ZAB0161 - Álgebra linear com aplicações em geometria analítica
Lista 1 - Gabarito.

Para todo sistema de equações lineares utilize o método de eliminação Gauss-Jordan.

1. Resolver os seguintes sistemas expressando os sistemas de equações como uma equação matricial

(a) $\begin{cases} 2x+4z-5y=-3 \\ 2z-2y+x=5 \\ -4y+x+5z=10 \end{cases}$.

Equação matricial

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Matriz estendida

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -5 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 5 & 10 \end{array}\right].$$

Resolvendo por Gauss-Jordan:

Observar: 1. É recomendável utilizar somente uma operação elementar a cada passo.
2. Não precisa iniciar procurando a unidade (1) na primeira linha e primeira coluna, inicie aproveitando as unidades que já existam sempre que possível.
3. Na resolução abaixo, iniciou-se com o 1 na segunda linha primeira coluna.
4. Após fazer as primeiras contas aparece um -1, na segunda coluna e primeira fila, então escolheremos esse número por ser mais simples comparando com todos os outros números não nulos - nunca pegaremos o zero como pivô.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & -1 & 0 & -13 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & 0 & 13 \\ 1 & 0 & 2 & 31 \\ 0 & 0 & 3 & 31 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & 0 & 13 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{31}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{31}{3} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & \frac{31}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{31}{3} \end{array}\right].$$

Portanto a solução é

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{31}{3} \\ 13 \\ \frac{31}{3} \end{bmatrix}.$$

(b) $\begin{cases} 2x+8y+6z=20 \\ 4x+2-2z=-2y \\ 3x-y+z=11 \end{cases}$.

Equação matricial $\begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -2 \\ 11 \end{bmatrix}$.

Matriz estendida $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 6 & 20 \\ 4 & 2 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 11 \end{array}\right]$.

Resolvendo:

Observar: Não fale de substrair, fale de multiplicar vezes o $(-1.)$ e some. Não fale de dividir por a, fale de multiplicar vezes o fator $\frac{1}{a}$.
Apenas a terceira linha e coluna tem a unidade, então recomendamos iniciar considerando esse elemento como o primeiro "pivô".

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -16 & 14 & 0 & -46 \\ 10 & 0 & 0 & 20 \\ 3 & -1 & 1 & 11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 14 & 0 & -14 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

(c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 1 = x_3 \\ -2x_3 + 3x_2 - 2x_1 + x_4 = -6 \\ -x_1 + x_4 - 3x_3 + 2x_2 = -5 \end{cases}.$

Equação matricial $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -6 \\ -5 \end{bmatrix}$.

Matriz estendida

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & -6 \\ -1 & 2 & -3 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

Resolvendo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} & \frac{-1}{3} & 3 \\ 0 & 1 & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & -1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(d) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + x_4 - x_5 = -3 \\ x_3 - 2x_2 + x_1 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - 4 + 6x_4 + 2x_2 - x_5 = 6 \end{cases}.$

Equação matricial $\begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}.$

Resolvendo:

Observar: temos três equações (três exigências) mas cinco valores incôgnitas, assim é provável que tenhamos pelo menos duas incôgnitas "livres" (que podem assumir quaisquer valor pois não temos mais restrições).

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 2 & -5 & 4 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 6 & -1 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc:c} 0 & -1 & 2 & 3 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 7 & -2 & 9 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc:c} 0 & 1 & -2 & -3 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & -7 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 7 & 19 & -14 & -11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc:c} 0 & 1 & 0 & \frac{17}{7} & -1 & \frac{13}{7} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{8}{7} & 1 & \frac{44}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{19}{7} & -2 & \frac{-11}{7} \end{array}\right].$$

Assim, a solução desta equação possui **dois graus de liberdade**.

Fazendo: $x_4 = r \in \mathbb{R}$, e $x_5 = s \in \mathbb{R}$, temos

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{44}{7} - \frac{8}{7}r - s \\ \frac{13}{7} - \frac{17}{7}r + s \\ \frac{-11}{7} - \frac{19}{7}r + 2s \\ r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{44}{7} \\ \frac{13}{7} \\ \frac{-11}{7} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} \frac{-8}{7} \\ \frac{-17}{7} \\ \frac{-19}{7} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Calcule os produtos AB e BA, sempre que possível

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \Longrightarrow AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 2 & -8 & 4 \\ 4 & -16 & 8 \end{bmatrix}$

Nota: Ao comutar as matrizes nas multiplicações obtemos resultados diferentes. Assim, a multiplicação de matrizes não é necessariamente comutativa. No exemplo $AB \neq BA$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \Longrightarrow AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 4 \\ 4 & -16 & 8 \end{bmatrix}$

Nota: Observar como um produto de duas matrizes não zero tem como produto a matriz nula. Em números reais isso não acontece.

3. Determine $AB - BA$

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow AB - BA = \begin{bmatrix} -7 & -2 & -6 \\ 7 & 12 & 8 \\ -15 & -1 & -5 \end{bmatrix}.$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 11 \end{bmatrix} \Longrightarrow AB - BA = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 0 & 3 & 24 \\ 12 & -27 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Obter uma fórmula para A^n. Para determinar A^n, é bom calcular pelo menos A^2, A^3 e A^4. Se for necessário, calcule outras potências.
No exemplo: $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Como podemos confirmar a entrada superior direita é a soma das entradas da segunda coluna da potência anterior, logo

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como podemos ter certeza que a fórmula é válida para quaisquer n? Precisamos utilizar indução matemática para confirmar.
A indução matemática considera três passos.
1. Verificar que a fórmula funciona para $n = 1$: No exercício é $A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, então é válido para $n = 1$.
2. Assumir que funciona para $(n-1)$, isto é: assumimos que

$$A^{(n-1)} = \begin{bmatrix} 1 & (n-1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Provar que funciona para n, isto é: fazemos

$$A^n = A^{n-1}A = \begin{bmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1+(n-1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, a fórmula é validada por indução matemática.

5. Seja $A = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$. Obter uma fórmula para A^n.
Calculando

$$A^2 = \begin{bmatrix} cos^2(\theta) - sen^2(\theta) & -2cos(\theta)sen(\theta) \\ 2sen(\theta)cos(\theta) & -sen^2(\theta) + cos^2(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(2\theta) & -sen(2\theta) \\ sen(2\theta) & cos(2\theta) \end{bmatrix}$$

Calculando A^3,

$$A^3 = \begin{bmatrix} cos(2\theta) & -sen(2\theta) \\ sen(2\theta) & cos(2\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} cos(2\theta)cos(\theta) - sen(2\theta)sen(\theta) & -cos(2\theta)sen(\theta) - sen(2\theta)cos(\theta) \\ sen(2\theta)cos(\theta) + cos(2\theta)sen(\theta) & -sen(2\theta)sen(\theta) + cos(2\theta)cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(3\theta) & -sen(3\theta) \\ sen(3\theta) & cos(3\theta) \end{bmatrix}.$$

A fórmula que podemos assumir é

$$A^n = \begin{bmatrix} cos(n\theta) & -sen(n\theta) \\ sen(n\theta) & cos(n\theta) \end{bmatrix}.$$

Precisa ser verificado por indução matemática.

1. Para $n = 1$, é válido pois: $A^1 = \begin{bmatrix} cos(1\theta) & -sen(1\theta) \\ sen(1\theta) & cos(1\theta) \end{bmatrix}$.

2. Supondo que é válido

$$A^{(n-1)} = \begin{bmatrix} cos(n-1)\theta & -sen(n-1)\theta \\ sen(n-1)\theta & cos(n-1)\theta \end{bmatrix}$$

3. Verificamos para n, isto é

$$A^n = A^{n-1}A = \begin{bmatrix} cos(n-1)\theta & -sen(n-1)\theta \\ sen(n-1)\theta & cos(n-1)\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cos(n-1)\theta cos(\theta) - sen(n-1)\theta sen(\theta) & -cos(n-1)\theta sen(\theta) - sen(n-1)\theta cos(\theta) \\ sen(n-1)\theta cos(\theta) + cos(n-1)\theta sen(\theta) & -sen(n-1)\theta sen(\theta) + cos(n-1)\theta cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cos((n-1)\theta + \theta) & -sen(\theta + (n-1)\theta) \\ sen((n-1)\theta + \theta) & cos(\theta + (n-1)\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(n\theta) & -sen(n\theta) \\ sen(n\theta) & cos(n\theta) \end{bmatrix}$$

Assim fica provado que a fórmula é válida.

6. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Mostre que $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e determine uma expressão geral para A^n por indução.

Calculando o produto de matrizes AA obtemos $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Calculando $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Observa-se que a diagonal principal sempre está formada por 1, embaixo da diagonal todo é zero, na diagonal acima da diagonal principal temos sempre o número da potência.

O único valor que precisamos identificar é o da esquina na direita superior, o qual forma uma sequência 1, 3, 6 e 10. O $3 = 1 + 2$, o $6 = 1 + 2 + 3$, o $10 = 1 + 2 + 3 + 4$, isto é, cada um desses números é a soma dos primeiros números até chegar na potência calculada.

Por propriedades da soma de números inteiros, para A^2 temos a expressão: $a_{13} = \frac{2(3)}{2}$, para A^3 será $a_{13} = \frac{3(4)}{2}$, assim, para A^n temos $a_{13} = \frac{n(n+1)}{2} = \begin{pmatrix} n+1 \\ n-1 \end{pmatrix}$ (A última expressão representa o número combinatório de $n+1$ elementos agrupados em grupos de $n-1$ elementos).

Aplicamos a indução matemática para mostrar que a igualdade é válida.

1. Para $n = 1$, é válido pois:

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1(2)}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$$

2. **Considerando válida a expressão para $n-1$, então** $A^{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & n-1 & \frac{(n-1)(n)}{2} \\ 0 & 1 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Agora devemos provar para n, então utilizamos

$$A^n = AA^{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & n-1 & \frac{(n-1)(n)}{2} \\ 0 & 1 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{(n)(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Resolver o sistema $2X + 3Y = A$ e $5X - 2Y = B$, $X, Y \in M_{2x2}$, onde
$A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 16 & -6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 16 & -40 \\ 21 & 23 \end{bmatrix}$.
A ideia no presente problema é considerar a matriz X e Y como uma entidade completa, logo podemos considerar um sistema e aplicar eliminação de uma delas.
Resolvendo:
$\begin{cases} 2X + 3Y = A \\ 5X - 2Y = B \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4X + 6Y = 2A \\ 15X - 6Y = 3B \end{cases} \Longrightarrow 19X = 2A + 3B \Longrightarrow X = \frac{1}{19}(2A + 3B)$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

$\begin{cases} 2X + 3Y = A \\ 5X - 2Y = B \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 10X + 15Y = 5A \\ -10X + 4Y = -2B \end{cases} \Longrightarrow 19Y = 5A - 2B \Longrightarrow Y = \frac{1}{19}(5A - 2B)$

$$Y = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

UM MOMENTO!!!
Os sistemas devem ser resolvidos por Gauss - Jordan. Então o método de eliminação não é PERMITIDO.
Observar que as incógnitas são matrizes X e Y, mas continuam sendo incógnitas.
Os termos independentes são matrizes, mas são termos independentes, como seria muito inapropriado escrever as matrizes A e B na coluna de termos independentes escrevemos como letras, e no final substiruimos pelos seus valores.
Então monta-se a matriz estendida para o sistema e resolve-se pelo método de Gauss-Jordan.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & A \\ 5 & -2 & B \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{A}{2} \\ 5 & -2 & B \end{bmatrix} \text{ multiplicando a primeira linha vezes } \frac{1}{2},$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{A}{2} \\ 0 & -\frac{19}{2} & \frac{2B-5A}{2} \end{bmatrix} \text{ multiplica a primeira vezes } -5 \text{ e soma na segunda linha,}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2A+3B}{19} \\ 0 & 1 & \frac{(5A-2B)}{19} \end{bmatrix} \begin{cases} \text{multiplicar a segunda linha vezes } -\frac{2}{19} \\ \text{multiplicar a segunda vezes } -\frac{3}{2} \text{ e somar na primeira linha} \end{cases}.$$

Daqui a matrizes incógnitas são

$$X = \frac{1}{19}(2A + 3B) = \frac{1}{19}\left(2\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 16 & -6 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 16 & -40 \\ 21 & 23 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

e

$$Y = \frac{1}{19}(5A - 2B) = \frac{1}{19}\left(5\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 16 & -6 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 16 & -40 \\ 21 & 23 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

8. Tentar resolver a seguinte equação matricial $Ax = b$, para os seguintes casos:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Aplicando Gauss-Jordan obtemos a solução: $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & a \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ c \end{bmatrix}$, neste caso discutir a solução em função dos parâmetros a e c.

Resolução: Trabalhando a matriz estendida temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & a & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & a-1 & c-3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & a+5 & c-1 \end{bmatrix}.$$

Observa-se que a entrada $(a+5)$ não pode ser convertida como pivô igual a 1, pois não sabemos se é diferente de zero ou zero. Temos dois casos para analisar.

Se $a+5=0$, (isto é $a=-5$), então temos o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & c-1 \end{bmatrix}$$

.

Da última linha temos $0 = c-1$, logo para ter solução $c=1$.

Isto é, se $a=-5$ e $c=1$, temos a solução

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2r \\ 1-3r \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

E se $a=-5$ e se $c \neq 1$ temos uma contradição, pois $c-1 \neq 0$, logo nesse caso não existe solução.

Por último, se $a \neq -5$, existe a inversa de $(a+5)$, e multiplicando a última linha vezes a inversa temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & a+5 & c-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2a+2c+8}{a+5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-3c+8}{a+5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c-1}{a+5} \end{bmatrix}.$$

Logo a solução é única e igual a

$$X = \frac{1}{a+5} \begin{bmatrix} 2a+2c+8 \\ a-3c+8 \\ c-1 \end{bmatrix}.$$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Resolução: No caso a matriz X tem a forma $X = \begin{bmatrix} u & x \\ v & y \\ w & z \end{bmatrix}$, e a solução é

$$X = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{2} & -3 \\ \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

(Nota: é idêntico a resolver dois sistemas lineares de 3 incógnitas).

9. Discuta em função dos parâmetros os seguintes sistemas

(a) **Se escolheu** $\begin{cases} x + 4y + 3z = 10 \\ 2x + 7y - 2z = 10 \\ x + 5y + \alpha z = \beta \end{cases}$

Resolução: A matrix estendida do sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 10 \\ 2 & 7 & -2 & 10 \\ 1 & 5 & \alpha & \beta \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & -1 & -8 & -10 \\ 0 & 1 & \alpha - 3 & \beta - 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -29 & -30 \\ 0 & 1 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & \alpha - 11 & \beta - 20 \end{bmatrix}$$

Para obter um pivô igual a 1 na posição de $(\alpha - 11)$, precisamos que tenha valor diferente de zero, caso contrário não existe inversa. Analisamos as duas possibilidades:
Se $\alpha - 11 \neq 0$, isto é$\alpha \neq 11$, podemos multiplicar vezes $\frac{1}{\alpha-11}$ na terceira linha para conseguir um pivô igual a 1, logo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -29 & -30 \\ 0 & 1 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\beta-20}{\alpha-11} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-250+29\beta-30\alpha}{\alpha-11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{50+10\alpha-8\beta}{\alpha-11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\beta-20}{\alpha-11} \end{bmatrix}$$

sendo a solução única, para $\alpha \neq 11$,

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-250+29\beta-30\alpha}{\alpha-11} \\ \frac{50+10\alpha-8\beta}{\alpha-11} \\ \frac{\beta-20}{\alpha-11} \end{bmatrix}.$$

Se $\alpha = 11$, então, a matriz extendida tem a forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -29 & -30 \\ 0 & 1 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & \alpha - 11 & \beta - 20 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -29 & -30 \\ 0 & 1 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & \beta - 20 \end{bmatrix}$$

Logo, se $\beta = 20$, temos uma verdade evidente $0 = 0$, temos infinitas soluções para uma variável livre, fazendo $z = r \in \mathbb{R}$, temos

$$X = \begin{bmatrix} -30 + 29r \\ 10 - 8r \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 29 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Mas, se $\beta \neq 20$, temos uma contradição, isto é não existem soluções (para $\alpha = 11$ e $\beta \neq 20$).

Se escolheu $\begin{cases} x + 4y + 3z = 10 \\ 2x + 7y + 9z = 30 \\ x + 5y + \alpha z = \beta \end{cases}$ a resposta deve ser

Se $\alpha \neq 0$ a solução existe e toma a forma $X = \frac{1}{\alpha}\begin{bmatrix} 50\alpha - 15\beta \\ -10\alpha + 3\beta \\ \beta \end{bmatrix}$.

Se $\alpha = 0$, temos dois casos:
se $\beta \neq 0$ não existe solução.
se $\beta = 0$ existem infinitas soluções da forma

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 - 15x_3 \\ -10 + 3x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -15 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 2 \\ 2y + 6t = 2 \\ \alpha y + 3t = 1 \\ 5y + z - t = 2 \end{cases}$

Resolução: A matriz estendida é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & \alpha & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & (3-3\alpha) & 1-\alpha \\ 0 & 0 & 1 & -16 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 46 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3(1-\alpha) & 1-\alpha \\ 0 & 0 & 1 & -16 & -3 \end{bmatrix}.$$

Se $\alpha \neq 1$, então podemos multiplicar a terceira linha vezes $\frac{1}{3(1-\alpha)}$, obtendo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 46 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -16 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{19}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{7}{3} \end{bmatrix}.$$

Assim para qualquer $\alpha \neq 1$, existe uma única solução dada por

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{19}{3} \\ 0 \\ \frac{7}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Se $\alpha = 1$, a terceira equação dá $0t = 0$, que é uma verdade absoluta independente do valor de t, assim teremos infinitas soluções. A variável livre pode ser a $t = r \in \mathbb{R}$, então a forma das soluções será:

$$X = \begin{bmatrix} 9 - 46r \\ 1 - 3r \\ -3 + 16r \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -46 \\ -3 \\ 16 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(c) $\begin{cases} 2x + y + z = -6\beta \\ \alpha x + 3y + 2z = 2\beta \\ 3x + y + (\alpha+1)z = 4 \end{cases}$

Trabalhando sobre a matriz estendida:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -6\beta \\ \alpha & 3 & 2 & 2\beta \\ 3 & 1 & \alpha+1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -6\beta \\ \alpha - 6 & 0 & -1 & 20\beta \\ 1 & 0 & \alpha & 6\beta + 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -4+\alpha & 1 & 0 & 14\beta \\ 6-\alpha & 0 & 1 & -20\beta \\ 1 - 6\alpha + \alpha^2 & 0 & 0 & 4 + 6\beta + 20\alpha\beta \end{bmatrix}$$

Para obter uma única solução precisamos de um pivô igual a 1 na terceira linha e primeira coluna. Isso é possível só se $1-6\alpha+\alpha^2 \neq 0$.
Assim, existe $\frac{1}{1-6\alpha+\alpha^2}$ e podemos multiplicar nessa linha vezes essa inversa. Obtemos

$$\begin{bmatrix} -4+\alpha & 1 & 0 & 14\beta \\ 6-\alpha & 0 & 1 & -20\beta \\ 1-6\alpha+\alpha^2 & 0 & 0 & 4+6\beta+20\alpha\beta \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{16-4a+38b-10ab-6a^2b}{1-6\alpha+\alpha^2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-24+4a-56b+6ab}{1-6\alpha+\alpha^2} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{4+6\beta+20\alpha\beta}{1-6\alpha+\alpha^2} \end{bmatrix}.$$

Para o caso $1-6\alpha+\alpha^2=0$, temos

$$\begin{bmatrix} -4+\alpha & 1 & 0 & 14\beta \\ 6-\alpha & 0 & 1 & -20\beta \\ 1-6\alpha+\alpha^2 & 0 & 0 & 4+6\beta+20\alpha\beta \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -4+\alpha & 1 & 0 & 14\beta \\ 6-\alpha & 0 & 1 & -20\beta \\ 0 & 0 & 0 & 4+6\beta+20\alpha\beta \end{bmatrix}.$$

Logo, se $4+6\beta+20\alpha\beta=0$, temos infinitas soluções, com uma incógnita livre, que pode ser $x=r\in\mathbb{R}$, então:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 14\beta+(4-\alpha)r \\ -20\beta+(\alpha-6)r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 14\beta \\ -20\beta \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} 1 \\ 4-\alpha \\ \alpha-6 \end{bmatrix}.$$

Mas, se $4+6\beta+20\alpha\beta \neq 0$, temos uma contradição, logo não existem soluções.

10. Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2x+1 & 2 & z-1 \\ x+2 & -1 & 2y \\ y-1 & 8 & x-2z \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3-2y & 2 & x+y \\ z+3 & -1 & z-2x \\ z-5 & b & -1 \end{bmatrix}$.
Se $A=B$, determine o valor de xyz.
Se $A=B$ então $a_{ij}=b_{ij}$, para todo i e para todo j. Portanto temos o seguinte sistema de equações: $\begin{cases} 2x+1=3-2y \\ x+2=z+3 \\ y-1=z-5 \\ 8=b \\ z-1=x+y \\ 2y=z-2x \\ x-2z=-1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x+2y=2 \\ x-z=1 \\ y-z=-4 \\ b=8 \\ x+y-z=-1 \\ 2x+2y-z=0 \\ x-2z=-1 \end{cases}.$
Como $b=8$ está bem determinado focamos nas equações com as incógnitas x, y e z. Essas incógnitas devem satisfazer 6 equações, portanto o sistema a ser resolvido tem a seguinte matriz estendida

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, ao utilizar Gauss-Jordan o sistema foi reduzido a sua menor expressão. Además como a primeira, quinta e sexta linhas verificam uma verdade evidente $0=0$, então a solução obtida é válida, isto é $x=3$, $y=-2$ e $z=2$.
A resposta é $xyz=-12$.