Lista 5 - Gabarito

June 14, 2021

1. Considere os seguintes conjuntos de vetores. Quais deles são subespaços de $\mathbb{R}^4$?

   (a) (x, y, z, w) tais que $x - y = 2$.
   Resolução:
   Sabemos que $\mathbb{R}^4 = \{(x, y, z, w) \,/\, x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$ é espaço vetorial.
   A pergunta é sobre o conjunto $C = \{(x, y, z, w) \,/\, x, y, z, w \in \mathbb{R} \text{ e } x - y = 2\} \subset \mathbb{R}^4$.
   Observar:
   Os elementos de C tem quatro componentes e além disso a diferença do sua primeira componente menos a segunda componente deve ser igual a 2.
   Sobre a terceira e quarta componente nada é exigido.
   Para verificar que C é sub-espaço vetorial bastará validar as propriedades A1 e M1 de um espaço vetorial (Vide slides de Espaço Vetorial).
   Verificando A1: Sejam $u, v \in C$ então $u + v \in C$.
   Por serem elementos de C eles possuem quatro componentes e devem satisfazer a condição dada.
   Então $u = (x_u, y_u, z_u, w_u)$ com $x_u - y_u = 2$ e $v = (x_v, y_v, z_v, w_v)$ com $x_v - y_v = 2$.
   Para satisfazer A1 deve se verificar que $u + v \in C$, isso significa que $u + v$ deve ter quatro componentes e deve satisfazer que sua primeira componente menos a segunda componente dá 2.
   Vejamos: $u+v = (x_u, y_u, z_u, w_u)+(x_v, y_v, z_v, w_v) = (x_u+x_v, y_u+y_v, z_u+z_v, w_u+w_v)$ tem quatro componentes.
   Agora falta verificar que sua primeira componente (x_u+x_v) menos a segunda componente (y_u+y_v) dá 2.
   Mas fazendo contas temos: $(x_u + x_v) - (y_u + y_v) = (x_u - y_u) + (x_v - y_v) = 2 + 2 = 4 \neq 2$.
   Isto significa que falha A1, não precisamos verificar M1, concluimos que
   C **não é sub-espaço vetorial.**

   (b) (x, y, z, w) tais que $z = x = 2y$ e $w = x - 3y$.
   Resolução:
   Sabemos que $\mathbb{R}^4 = \{(x, y, z, w) \,/\, x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$ é espaço vetorial.
   A pergunta é sobre o conjunto $C = \{(x, y, z, w) \,/\, x, y, z, w \in \mathbb{R} \text{ e } z = x = 2y \text{ e } w = x - 3y\} \subset \mathbb{R}^4$.
   Observar:
   Os elementos de C tem quatro componentes e além disso a primeira e terceira componentes devem ser iguais e iguais ao dobro da segunda componente, também a quarta componente deve ser o valor da primeira menos o triplo da segunda componente.
   Precisamos validar as propriedades A1 e M1.
   Verificando A1: Sejam $u, v \in C$ então $u + v \in C$.

Por serem elementos de C eles possuem quatro componentes e devem satisfazer a condição dada.
Então $u = (x_u, y_u, z_u, w_u)$ com $z_u = x_u = 2y_u$ e $w_u = x_u - 3y_u$,
e $v = (x_v, y_v, z_v, w_v)$ com $z_v = x_v = 2y_v$ e $w_v = x_v - 3y_v$.
Vejamos: $u+v = (x_u, y_u, z_u, w_u)+(x_v, y_v, z_v, w_v) = (x_u+x_v, y_u+y_v, z_u+z_v, w_u+w_v)$ tem quatro componentes.
Verificando as condições temos:
$z_u + z_v = x_u + x_v = 2y_u + 2y_v = 2(y_u + y_v)$, pelas propriedades de u e v.
Assim a terceira e primeira componentes são iguais e elas são iguais ao dobro da segunda componente.
Também: $w_u + w_v = (x_u - 3y_u) + (x_v - 3y_v) = (x_u + x_v) - 3(y_u + y_v)$.
Assim a quarta componente é igual a primeira componente menos o triplo da segunda componente.
Verificando M1: Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ e dado $u \in C$ então $\alpha u \in C$.
$\alpha u = \alpha(x_u, y_u, z_u, w_u) = (\alpha x_u, \alpha y_u, \alpha z_u, \alpha w_u)$ onde $\alpha z_u = \alpha x_u = \alpha(2y_u) = 2(\alpha y_u)$ satisfazendo a primeira propriedade.
Agora partindo da quarta componente:
$\alpha w_u = \alpha(x_u - 3y_u) = \alpha x_u - \alpha(3y_u) = (\alpha x_u) - 3(\alpha y_u)$
obtemos que é igual a primeira componente menos o triplo da sua segunda componente. Portanto $\alpha u \in C$.
C **é sub-espaço vetorial**.

(c) (x, y, z, w) tais que $x = y = 0$.
Resposta: É sub-espaço vetorial.

(d) (x, y, z, w) tais que $x = 0$ e $y = -w$.
Resposta: É sub-espaço vetorial.

2. Considere uma matriz fixa $A_{n\times n}$. Determine se os conjunto dados são ou não espaços vetoriais.

(a) $G = \{B \in M_{n\times n} \ / \ AB = BA\}$.
Resoluçao
O conjunto G será espaço vetorial se satisfaz os axiomas A1 até A5 e M1 até M5.
Mas, sabemos que $M_{n\times n}$ é um espaço vetorial com as operações usuais.
Assim, como G é subconjunto de $M_{n\times n}$, bastará mostrar que G é sub-espaço vetorial, isto é, basta verificar A1 e M1.
Verificando A1: (Dados $U, V \in G$ então $(U + V) \in G$)
Sejam $U, V \in G$: como $U \in G$ então $U \in M_{n\times n}$ satisfazendo $AU = UA$
e como $V \in G$ então $v \in M_{n\times n}$ satisfazendo $AV = VA$.
Observar que $(U + V) \in M_{n\times n}$ e
$A(U + V) = AU + AV$ pela distributividade da multiplicação de matrizes (pela esquerda),
$AU + AV = UA + VA$ por serem elementos de G,
$UA + VA = (U + V)A$ pela distributividade da multiplicação de matrizes (pela direita),
portanto: $A(U + V) = (U + V)A$, logo $(U + V) \in G$.
A1 é válido.
Verificando M1: (Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $U \in G$, então $\alpha U \in G$)
Como $U \in G$ temos que $AU = UA$. Tambem $U \in M_{n\times n}$ e como α é um escalar então $\alpha u \in M_{n\times n}$ por ser produto de matriz vezes um escalar.

Agora $A(\alpha U) = \alpha(AU)$ (propriedades de associação do produto de matrizes vezes escalar),
$\alpha(AU) = \alpha(UA)$ por ser U elemento de G,
$\alpha(UA) = (\alpha U)A$ pela associatividade da multiplicação de matrizes vezes escalar.
Assim $A(\alpha U) = (\alpha U)A$ então $(\alpha U) \in G$.
M1 é válido.
Logo, G é sub-espaço vetorial de $M_{n\times n}$ com as operações usuais, portanto G é espaço vetorial com as operações usuais.

(b) $G = \{B \in M_{n\times n} \ / \ AB$ e BA são diferentes$\}$

Resolução

Lembrar que todo espaço vetorial deve conter o elemento Zero.
No caso a matriz nula $0_{n\times n}$ não pertence ao conjunto G.
Isto porque, qualquer que seja a matriz A temos que $A0 = 0 = 0A$ e para que 0 pertença ao conjunto G deve ser satisfeito que $A0$ seja diferente de $0A$ (falso).
Falhando uma propriedade nem precisa verificar as demais, o conjunto não é espaço vetorial.
G não é espaço vetorial

(c) $G = \{B \in M_{n\times n} \ / \ BA = 0\}$

Observar que os elementos de G são matrizes que anulam a matriz A, então a matriz zero ($B = 0$) é um elemento de G, mas não necessariamente o único.

Resposta: É espaço vetorial.

3. Encontre um conjunto de vetores que gera o espaço solução do sistema homogêneo $AX = 0$, sendo:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Resolução

Por ser um sistema com três equações e quatro incógnitas, é provável que existam graus de liberdade.
Devemos então, primeiro resolver o sistema homogêneo $AX = 0$.

Obtemos a solução $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Observar que o conjunto solução S (também é um espaço vetorial) é o conjunto com todas as soluções, assim podemos escrever

$$S = \left\{ X = \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} \ / \ x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ou melhor

$$S = \left\{ X = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ / \ x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Assim, toda solução (elemento do conjunto S) é um múltiplo do vetor $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, logo podemos formar o conjunto $G = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ formado por esse vetor fixo.

G é um gerador de S.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Resolução

Por ser um sistema com três equações e quatro incógnitas, é provável que existam graus de liberdade.

Devemos então, primeiro resolver o sistema homogêneo $AX = 0$.

Obtemos a solução $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ -2x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$.

Observar que o espaço solução S pode ser representado por

$$S = \left\{ X = \begin{bmatrix} x_4 \\ -2x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ 0 \\ 0 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ / \ x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Assim, toda solução é uma combinação linear dos vetores $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Formando o conjunto $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ decimos que G é um gerador de S.

Um conjunto gerador é $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

4. Encontre conjuntos geradores para os seguintes subespaços:

(a) $E = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / 3a - 5b + 2c = 0\}$.

Resolução

Observar que um elemento arbitrário de E deve satisfazer $3a - 5b + 2c = 0$, ou $a = \frac{5}{3}b - \frac{2}{3}c$.

Então, se $(a,b,c) \in E$ temos

$$(a,b,c) = \left(\frac{5}{3}b - \frac{2}{3}c, b, c\right) = \left(\frac{5}{3}b, b, 0\right) + \left(-\frac{2}{3}c, 0, c\right)$$

$$(a,b,c) = b\left(\frac{5}{3}, 1, 0\right) + c\left(-\frac{2}{3}, 0, 1\right) = \frac{b}{3}(5,3,0) + \frac{c}{3}(-2,0,3).$$

Um conjunto gerador é $G = \{(5,3,0), (-2,0,3)\}$.

(b) $E = \{A \in M_{2\times 2} / 3a_{11} = 2a_{12}\}$.

Resolução

Como $A \in M_{2\times 2}$ representamos por $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

Por ser elemento de E, deve satisfazer a condição dada $3a_{11} = 2a_{12}$, ou $a_{11} = \frac{2}{3}a_{12}$, então escrevemos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}a_{12} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$A = a_{12}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{21}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{22}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Um gerador será $G = \left\{\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$.

Outro pode ser o conjunto $\left\{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$.

(c) $E = \{p \in P_3 / p(2) = 0\}$.

Resolução

Seja $p \in P_3$, então ele pode ser representado por $p = p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$, onde $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

Se $p \in E$, então $p(2) = 0$. Substituindo na sua representação temos:

$p(2) = 0 = a(2)^3 + b(2)^2 + c(2) + d$, isto é $8a + 4b + 2c + d = 0$. Daqui podemos expressar por $d = -8a - 4b - 2c$.

Substituindo na representação do polinômio temos

$p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d = at^3 + bt^2 + ct - 8a - 4b - 2c$

$p(t) = a(t^3 - 8) + b(t^2 - 4) + c(t - 2)$ para quaisquer $a,b,c \in \mathbb{R}$. Assim encontramos uma representação de qualquer polinômio $p \in E$ utilizando os polinômios fixos $t^3 - 8$, $t^2 - 4$ e $t - 2$.

Um gerador será $S = \left\{t - 2; t^2 - 4; t^3 - 8\right\}$

(d) $E = \{p \in P_3 / p(2) = p(-1)\}$.

Resolução

Seja $p \in P_3$, então ele pode ser representado por $p = p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$, onde $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

Se $p \in E$, então $p(2) = p(-1)$. Substituindo na sua representação temos:

$p(2) = a(2)^3 + b(2)^2 + c(2) + d = p(-1) = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + d$,

isto é $8a + 4b + 2c + d = -a + b - c + d$.

Daqui podemos expressar por $9a + 3b + 3c = 0$ ou $3a + b + c = 0$ ou $c = -3a - b$.

Substituindo na representação do polinômio temos

$p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d = at^3 + bt^2 + (-3a - b)t + d$

$p(t) = a(t^3 - 3t) + b(t^2 - t) + d$ para quaisquer $a, b, d \in \mathbb{R}$.
Um gerador será $S = \{1; t^2 - t; t^3 - 3t\}$

5. Encontre uma base para os seguintes espaço de $\mathbb{R}^3$,

   (a) Todos os vetores da forma (a, b, c), onde $b = a$.
   Resolução
   O espaço dado é o conjunto $C = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / b = a\}$.
   Procuramos um gerador de C, para isto temos que
   $(a, b, c) = (b, b, c) = (b, b, 0) + (0, 0, c) = b(1, 1, 0) + c(0, 0, 1)$ para quaisquer $b, c \in \mathbb{R}$.
   Assim, um gerador é o conjunto $G = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.
   Para ser base o conjunto deve ser linearmente independente (L.I.).
   Para verificar que é linearmente independente devemos combinar linearmente o zero e os coeficientes dessa combinaçao devem ser apenas zeros.
   Se $r(1, 1, 0) + s(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$ então $(r, r, s) = (0, 0, 0)$, daqui a única solução $r = 0$ e $s = 0$. Logo é um conjunto L.I.
   Portanto por ser gerador e L.I. o conjunto $G = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base.

   (b) Todos os vetores da forma (a, b, c), onde $a = 0$.
   Resolução
   No presente conjunto temos que a não é arbitrário, a é o zero, enquanto que b e c são números reais quaisquer. Assim, vamos representar como
   $(a, b, c) = (0, b, c) = (0, b, 0) + (0, 0, c) = b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$.
   Verificar que são L.I. é simples, então uma base é o conjunto $\beta = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

   (c) Todos os vetores da forma $(a - b, b + c, 2a - b + c)$. **Esse aqui é um problema importante.**
   Resolução
   O espaço dado é o conjunto $C = \{(a - b, b + c, 2a - b + c) \in \mathbb{R}^3 / a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Procuramos um gerador de C, para isto temos que
   $(a - b, b + c, 2a - b + c) = (a, 0, 2a) + (-b, b, -b) + (0, c, c) = a(1, 0, 2) + b(-1, 1, -1) + c(0, 1, 1)$ para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$.
   Um gerador é $\delta = \{(1, 0, 2), (-1, 1, -1), (0, 1, 1)\}$.
   Agora verificamos se o conjunto é linearmente independente.
   Se $r(1, 0, 2) + s(-1, 1, -1) + t(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$, daqui $(r - s, s + t, 2r - s + t) = (0, 0, 0)$.
   Isto é um sistema de equações
   $$\begin{cases} r - s &= 0 \\ s + t &= 0 \\ 2r - s + t &= 0 \end{cases}$$
   cuja solução é $X = \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ -t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
   Isto significa que $r = s = t = 0$ não é a única solução. Existem muitas, por exemplo $r = 1$, $s = 1$ e $t = -1$.
   Portanto, o conjunto δ não é L.I., logo não é base.
   Observando detenidamente vemos que o terceiro vetor é a soma dos dois primeiros, então descar-

tando o terceiro, podemos verificar que o conjunto dos dois primeiros vetores é L.I.
Uma base será $\beta = \{(1, 0, 2), (-1, 1, -1)\}$.

6. Encontre a dimensão dos seguintes sub-espaços:

   (a) Todos os vetores da forma (a, b, c, d), onde $d = a + b$.
   Resolução
   Para determinar a dimensão devemos encontrar uma base e contar o número de elementos que contenha.
   Para determinar a base:
   $(a, b, c, d) = (a, b, c, a+b) = (a, 0, 0, a)+(0, b, 0, b)+(0, 0, c, 0) = a(1, 0, 0, 1)+b(0, 1, 0, 1)+c(0, 0, 1, 0)$
   O conjunto $\beta = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}$ é um gerador e o aluno pode verificar facilmente que é L.I., assim é uma base.
   Como β possui três elementos, a dimensão do sub-espaço é 3.

   (b) Todos os vetores da forma (a, b, c, d), onde $c = a - b$ e $d = a + b$.
   Resolução
   $(a, b, c, d) = (a, b, a - b, a + b) = (a, 0, a, a) + (0, b, -b, b) = a(1, 0, 1, 1) + b(0, 1, -1, 1)$.
   Um gerador é $\beta = \{(1, 0, 1, 1), (0, 1, -1, 1)\}$ e além disso é um conjunto L.I.
   (NOTA: É fácil ver que é L.I., pois, são elementos não nulos, e a primeira componente do primeiro vetor não poderá ser combinação do segundo dado é uma componente nula. O aluno deverá verificar que é L.I. caso a pergunta seja considerada na prova.)
   Como β é uma base e tem dois elementos o espaço tem dimensão 2.

   (c) Todos os vetores da forma $(a + c, a - b, b + c, -a + b)$.
   Resolução
   $(a + c, a - b, b + c, -a + b) = a(1, 1, 0, -1) + b(0, -1, 1, 1) + c(1, 0, 1, 0)$.
   Um gerador é $\delta = \{(1, 1, 0, -1), (0, -1, 1, 1), (1, 0, 1, 0)\}$ mas não é base pois o terceiro vetor é a soma dos dois primeiros, é um conjunto L.D. (linearmente dependente).
   Retirando o vetor dependente temos uma base com dois elementos $\beta = \{(1, 1, 0, -1), (0, -1, 1, 1)\}$
   Dimensão 2.

7. Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ formado pelos vetores $V = (x, y, z)$ tais que $x + 2y + 4z = 0$. Obtenha uma base $\{V_1, V_2, V_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que V_1 e V_2 pertençam a W.
   Observar que W é um plano, então basta obter dois vetores direção do plano W e depois podemos obter o produto vetorial desses dois que não estará em W pois é ortogonal aos dois vetores obtidos.
   Resolução
   Primeiro vamos conhecer o conjunto W e seus elementos.
   $W = \{(x, y, z)/x + 2y + 4z = 0\}$. Assim, um elemento de W pode ser representado por:
   $(x, y, z) = (-2y - 4z, y, z) = y(-2, 1, 0) + z(-4, 0, 1)$.
   Logo uma base de W é o conjunto $\beta = \{(-2, 1, 0), (-4, 0, 1)\}$ (gera W e são L.I. - verificar!).
   Por ser base $\beta \subset W$. Assim, podemos tomar $V_1 = (-2, 1, 0)$ e $V_2 = (-4, 0, 1)$.
   Lembrar que $\mathbb{R}^3$ tem dimensão 3, logo qualquer base estará formada por 3 vetores linearmente independentes. Como W é sub-espaço vetorial, já temos dois vetores LI que também pertencem a $\mathbb{R}^3$.
   Para obter um terceiro vetor que seja linearmente independente de V_1 e V_2, recorremos a definição da operação produto vetorial. Lembrar o produto vetorial é uma operação definida apenas para vetores em

$\mathbb{R}^3$. Mais ainda, o produto vetorial resultante é um vetor ortogonal simultaneamente aos dois vetores utilizados na operação.
Vamos escolher então $V_3 = V_1 \times V_2$.
$V_3 = (-2, 1, 0) \times (-4, 0, 1) = (1, 2, 4)$.
Assim, podemos formar o conjunto $\gamma = \{(-2, 1, 0), (-4, 0, 1), (1, 2, 4)\}$. Basta, verificar que é um conjunto LI. (Verificar !).

8. a. Mostre que os polinômios: 1, $t-1$, $t^2 - 3t + 1$ formam uma base de P_2. Verificará que esse conjunto é L.I. e que gera qualquer polinômio quadrático.
Resolução
Pede-se mostrar que o conjunto de três polinômios (vetores)
$B = \{p_1(t) = 1, p_2(t) = t - 1, p_3(t) = t^2 - 3t + 1\}$ é uma base de P_2.
Isso significa mostrar, primeiro que B é gerador de P_2, e segundo que B é um conjunto linearmente independente (L.I.).
Para mostrar que B **é gerador** de P_2. Deve se considerar um polinômio arbitrário e então apresentar que é uma combinação linear dos elementos de B.
Considerar um polinômio arbitrário significa tomar a forma geral de um polinômio de P_2:
$p(t) = at^2 + bt + c$.
Então deve se mostrar que esse polinômio $p(t)$ para quaisquer coeficientes a, b e c se pode escrever como combinação linear dos elementos de B:
$p(t) = c_1(p_1(t)) + c_2(p_2(t)) + c_3(p_3(t)) = c_1(1) + c_2(t-1) + c_3(t^2 - 3t + 1)$,
substituindo $p(t)$ ter-se-ia:
$at^2 + bt + c = c_1(1) + c_2(t-1) + c_3(t^2 - 3t + 1)$.
Agora é resolver determinando os coeficientes c_1, c_2 e c_3 em função dos coeficientes do polinômio arbitrário a, b e c:
Desenvolvendo o lado direito:
$at^2 + bt + c = c_1 + c_2 t - c_2 + c_3 t^2 - 3c_3 t + c_3$
$at^2 + bt + c = c_3 t^2 + c_2 t - 3c_3 t + c_1 - c_2 + c_3$
$at^2 + bt + c = c_3 t^2 + (c_2 - 3c_3)t + (c_1 - c_2 + c_3)$.
A solução é obtida igualando os coeficientes de cada potência dos polinômios esquerdo e direito (isso é definição de igualdade de polinômios).
Portanto: $c_3 = a$, $c_2 = b + 3a$ e $c_1 = c + b + 2a$.
Para mostrar que B **é linearmente independente**, se considera a combinação do vetor (polinômio) zero pelos elementos de B, isto é: $d_1(1) + d_2(t-1) + d_3(t^2 - 3t + 1) = 0$ e deve-se encontrar uma única solução sendo todos os coeficientes d_i nulos, isto é $d_i = 0$.
(**Nota: O vetor zero (0) é o polinômio zero, isto é** $0 = 0t^2 + 0t + 0$).
Então, da primeira equação:
$d_1(1) + d_2(t-1) + d_3(t^2 - 3t + 1) = 0t^2 + 0t + 0$
$d_3 t^2 + (d_2 - 3d_3)t + (d_1 - d_2 + d_3) = 0t^2 + 0t + 0$,
novamente pela igualdade de polinômios a única solução é: $d_1 = 0$, $d_2 = 0$ e $d_3 = 0$.
Logo B é um conjunto L.I.
Portanto o conjunto $B = \left\{1, t-1, t^2 - 3t + 1\right\}$ é uma base de P_2.
b. Expresse o polinômio $2t^2 - 5t + 6$ como combinação linear dos elementos da base.
Resolução

Expressar como combinação linear dos elementos da base significa expressar como soma de múltiplos dos elementos 1, $t-1$, t^2-3t+1, isto é,

$$2t^2-5t+6 = m(1)+n(t-1)+r(t^2-3t+1)$$

$$2t^2-5t+6 = m-n+r+nt-3rt+rt^2$$

Igualando os coeficientes dos polinômios e resolvendo temos: $r=a=2$, $n=b+3a=1$ e $m=5$.
Assim conhecemos os coeficientes da combinação linear.
Portanto, expressamos por $2t^2-5t+6 = 5(1)+1(t-1)+2(t^2-3t+1)$.

9. Encontre os valores λ, tais que o sistema homogêneo $(A-\lambda I_n)X = 0$ tenha solução não nula (não trivial). E para estes valores de λ encontre uma base para o conjunto solução, para as seguintes matrizes A:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

   Resolução
   Primeiro o sistema $(A-\lambda I_3)X = 0$ deve ter solução não nula.
   Pelas propriedades do determinante isso acontece se o determinante da matriz de coeficientes do sistema é nulo. Isto é, se
   $det(A-\lambda I_3) = 0$
   $det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$
   $det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$
   $det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & -3 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$
   Resolvendo o determinante temos $-\lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+1 = 0$ ou $(1-\lambda)^3 = 0$.
   Assim, achamos o valor $\lambda = 1$, tal que o sistema $(a-\lambda I_3)X = 0$ tem solução não nula.
   A segunda parte pede encontrar a solução do sistema para $\lambda = 1$, isto é, resolver

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   Resolvendo o sistema obtemos a solução $X = \begin{bmatrix} x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

   Assim o conjunto solução é $S = \left\{ x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} / x_3 \in \mathbb{R} \right\}$.

Concluindo, para $\lambda = 1$ o sistema $(A - \lambda I_3)X = 0$ possue solução não trivial (infinitas soluções) e para o conjunto solução uma base é $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Resolução

Agora o sistema é $(A - \lambda I_4)X = 0$.

Novamente calculamos o determinante da matriz desse sistema e igualamos a zero para deteminar os λ para os quais existe solução não nula.

$det(A - \lambda I_4) = 0$

$$det\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$\lambda^4 - 6\lambda^3 + 13\lambda^2 - 12\lambda + 4 = 0$

$(\lambda - 2)^2(\lambda - 1)^2 = 0$.

Temos então dois valores $\lambda = 2$ e $\lambda = 1$.

Resolvemos primeiro para $\lambda = 1$, o sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema o conjunto solução é $S = \left\{ \begin{bmatrix} 3x_3 \\ -3x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} / x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} / x_3 \in \mathbb{R} \right\}$.

Logo, para $\lambda = 1$ uma base do conjunto solução é $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Agora para $\lambda = 2$, o sistema é

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema o conjunto solução é $S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} / x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} / x_1 \in \mathbb{R} \right\}$.

Logo, para $\lambda = 2$ uma base é $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Resolução

Calculamos o determinante da matriz desse sistema e igualamos a zero para deteminar os λ para os quais existe solução não nula.

$det \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$

$det \left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} \right) = 0$

Resolvendo o determinante temos $-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ ou $(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$.

Temos então três valores $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ e $\lambda = -1$.

Para $\lambda = 1$, o sistema é

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Resolvendo o sistema o conjunto solução é $S = \left\{ \begin{bmatrix} 3x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} / x_3 \in \mathbb{R} \right\}$.

Logo, para $\lambda = 1$ uma base do conjunto solução é $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Agora para $\lambda = 2$, o sistema é

$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Resolvendo o sistema o conjunto solução é $S = \left\{ \begin{bmatrix} x_3 \\ 3x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} / x_3 \in \mathbb{R} \right\}$.

Logo, para $\lambda = 2$ uma base do conjunto solução é $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Para $\lambda = -1$, o sistema é

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema o conjunto solução é $S = \left\{ \begin{bmatrix} x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} / x_3 \in \mathbb{R} \right\}$.

Logo, para $\lambda = -1$ uma base do conjunto solução é $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Resolução

O sistema é $(A - \lambda I_4)X = 0$.

Calculamos o determinante da matriz desse sistema e igualamos a zero.

$det(A - \lambda I_4) = 0$

$$det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1-\lambda & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

Facilmente obtemos $(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$.

Temos então quatro valores $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, $\lambda = 3$ e $\lambda = -1$.

Para $\lambda = 1$, o sistema é

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema obtemos o conjunto solução $S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} / x_1 \in \mathbb{R} \right\}$.

Logo, para $\lambda = 1$ uma base do conjunto solução é $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Para $\lambda = 2$, o sistema é

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema obtemos o conjunto solução $S = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{29}{3}x_4 \\ -\frac{7}{3}x_4 \\ -3x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} / x_4 \in \mathbb{R} \right\}$.

Logo, para $\lambda = 2$ uma base do conjunto solução é $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 29 \\ 7 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$.

Para $\lambda = 3$, o sistema é

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema obtemos o conjunto solução $S = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{9}{4}x_3 \\ \frac{3}{4}x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} / x_1 \in \mathbb{R} \right\}$.

Logo, para $\lambda = 3$ uma base do conjunto solução é $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Para $\lambda = -1$, o sistema é

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema obtemos o conjunto solução $S = \left\{ \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} / x_1 \in \mathbb{R} \right\}$.

Logo, para $\lambda = -1$ uma base do conjunto solução é $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

10. Seja P_3 o espaço vetorial de todos os polinômios de ordem 3 (com as somas e multiplicação por escalar usuais). Seja W_1 o subespaço de P_3, que consiste de todos os polinômios $p(t)$ tais que $p(0) = 0$. E seja W_2 o subespaço de P_3, que consiste de todos os polinômios $q(t)$ tais que $q(1) = 0$. Encontrar uma base para os espaços:

    (a) W_1.

    Resolução

    Representamos por $W_1 = \{p(t) \in P_3 / p(0) = 0\}$.

    Se $p(t) \in W_1$, então $p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ e $p(0) = 0 = a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d$.

    Dessa última igualdade $d = 0$, então $p(t) = at^3 + bt^2 + ct$ onde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Assim todo elemento de W_1 é combinação linear dos elementos do conjunto $\beta = \{t, t^2, t^3\}$. Além disso, β é L.I. Portanto β é uma base de W_1.

(b) W_2.

Resolução

Representamos por $W_2 = \{q(t) \in P_3 / q(1) = 0\}$.
Se $q(t) \in W_2$, então $q(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ e $q(1) = 0 = a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) + d$.
Isto é $a + b + c + d = 0$ ou $d = -a - b - c$. Então
$q(t) = at^3 + bt^2 + ct - a - b - c = a(t^3 - 1) + b(t^2 - 1) + c(t - 1)$ onde $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Uma base é $\beta = \{t - 1, t^2 - 1, t^3 - 1\}$

(c) $W_1 \cap W_2$, (satisfazem as duas condições).

Resolução

$W_1 \cap W_2 = \{r(t) \in P_3 / r(0) = 0 \text{ e } r(1) = 0\}$.
Se $r(t) \in W_1 \cap W_2$ então $r(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ e $r(0) = d = 0$ e $r(1) = a + b + c + 0 = 0$.
Daqui $d = 0$ e $c = -a - b$. Logo, os elementos do conjunto $W_1 \cap W_2$ podem ser expressados por $q(t) = at^3 + bt^2 + ct = at^3 + bt^2 + (-a - b)t = a(t^3 - t) + b(t^2 - t)$.
É fácil verificar que uma base é $\beta = \{t^2 - t, t^3 - t\}$.