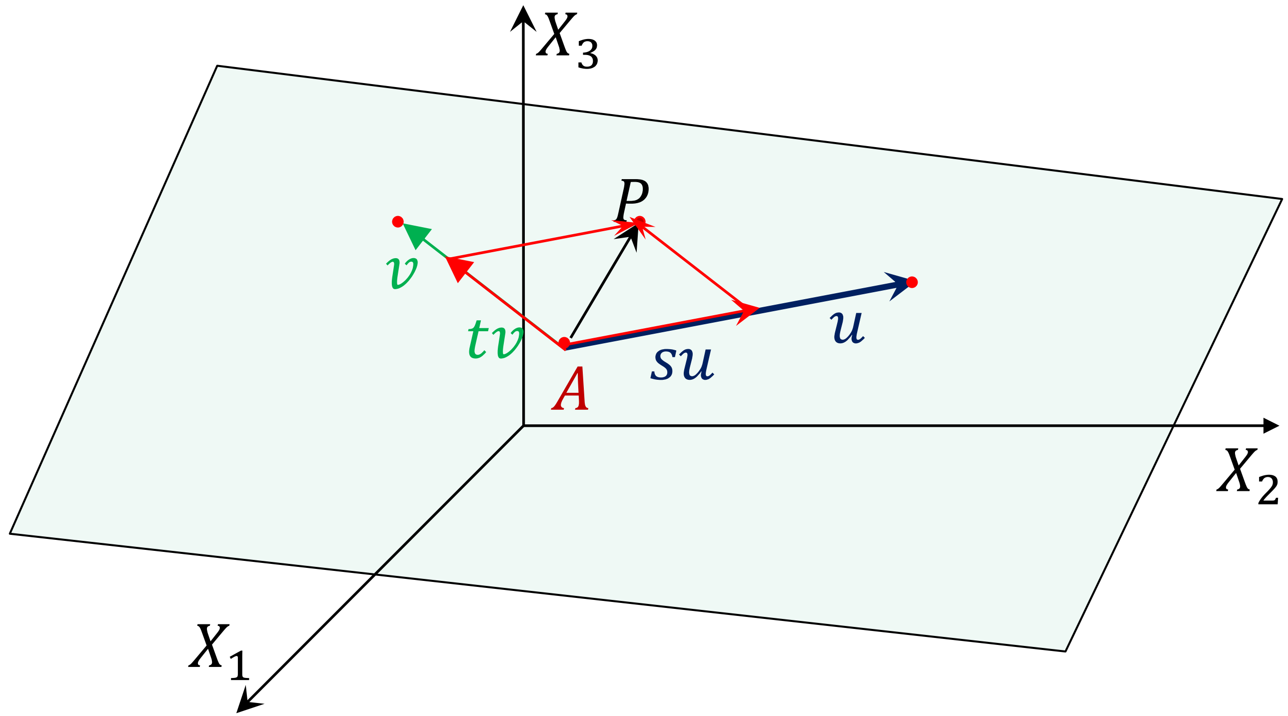
Se considerarmos um **múltiplo** do vetor v, tv, e outro **múltiplo** do vetor u, su, para escalares t e s, formamos uma combinação linear deles.



Plano em $\mathbb{R}^3$

Em $\mathbb{R}^3$. Somando a combinação linear ao ponto fixo A, atingimos um ponto $P = A + tv + su$.

Podemos formar o conjunto de todos os pontos obtidos como soma de A mais uma CL de v e u.



Equação vetorial do Plano em $\mathbb{R}^3$

Definição (vetorial):

Dados dois vetores não paralelos e não nulos $v, u \in \mathbb{R}^3$, e dado um ponto fixo A, então define-se o plano que passa pelo ponto A e com vetores de direção u e v ao conjunto de pontos que satisfaçam

$$\mathcal{P} = \{P \;/\; P = A + tv + su, \text{onde } \; s, t \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{P}: P = A + tv + su, \text{onde } \; s, t \in \mathbb{R}$$

A equação considerada é chamada de **equação vetorial** do plano $\mathcal{P}$.

Equações paramêtricas do plano em $\mathbb{R}^3$

Considerando os dois vetores não paralelos e não nulos $v, u \in \mathbb{R}^3$, e a partir da equação vetorial, separando as equações por componentes obtemos um sistema de equações que chamaremos de **equações paramétricas** do plano $\mathcal{P}$.

Seja $P = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{P}$ então:

$$\mathcal{P}: \begin{cases} x_1 = a_1 + tv_1 + su_1 \\ x_2 = a_2 + tv_2 + su_2 \\ x_3 = a_3 + tv_3 + su_3 \end{cases}$$

onde $t, s \in \mathbb{R}$.

Generalizando: equações do plano em $\mathbb{R}^n$

Considerando dois vetores não paralelos e não nulos $v, u \in \mathbb{R}^n$, e um ponto de passagem fixo A, definimos o plano $\mathcal{P}$ como o conjunto de pontos

$$\mathcal{P}: P = A + tv + su, \text{onde } s, t \in \mathbb{R}$$

Chamaremos de **equação vetorial** do plano $\mathcal{P}$.

Chamaremos de **equações paramétricas** do $\mathcal{P}$ a

$$\mathcal{P}: \begin{cases} x_1 = a_1 + tv_1 + su_1 \\ x_2 = a_2 + tv_2 + su_2 \\ \vdots \\ x_n = a_n + tv_n + su_n \end{cases} \quad \text{onde } t, s \in \mathbb{R}.$$

Equação geral do plano em $\mathbb{R}^3$

Lembrando do produto vetorial $n = v \times u$, que é ortogonal a ambos os vetores, multiplicamos a equação vetorial do plano com o produto vetorial vezes n. Então

$$P = A + tv + su \text{ , onde } s, t \in \mathbb{R}$$

$$P \cdot n = A \cdot n + tv \cdot n + su \cdot n$$

$$P \cdot n = A \cdot n$$

Pela ortogonalidade somem os parâmetros s e t.

Observar que o vetor $n = v \times u$ é conhecido e será chamado de **vetor normal** de $\mathcal{P}$.

Equação normal do plano em $\mathbb{R}^3$

Para todo ponto $P = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{P}$, então

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (n_1, n_2, n_3) = (a_1, a_2, a_3) \cdot (n_1, n_2, n_3)$$

Observar que o segundo membro é um escalar fixo:

$$d = (a_1, a_2, a_3) \cdot (n_1, n_2, n_3)$$

Então a equação do plano ficou

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = d$$

para quaisquer $P \in \mathcal{P}$.

A equação é chamada de **equação geral** do plano $\mathcal{P}$.

Se $P = (x, y, z) \Rightarrow ax + by + cz = d$.

Planos paralelos e ortogonais em $\mathbb{R}^3$

Dois planos $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, são **paralelos** se seus vetores normais são paralelos entre sí.

$$\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow n_1 \parallel n_2$$

Dois planos $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, são **ortogonais** se seus vetores normais são ortogonais entre sí.

$$\mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow n_1 \perp n_2$$

Exercício 1

Em uma indústria de embalagens, no plano $\mathcal{P}$ encontrase a linha de produção de embalagens cartonadas

$$\mathcal{L}_1\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

O plano $\mathcal{P}$ é paralelo com a linha de embalagens laminadas

$$\mathcal{L}_2\colon \begin{cases} 2x = y + 7 \\ 3x = z \end{cases}$$

Determine a equação vetorial, equação geral e equações paramétricas do plano $\mathcal{P}$.

Exercício 1

Resolução:

Nos dados da primeira linha de produção, fazemos

$$\mathcal{L}_1\colon\ \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2} = t$$

Igualando o primeiro, segundo e terceiro membro com o último, obtemos equações para cada variável (equações paramétricas)

$$\mathcal{L}_1\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Obtemos um ponto de passagem, $A = (1,2,1)$, e um

Exercício 1

vetor de direção da reta $\mathcal{L}_1$, $v = (1, -1, 2)$.

Como a reta $\mathcal{L}_1$ está contida no plano, o ponto A é um ponto de passagem do plano e v é um vetor de direção do mesmo plano $\mathcal{P}$.

Como a reta $\mathcal{L}_2$ é paralela ao plano $\mathcal{P}$, podemos resgatar o vetor de direção de $\mathcal{L}_2$ e considerar como o segundo vetor de direção do plano $\mathcal{P}$.

Exercício 1

Mas a expressão de $\mathcal{L}_2$ não permite visualizar o vetor de direção

$$\mathcal{L}_2 : \begin{cases} 2x = y + 7 \\ 3x = z \end{cases}$$

Como x aparece em ambas equações, criamos um parâmetro com ele e expressamos na forma

$$\mathcal{L}_2 : \begin{cases} x = s \\ y = -7 + 2s \\ z = 3s \end{cases}$$

Daqui o vetor de direção é $u = (1,2,3)$.

Exercício 1

Portanto, a equação vetorial do plano, para $r, m \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{P}: P = (1,2,1) + r(1,-1,2) + m(1,2,3)$$

Para a equação geral, calculamos o vetor normal

$$n = v \times u = (-7,-1,3)$$

então a equação geral é

$$\mathcal{P}: -7x - y + 3z = -6$$

As equações paramétricas são

$$\mathcal{P}: \begin{cases} x = 1 + r + m \\ y = 2 - r + 2m \\ z = 1 + 2r + 3m \end{cases}$$

Exercício 2

Em indústrias de diversos ramos utilizam-se esteiras transportadoras.

Em uma indústria uma esteira foi instalada sobre o plano $\mathcal{P}: 2x + y + z = 3$. A um engenheiro da indústria, lhe é solicitado que verifique se o ponto de recibimiento de materia prima $S = (1,2,2)$ bate com o plano da esteira, ou está acima ou embaixo do mesmo.

Também informe as equações paramétricas e a equação vetorial do plano que contêm a esteira.

Exercício 2

Resolução

Verificar que o ponto $S = (1,2,2)$ bate com o plano da esteira, é verificar se o ponto pertence ao plano.

Se o ponto pertence ao plano, então as coordenadas do ponto devem satisfazer a equação do plano:

$$\mathcal{P}: 2x + y + z = 3$$

Mas: $2(1) + (2) + (2) = 6 > 3.$

Como o valor é maior, o ponto pertence a região acima do plano.

Exemplo 2

Existem muitas formas de determinar as equações paramétricas e equação vetorial de um plano.

Aqui vamos determinar dois pontos do plano, então teriamos um ponto de passagem e um vetor que une esses pontos.

Utilizamos a equação para todo ponto do plano:

$$\mathcal{P}: 2x + y + z = 3$$

Damos valores simples, sempre que possível:

Para $x = 0$ e $y = 0$ então necessariamente $z = 3$.

Para $x = 0$ e $y = 1$ então necessariamente $z = 2$.

Exemplo 2

Temos os pontos $A = (0,0,3)$ e $B = (0,1,2)$ então $v = B - A = (0,1,-1)$.

Para conseguir o outro vetor faço o produto vetorial do vetor v vezes o vetor normal $n = (2,1,1)$.

Logo $u = v \times n = (2,-2,-2)$

As equações solicitadas são: para $s, t \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{P}: P = (0,0,3) + t(0,1,-1) + s(1,-1,-1)$$

$$\mathcal{P}: \begin{cases} x = s \\ y = t - s \\ z = 3 - t - s \end{cases}$$