ZAB0161 - Álgebra Linear com Aplicações em Geometria Analítica

Métodos de resolução: Decomposição LU e LDU

Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle

ZAB (Dpto. de Ciências Básicas) – FZEA – USP

Calcule a matriz inversa

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0.5 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Determinar a matriz inversa (Gauss-Jordan)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-11}{16} & \frac{-1}{8} & \frac{7}{8} \\ \frac{5}{16} & \frac{-1}{8} & \frac{-1}{8} \\ \frac{17}{32} & \frac{3}{16} & \frac{-5}{16} \end{bmatrix}$$

Represente a inversa utilizando uma matriz de números inteiros vezes escalar.

Calcule a matriz inversa

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0.5 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A inversa satisfaz: $AA^{-1} = I$,

então $X = A^{-1}$

Resolver montando a matriz estendida:

$$[A \quad | \quad I]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & -4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Calcule a matriz inversa

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & -4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & -4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (-0.5) * L1 + L2 \\ (-2) * L1 + L3 \end{matrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(-\frac{1}{5}\right) * L2$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-2) * L2 + L3 \\ \\ 3 * L2 + L3 \end{matrix}$$

Calcule a matriz inversa

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{14}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{5} & \frac{-17}{10} & \frac{-3}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left(-\frac{14}{5}\right) * L3 + L1 \\ \left(\frac{2}{5}\right) * L3 + L2 \\ \left(-\frac{5}{16}\right) * L3 \end{matrix}$$

Continuando até obter a identidade, então fica em evidência a inversa na matriz do lado direito:

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-11}{16} & \frac{-1}{8} & \frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{16} & \frac{-1}{8} & \frac{-1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{17}{32} & \frac{3}{16} & \frac{-5}{16} \end{bmatrix}$$

Utilizando Matriz Inversa na Resolução

Sistemas de equações podem ser resolvidos utilizando a matriz inversa (se existir). Observar:

Dada uma equação matricial

$$AX = F$$

Se a matriz inversa A^{-1} existe, multiplica-se:

$$A^{-1}AX = A^{-1}F$$

No lado esquerdo temos a matriz identidade:

$$IX = X = A^{-1}F$$

Então a solução é o produto da inversa vezes a matriz F.

Métodos de decomposição

Decomposição LU

Decomposição LDU

Método de decomposição LU

Seja a matriz estendida de um sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix}$$

Trabalhar apenas na matriz de coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Antes de resolver, pergunta-se:

Já vimos que a matriz pode ser escalonada: quando se escalona uma matriz o que realmente é obtido???

Método de decomposição LU

Trabalhando apenas na matriz de coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Resolve-se pelo método do escalonamento:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-6}{5} \end{bmatrix}$$

Pronto!!! O que pode ser extraído desse trabalho?

Método de decomposição LU

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-6}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-6}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-7}{5} & \frac{-1}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-6}{5} \end{bmatrix}$$

Método de decomposição LU

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-7}{5} & \frac{-1}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-6}{5} \end{bmatrix}$$

Isto é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-7}{5} & \frac{-1}{5} & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-6}{5} \end{bmatrix}$$

Mas a inversa da matriz vermelha é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-7}{5} & \frac{-1}{5} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

Método de decomposição LU

Portanto, tem-se uma igualdade para a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-7}{5} & \frac{-1}{5} & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-6}{5} \end{bmatrix}$$

Utilizando a inversa das operações elementares:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-6}{5} \end{bmatrix} = LU$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-6}{5} \end{bmatrix}$$

Método de decomposição LU

Lembrando as operações elementares:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-6}{5} \end{bmatrix}$$

Observe a decomposição:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-6}{5} \end{bmatrix} = LU$$

Método de decomposição LU

Supondo que se precisa resolver a equação

$$AX = F$$

Se a matriz foi decomposta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-6}{5} \end{bmatrix} = LU$$

Faz-se

$$AX = LUX = F$$

Agrupa-se a matriz superior U com X: $UX = Y$

$$LY = F$$

Método de decomposição LU

Observar que se resolve facilmente a equação

$$LY = F$$

Pois está escalonada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = F = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

A solução é

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Método de decomposição LU

Depois se resolve a equação:

$$UX = Y$$

Onde a matriz é escalonada, então:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-6}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Facilmente se resolve pelas últimas incógnitas:

$$\frac{-6}{5} x_3 = \frac{1}{5} \Rightarrow x_3 = \frac{-1}{6}$$

Substituindo encontra-se $x_2 = \frac{-1}{6}$ e depois $x_1 = \frac{4}{3}$.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{-1}{6} \\ \frac{-1}{6} \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Método de decomposição LDU

A matriz original A foi decomposta em duas escalonadas (no formato $A = LU$):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-6}{5} \end{bmatrix}$$

Mas, é possível conseguir unidades na diagonal de U a fim de ter uma estrutura similar a L ??

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-6}{5} \end{bmatrix}$$

Método de decomposição LDU

Observar que os valores da diagonal de U podem ser extraídos e construir uma matriz superior com unidades na diagonal:

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-6}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & {\color{red}?} & {\color{red}?} \\ 0 & 1 & {\color{red}?} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observar

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-6}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Método de decomposição LDU

Portanto, a matriz de coeficientes se representa como um produto de três matrizes especiais:

$$A = LU = LD\overline{U}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LD\overline{U}$$

NOTA: Tanto a matriz inferior como a matriz superior tem **unidades na diagonal**, assim os valores da diagonal foram separados.

Decomposição LDU

Resolva a equação matricial utilizando LDU:

$$AX = F$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

A decomposição já é conhecida, então

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Decomposição LDU

Processo de resolução:

$$AX = F \Rightarrow LD\bar{U}X = F$$

São realizadas várias mudanças de variáveis:

Primeira: $\bar{U}X = Y$

Deve-se resolver: $AX = F \Rightarrow LDY = F$

Segunda: $DY = Z$

Deve-se resolver o sistema: $LZ = F$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Decomposição LDU

Agora se resolve:

$$DY = Z$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-2}{5} \\ \frac{-1}{6} \end{bmatrix}$$

Por último, se resolve:

$$\bar{U}X = Y$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-2}{5} \\ \frac{-1}{6} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{-1}{6} \\ \frac{-1}{6} \end{bmatrix}$$

Não vale para qualquer operação elementar!!!

Seja a matriz estendida de um sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix}$$

Pelo método do escalonamento, foi resolvido realizando os seguintes passos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & -5 & -7 & -2900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix}$$

Não vale para qualquer operação elementar!!!

Continuando:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 2400\\0 & -5 & -7 & -2900\\3 & 2 & 4 & 2900\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 2400\\0 & 5 & 7 & 2900\\3 & 2 & 4 & 2900\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\-3 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 2400\\0 & 5 & 7 & 2900\\3 & 2 & 4 & 2900\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 2400\\0 & 5 & 7 & 2900\\0 & -7 & -11 & -4300\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 2400\\0 & 5 & 7 & 2900\\0 & -7 & -11 & -4300\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 2400\\0 & 5 & 7 & 2900\\0 & 7 & 11 & 4300\end{bmatrix}$$

Aqui já se consegue escalonar:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & \frac{-7}{5} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 2400\\0 & 5 & 7 & 2900\\0 & -7 & -11 & -4300\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 2400\\0 & 5 & 7 & 2900\\0 & 0 & \frac{6}{5} & 240\end{bmatrix}$$

Não vale para qualquer operação elementar!!!

Para entender melhor, só matriz de coeficientes

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -7 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -7 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Juntando as duas operações elementares:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -7 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Não vale para qualquer operação elementar!!!

Continuando, sempre desde a matriz original:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -7 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -7 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Substituindo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Não vale para qualquer operação elementar!!!

Continuando, sempre desde a matriz original:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & -7 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & -7 & -11 \end{bmatrix}$$

Novamente juntando como operação elementar

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & -7 & -11 \end{bmatrix}$$

Não vale para qualquer operação elementar!!!

Continuando, sempre desde a matriz original:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & -7 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & -7 & -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

Também fazendo uma operação elementar

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

Não vale para qualquer operação elementar!!!

Continuando, sempre desde a matriz original:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-7}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-7}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

Não vale para qualquer operação elementar!!!

Chegou-se na matriz superior:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

A inversa da matriz vermelha é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{-7}{5} & -1 \end{bmatrix}$$

Obteve-se uma matriz superior mas a outra não é L:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{-7}{5} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

Técnica para o método Gauss-Jordan

O passo a passo para aplicar o

Método de Gauss-Jordan

No cálculo da inversa de uma matriz

Calcule a matriz inversa

Dada uma equação matricial, construir a matriz estendida correspondente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & -4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicar o método de Gauss-Jordan implica em escolher um pivô em alguma linha e coluna e com ele zerar as outras entradas nessa coluna. Procure o pivô mais simples e de preferência faça unidade.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \cancel{0.5} & -4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{2} & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule a matriz inversa

*O pivô só pode ser escolhido entre os elementos da matriz de coeficientes. Se **n** é a ordem da matriz de coeficientes, então identifique **n** operações elementares ao máximo, por passo. A primeira para fazer unidade o pivô (se precisar), e outras (**n-1**) operações elementares para zerar as outras entradas na coluna do pivô:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & -4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} (1) * L1 \\ (-0.5) * L1 + L2 \\ (-2) * L1 + L3 \end{array}$$

Calcule a matriz inversa

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & -4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & -4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (-0.5) * L1 + L2 \\ (-2) * L1 + L3 \end{matrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \left(-\frac{1}{5}\right) * L2 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-2) * L2 + L3 \\ \\ 3 * L2 + L3 \end{matrix}$$

Calcule a matriz inversa

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{14}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{5} & \frac{-17}{10} & \frac{-3}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-2) * L2 + L1 \\ \\ 3 * L2 + L3 \end{matrix}$$

Continuando até obter a identidade, então fica em evidência a inversa na matriz do lado direito:

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-11}{16} & \frac{-1}{8} & \frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{16} & \frac{-1}{8} & \frac{-1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{17}{32} & \frac{3}{16} & \frac{-5}{16} \end{bmatrix}$$