ZAB0161 - Álgebra Linear com Aplicações em Geometria Analítica

Espaço vetorial
Base e Dimensão

Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle

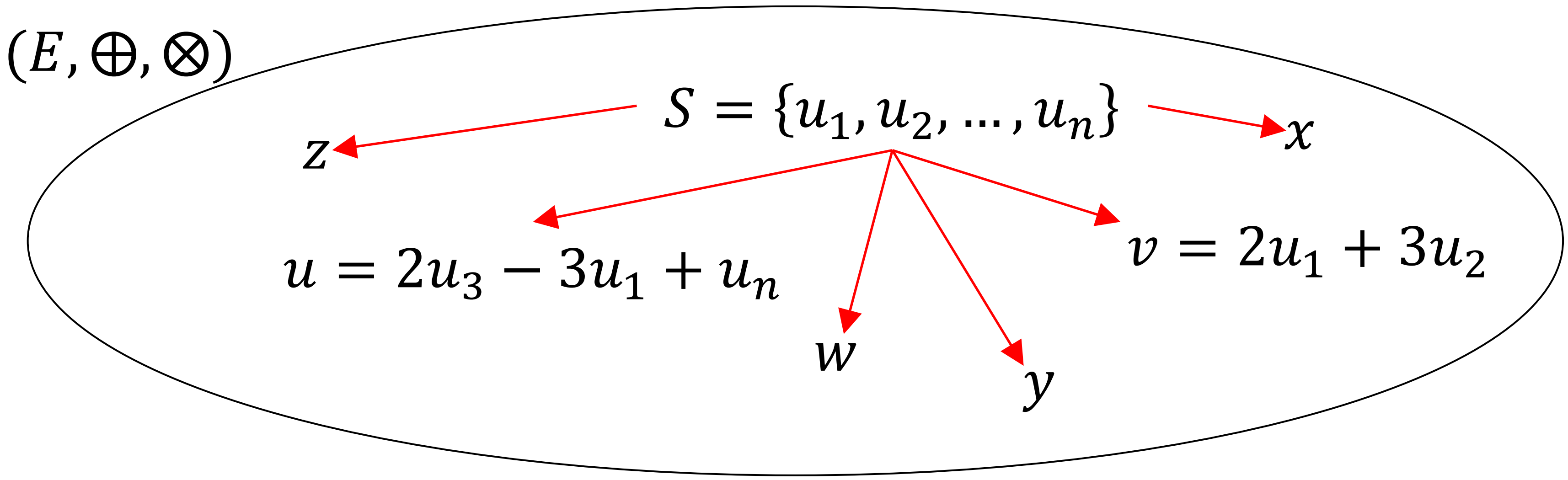
ZAB (Dpto. de Ciências Básicas) – FZEA – USP

4. Base de um espaço vetorial

Definição: Seja E um espaço vetorial.

Um conjunto de vetores $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset E$ é **uma base de $\boldsymbol{E}$**, se:

a. S gera o espaço E, e



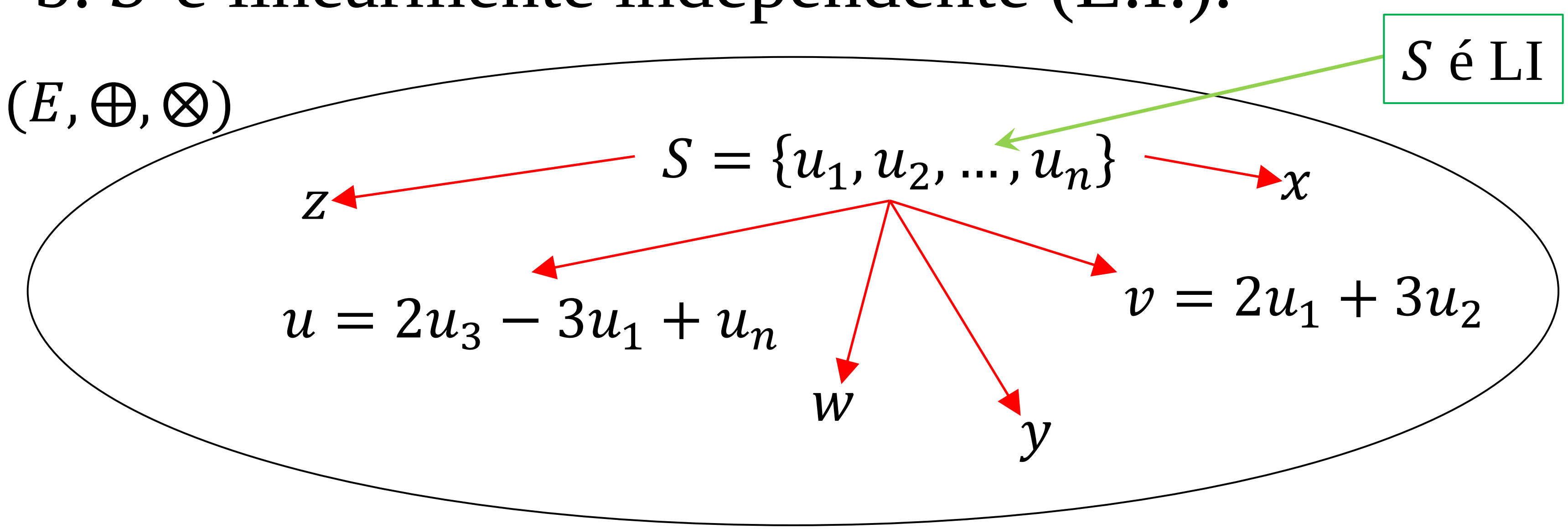
4. Base de um espaço vetorial

Definição: Seja E um espaço vetorial.

Um conjunto de vetores $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset E$ é **uma base de $\boldsymbol{E}$**, se:

a. S gera o espaço E, e

b. S é linearmente independente (L.I.).



4. Base de um espaço vetorial

Exemplo 1: $S = \{t + 2, t^2 - 9, 2t - 4 + 3t^2\}$ é uma base de P_2. (Vide exemplo 3 do conceito LI.)

Exemplo 2: $S = \{(-2,0,-6), (1,-2,1), (1,0,3)\}$ não é base de $\mathbb{R}^3$, pois não é gerador de $\mathbb{R}^3$ e também não é LI.

Exemplo 3: $S = \{(-2,-5), (1,-2), (0,3)\}$ não é base de $\mathbb{R}^2$. S é gerador de $\mathbb{R}^2$, mas não é LI.

4. Base de um espaço vetorial

Verificar, se um conjunto de vetores S é uma base de um espaço vetorial E, envolve duas combinações lineares, de

4. Base de um espaço vetorial

Verificar, se um conjunto de vetores S é uma base de um espaço vetorial E, envolve duas combinações lineares, de

a. ser gerador: para todo $v \in E$ devem existir $c_1, c_2, \ldots, c_n$ talque $v = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n$

b. ser LI: se $0 = d_1u_1 + d_2u_2 + \cdots + d_nu_n$, necessariamente $d_1 = 0, d_2 = 0, \ldots, d_n = 0$.

4. Base de um espaço vetorial

Verificar, se um conjunto de vetores S é uma base de um espaço vetorial E, envolve duas combinações lineares, de

a. ser gerador: para todo $v \in E$ devem existir $c_1, c_2, \ldots, c_n$ talque $v = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n$

b. ser LI: se $0 = d_1u_1 + d_2u_2 + \cdots + d_nu_n$, necessariamente $d_1 = 0, d_2 = 0, \ldots, d_n = 0$.

Nota: Por estar considerando juntas as duas combinações devemos diferenciar os coeficientes.

4. Base de um espaço vetorial

Exemplo 4: Seja o sistema homogêneo $AX = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

O conjunto solução é um espaço vetorial:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a - 2b \\ a \\ b \end{bmatrix} / \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Formamos o conjunto de três soluções

$$\delta = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

δ é uma base de S ?

4. Base de um espaço vetorial

Exemplo 5: Seja o sistema homogêneo $AX = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Temos que resolver com a matriz estendida:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & -6 & 0 \\ -2 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De essa expressão concluímos: $x - y + 2z = 0$

4. Base de um espaço vetorial

Exemplo 5: Seja o sistema homogêneo $AX = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Isso significa que: $x = y - 2z$.

Apenas x tem restrição, o y e o z não tem, podem assumir qualquer valor.

Só para dar uma escrita faço $y = a \in \mathbb{R}$ e $z = b \in \mathbb{R}$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - 2b \\ a \\ b \end{bmatrix}$$

4. Base de um espaço vetorial

Exemplo 5: Seja o sistema homogêneo $AX = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Juntando todas as soluções em um conjunto, temos:

$$X = \begin{bmatrix} a - 2b \\ a \\ b \end{bmatrix}$$

O conjunto solução é um espaço vetorial:

$$S = \left\{ X = \begin{bmatrix} a - 2b \\ a \\ b \end{bmatrix} / \; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Base de um espaço vetorial

Devemos verificar que δ é gerador de S e é LI.

4. Base de um espaço vetorial

Devemos verificar que δ é gerador de S e é LI.

a. δ é gerador de S ?

para todo $v \in S$ devem existir c_1, c_2, c_3 talque

$$v = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

4. Base de um espaço vetorial

Devemos verificar que δ é gerador de S e é LI.

a. δ é gerador de S ?

para todo $v \in S$ devem existir c_1, c_2, c_3 talque

$$v = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

b. δ é LI ?

se $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = d_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + d_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ então,

necessariamente $d_1 = 0, d_2 = 0, d_3 = 0.$

4. Base de um espaço vetorial

Vamos apresentar um processo simplificado para determinar se um conjunto é base.

Observar: os dois sistemas a serem resolvidos são

(gerador) $\begin{bmatrix} a-2b \\ a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$

(LI) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}.$

Mesma matriz. Podemos resolver simultaneamente.

4. Base de um espaço vetorial

Matriz estendida

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & | & a-2b & | & 0 \\ 2 & 5 & 1 & | & a & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & b & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & | & \frac{1}{2}(a-5b) & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & b & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Existem infinitas soluções. δ é gerador (existir), mas δ não é LI, pois a solução devia ser única.

δ **não é base de** S.

4. Base de um espaço vetorial

Exemplo 5: Seja o sistema homogêneo $AX = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

O conjunto solução é um espaço vetorial:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a - 2b \\ a \\ b \end{bmatrix} / \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Formamos o conjunto de duas soluções

$$\delta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$ δ é uma base de S ?

4. Base de um espaço vetorial

Devemos verificar que δ é gerador de S e é LI.

a. δ é gerador de S ?

para todo $v \in S$ devem existir c_1, c_2 talque

$$v = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b. δ é LI ?

se $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = d_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ então,

necessariamente $d_1 = 0, d_2 = 0.$

4. Base de um espaço vetorial

Observar: os dois sistemas a serem resolvidos são

(gerador) $\begin{bmatrix} a-2b \\ a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

(LI) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$.

Resolvendo simultaneamente.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & | & a-2b & | & 0 \\ 1 & 0 & | & a & | & 0 \\ 0 & 1 & | & b & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & a & | & 0 \\ 0 & 1 & | & b & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

4. Base de um espaço vetorial

Também temos $0 = 0$, mas não temos infinitas soluções.

A primeira solução dá $c_1 = a$ e $c_2 = b$ (existem) portanto é gerador de S.

A segunda solução dá $d_1 = 0$ e $d_2 = 0$ (única solução) portanto é um conjunto LI.

Concluimos que δ **é base de** S.

5. Dimensão de um espaço vetorial

Definição: Seja E um espaço vetorial.

Se o conjunto de vetores $\beta \subset E$ é uma base de E, **o número de elementos da base β é a dimensão do espaço vetorial E.**

5. Dimensão de um espaço vetorial

Definição: Seja E um espaço vetorial.

Se o conjunto de vetores $\beta \subset E$ é uma base de E, **o número de elementos da base β é a dimensão do espaço vetorial E.**

No último exemplo 5, vimos que $\delta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

é base do espaço vetorial $S = \left\{ \begin{bmatrix} a-2b \\ a \\ b \end{bmatrix} / \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$

Portanto, a dimensão de S é dois: $\dim(S) = 2$.

Exemplo

Considere o sistema homogêneo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo, temos o conjunto solução

$$S = \left\{ X = \begin{bmatrix} x_4 \\ -2x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} / x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Considerando S com a adição e multiplicação vezes escalar usuais de matrizes, S é um espaço vetorial.

Determine uma base para S

Toda solução tem a forma

$$X = \begin{bmatrix} x_4 \\ -2x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_4 \\ 0 \\ 0 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim, decimos que o conjunto dado pelos dois vetores fixos achados para representar qualquer solução, gera S.

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Para ser base do espaço vetorial S, falta verificar que é LI.

Uma base para S

Observe:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 \\ -2c_1 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

cuja única solução é $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$.

Portanto, β é base de S. S é um espaço vetorial de dimensão 2.

As triplas - $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) / \, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Uma tripla qualquer, $x \in \mathbb{R}^3$, pode ser expressada:

$$x = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0{,}0) + (0, x_2, 0) + (0{,}0, x_3)$$

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1(1{,}0{,}0) + x_2(0{,}1{,}0) + x_3(0{,}0{,}1)$$

o que significa que o conjunto com esses três vetores fixos gera o espaço $\mathbb{R}^3$.

As triplas - $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3)/\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Uma tripla qualquer, $x \in \mathbb{R}^3$, pode ser expressada:

$$x = (x_1, x_2, x_3) = x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1)$$

o que significa que o conjunto com esses três vetores fixos gera o espaço $\mathbb{R}^3$.

O conjunto de vetores fixos

$$\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

é LI, então β é uma base para $\mathbb{R}^3$.

As triplas - $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) / \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Uma tripla qualquer, $x \in \mathbb{R}^3$, pode ser expressada:

$$x = (x_1, x_2, x_3) = x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1)$$

o que significa que o conjunto com esses três vetores fixos gera o espaço $\mathbb{R}^3$.

O conjunto de vetores fixos

$$\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

é LI, então β é uma base para $\mathbb{R}^3$.

Assim, $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

β é conhecida como a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

As duplas (pares) $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2\,)/\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

Uma dupla qualquer, $x \in \mathbb{R}^2$, pode ser expressada:

$$x = (x_1, x_2\,) = x_1(1,0) + x_2(0,1)$$

o que significa que o conjunto com esses dois vetores fixos gera o espaço $\mathbb{R}^2$. Também são LI.

A base canônica(simples) de $\mathbb{R}^2$ é

$$\beta = \{(1,0), (0,1)\}$$

Assim, $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

As duplas (pares) $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2\ )/\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

Uma dupla qualquer, $x \in \mathbb{R}^2$, pode ser expressada:

$$x = (x_1, x_2\ ) = x_1(1{,}0) + x_2(0{,}1)$$

o que significa que o conjunto com esses dois vetores fixos gera o espaço $\mathbb{R}^2$. Também são LI.

A base canônica(simples) de $\mathbb{R}^2$ é

$$\beta = \{(1{,}0), (0{,}1)\}$$

Assim, $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

Não é a única: $\beta_1 = \{(1{,}1), (-1{,}1)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$.

$\beta_2 = \{(2{,}3), (-3{,}2)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$.

As n-uplas (énuplas) $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \ / \ x_1, x_2, \dots, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Para qualquer, $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1(1,0, \dots, 0) + \cdots + x_n(0, \dots, 0,1)$$

O conjunto com esses n vetores fixos gera $\mathbb{R}^n$.

O conjunto de vetores fixos

$$\beta = \{(1,0, \dots, 0), (0,1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0,1)\}$$

é LI, então β é uma base para $\mathbb{R}^n$.

Assim, $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

β é conhecida como a base canônica de $\mathbb{R}^n$.