ZAB0161 - Álgebra Linear com Aplicações em Geometria Analítica

Métodos de resolução: Método de Gauss-Jordan

Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle

ZAB (Dpto. de Ciências Básicas) – FZEA – USP

Operações elementares

Em conclusão:

a) Na matriz estendida a troca de linhas é multiplicar com uma matriz adequada de uns:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1900 \\ x + 3y + 5z = 2400 \\ 3x + 2y + 4z = 2900 \end{cases} \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 2400 \\ 2x + y + 3z = 1900 \\ 3x + 2y + 4z = 2900 \end{cases} \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{array}\right]$$

Operações elementares

Agora a segunda operação sobre o sistema:

b) Multiplicar uma linha vezes um número:

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 2400 \\ 2x + y + 3z = 1900 \\ 3x + 2y + 4z = 2900 \end{cases} \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & -10 & -4800 \\ 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix}$$

Tem-se o sistema de equações:

$$\begin{cases} -2x - 6y - 10z = -4800 \\ 2x + y + 3z = 1900 \\ 3x + 2y + 4z = 2900 \end{cases} \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -6 & -10 & -4800 \\ 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{array}\right]$$

Operações elementares

Agora a terceira operação que zera coeficientes, mais ainda, sem modificar a primeira equação:

c) Multiplicar uma linha vezes um número e somar o resultado sobre outra linha:

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 2400 \\ 2x + y + 3z = 1900 \\ 3x + 2y + 4z = 2900 \end{cases} \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & -5 & -7 & -2900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 2400 \\ 0x - 5y - 7z = -2900 \\ 3x + 2y + 4z = 2900 \end{cases} \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & -5 & -7 & -2900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{array}\right]$$

Operações elementares

As **operações elementares**, realizadas via multiplicações com matrizes bem definidas permitem:

a) Permutar a linha i e a linha j de uma matriz,

b) Multiplicar uma linha i vezes um escalar não nulo, modificando os valores da linha i de uma matriz,

c) Multiplicar uma linha i vezes um escalar não nulo, e somar sobre a linha j, modificando a linha j da matriz.

Funciona com matriz qualquer, não apenas para matrizes estendidas.

Operações elementares

a) Troca de linhas, (permutando todas as linhas)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

b) Multiplicar uma linha vezes um escalar,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 9 \\ -6 & -4 & -8 \end{bmatrix}$$

c) Multiplicar uma linha vezes um escalar e o resultado somar sobre uma outra linha.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -11 \end{bmatrix}$$

Sistema linear a resolver

Voltando ao exemplo do sistema linear da aula anterior. Lembrar que existe uma equação matricial equivalente ao sistema linear da forma:

$$AX = F$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1900 \\ 2400 \\ 2900 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 3z = 1900 \\ x + 3y + 5z = 2400 \\ 3x + 2y + 4z = 2900 \end{cases}$$

A matriz estendida tem a essência do sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1900 \\ x + 3y + 5z = 2400 \\ 3x + 2y + 4z = 2900 \end{cases} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix}$$

Método do escalonamento

Lembrar que para resolver o sistema, foram eliminadas incógnitas. E obteve-se:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1900 \\ x + 3y + 5z = 2400 \\ 3x + 2y + 4z = 2900 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 5z = 2400 \\ 0x + 5y + 7z = 2900 \\ 0x + 0y + 1.2z = 240 \end{cases}$$

Esse sistema tem a seguinte matriz estendida

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 2400 \\ 0x + 5y + 7z = 2900 \\ 0x + 0y + 1.2z = 240 \end{cases} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & 5 & 7 & 2900 \\ 0 & 0 & 1.2 & 240 \end{bmatrix}$$

Existe relação entre a matriz estendida do sistema original e a última **matriz escalonada**?

Método do escalonamento

Como chegar da primeira para segunda matriz?

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix} ???? \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & 5 & 7 & 2900 \\ 0 & 0 & 1.2 & 240 \end{bmatrix}$$

Pretende-se trabalhar com a matriz estendida e operações elementares, para obter uma matriz **escalonada equivalente**. Sendo matrizes equivalentes os sistemas de equações lineares correspondentes terão a mesma solução.

No caso a solução será a matriz $X = \begin{bmatrix} 500 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix}$.

Método do escalonamento

Seja a matriz estendida

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix}$$

Permuta-se a primeira e segunda linhas:

$$\color{red}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix}$$

Sem considerar o produto tem-se equivalência:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix}$$

Método do escalonamento

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix}$$

Multiplica-se a primeira linha vezes (-2) e soma-se sobre a segunda linha (primeiro zero):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & -5 & -7 & -2900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix}$$

Multiplica-se vezes (-1) na segunda linha (evitar sinal negativo):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & -5 & -7 & -2900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & 5 & 7 & 2900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix}$$

Método do escalonamento

Considerando apenas as equivalência tem-se:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & -5 & -7 & -2900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & 5 & 7 & 2900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix}$$

Agora multiplica-se a primeira linha vezes (-3) e soma-se na terceira linha(zera outro coeficiente)

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & 5 & 7 & 2900 \\ 0 & -7 & -11 & -4300 \end{bmatrix}$$

Multiplica-se a terceira linha para trocar o sinal.

Método do escalonamento

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & 5 & 7 & 2900 \\ 0 & 7 & 11 & 4300 \end{bmatrix}$$

Multiplica-se a segunda linha vezes $\left(-\frac{7}{5}\right)$ e soma-se sobre a terceira linha (zera o 7):

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & 5 & 7 & 2900 \\ 0 & 0 & 11-\frac{49}{5} & 4300-\frac{20300}{5} \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & 5 & 7 & 2900 \\ 0 & 0 & \frac{55}{5}-\frac{49}{5} & 4300-4060 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & 5 & 7 & 2900 \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} & 240 \end{bmatrix}$$

La matriz foi escalonada!!!

Método do escalonamento

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 2400 \\ 0x + 5y + 7z = 2900 \\ 0x + 0y + 1.2z = 240 \end{cases} \approx \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & 5 & 7 & 2900 \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} & 240 \end{bmatrix}$$

Agora pode ser resolvido a partir da última incógnita até a primeira incógnita.

Nota: observar que pode ser simplificada ainda a matriz estendida, multiplicando a terceira linha vezes $(\frac{5}{6})$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & 5 & 7 & 2900 \\ 0 & 0 & \frac{6}{5}(\frac{5}{6}) & 240(\frac{5}{6}) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & 5 & 7 & 2900 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{bmatrix}$$

Método do escalonamento

Obter **unidade na diagonal** coloca em evidência os valores das incógnitas. Assim, desde a matriz estendida já se conhece z:

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & 5 & 7 & 2900 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{bmatrix}$$

Logo $z = 200$.

Observando com cuidado, seria fácil zerar a posição que está com 7 na segunda linha, assim ficaria evidente o valor de y.

Método do escalonamento

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & 5 & 7 & 2900 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{bmatrix}$$

Multiplica-se vezes -7 a terceira linha e soma-se sobre a segunda linha:

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & 5 & 0 & 1500 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{bmatrix}$$

Multiplica-se vezes $\frac{1}{5}$ a segunda linha:

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & 1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{bmatrix}$$

Ficaram evidentes as incógnitas z e y.

Método do escalonamento

Agora, é fácil multiplicar vezes -3 a segunda linha e somar sobre a primeira linha:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & 1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 1500 \\ 0 & 1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{bmatrix}$$

Por último, multiplica-se vezes (-5) a terceira linha e somar sobre a primeira linha:

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x = 500 \\ y = 300 \\ z = 200 \end{cases} \leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 500 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss-Jordan

O método de Gauss-Jordan aplica o método do escalonamento procurando deixar unidades na diagonal e zeros em todas as entradas fora da diagonal na matriz de coeficientes de uma matriz estendida.

A partir da última matriz estendida (a mais simples) sempre poderá ser deduzida a solução.

Solução única, infinitas soluções ou não existe!

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss-Jordan

O método de Gauss-Jordan, quando aplicado adequadamente, procura escolher um “pivô” em cada linha (poderá ser a unidade da linha) e zerar todas as entradas da coluna na qual está o pivô. Observe o processo para o exemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & -5 & -7 & -2900 \\ 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & -7 & -11 & -4300 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-2) * L2 + L1 \\ \\ (-3) * L2 + L3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -5 & -7 & -2900 \\ 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & -7 & -11 & -4300 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left(-\frac{1}{5}\right) * L1 \\ \\ (-1) * L3 \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{7}{5} & 580 \\ 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & 7 & 11 & 4300 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss-Jordan

O método de Gauss-Jordan, zera as entradas não nulas da segunda coluna:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{7}{5} & 580 \\ 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & 7 & 11 & 4300 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-3) * L1 + L2 \\ (-7) * L1 + L3 \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{7}{5} & 580 \\ 1 & 0 & \frac{4}{5} & 660 \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} & 240 \end{bmatrix}$$

O último pivô só tem uma escolha:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{7}{5} & 580 \\ 1 & 0 & \frac{4}{5} & 660 \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} & 240 \end{bmatrix} \left(\frac{5}{6}\right) * L3 \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{7}{5} & 580 \\ 1 & 0 & \frac{4}{5} & 660 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{7}{5} & 580 \\ 1 & 0 & \frac{4}{5} & 660 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left(-\frac{7}{5}\right) * L3 + L1 \\ \left(-\frac{4}{5}\right) * L3 + L2 \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 300 \\ 1 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss-Jordan

Com o método de Gauss-Jordan, obteve-se uma matriz equivalente (número finito de operações elementares) com um número 1 em cada linha e cada coluna. Obviamente o sistema foi resolvido.

$$\approx \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 300 \\ 1 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{bmatrix}$$

Em outras palavras existe um pivô em cada linha e cada coluna. Se quiser, pode expressar como uma matriz identidade, trocando linhas e os valores das incógnitas estarão na ordem.

Método de Gauss-Jordan

Aparece a solução evidente:

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{bmatrix}$$

Essa matriz estendida significa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix}$$

Resumo: Método de Gauss-Jordan

Em resumo, partiu-se de uma matriz estendida, e via operações elementares, chegou-se a uma outra matriz estendida muito simples:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{bmatrix}$$

Realmente é assim

$$[Operações\ elementares]\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{bmatrix}$$

A última é matriz identidade, volta a equação:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix}$$

Resumo: Método de Gauss-Jordan

O que fez realmente o método Gauss-Jordan?

Levou a matriz estendida:

$$[A \quad | \quad F]$$

Aplicando operações elementares:

$$[Operações\ elementares][A \quad | \quad F]$$

Em uma matriz estendida com a identidade na matriz da esquerda:

$$[I \quad | \quad X]$$

Assim, na matriz da direita aparece evidente a matriz incógnita.

Análise: Método de Gauss-Jordan

Se não for possível chegar na identidade, deve ser analisada a expressão resultante:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{bmatrix}$$

Na expressão anterior não existe solução, existe uma inconsistência:

$$0 = 300$$

Pela segunda linha da matriz estendida.

FALSO.

Análise: Método de Gauss-Jordan

O que pode-se falar da matriz de coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{bmatrix}$$

Observar que a matriz da esquerda, após aplicar operações elementares, tem uma linha nula, isso significa que a matriz tem

$$Nulidade = 1$$

$$Posto = 2.$$

Análise: Método de Gauss-Jordan

Agora se a expressão resultante for:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{bmatrix}$$

Significaria que existem infinitas soluções, dado que na segunda linha há uma verdade evidente:

$$0 = 0$$

Agora pela terceira linha

$$z = 200$$

Pela segunda linha, existem diversas alternativas:

$$x + 2y = 500.$$

Método de Gauss-Jordan

Quando se tem várias equações matriciais com a mesma matriz de coeficientes, pode-se resolver simultaneamente:

$$AX_1 = F_1 \quad AX_2 = F_2 \quad AX_3 = F_3$$

Tem-se as matrizes estendidas:

$$[A \quad | \quad F_1] \quad [A \quad | \quad F_2] \quad [A \quad | \quad F_3]$$

Que podem ser colocadas em uma matriz:

$$[A \quad | \quad F_1 \quad | \quad F_2 \quad | \quad F_3]$$

Método de Gauss-Jordan

$$[A \quad | \quad F_1 \quad | \quad F_2 \quad | \quad F_3]$$

Aplicando as mesmas operações elementares:

$$[Operações\ elementares][A \quad | \quad F_1 \quad | \quad F_2 \quad | \quad F_3]$$

Pelo método de Gauss-Jordan obtém-se:

$$[I \quad | \quad X_1 \quad | \quad X_2 \quad | \quad X_3]$$

Resolvidas simultaneamente todas as matrizes incógnitas.

Cálculo de matriz inversa

Dada uma matriz $A \in M_{n \times n}$, define-se a matriz inversa $A^{-1} \in M_{n \times n}$, se

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \in M_{n \times n}$$

Não toda matriz tem inversa.

I é a matriz identidade de ordem n.

Pode-se utilizar Gauss-Jordan para encontrar uma matriz inversa??? SIM. Leia a equação acima como uma equação matricial:

Cálculo de matriz inversa

Dada uma matriz $A \in M_{n \times n}$. Supondo que não se conhece a inversa, então é uma incógnita:

Encontrar a matriz inversa $X = A^{-1} \in M_{n \times n}$,

tal que

$$AA^{-1} = I$$

Ou melhor

$$AX = I$$

Para aplicar Gauss-Jordan, monta-se a matriz estendida:

$$[A \quad | \quad I]$$

Cálculo de matriz inversa

Aplicar Gauss-Jordan, significa utilizar um número finito de operações elementares para obter a matriz identidade na matriz da esquerda, assim o resultado aparecerá na matriz da direita

$$[A \quad | \quad I]$$

$$[Operações\ elementares][A \quad | \quad I]$$

Até:

$$[I \quad | \quad X]$$

Assim

$$X = A^{-1}.$$

Se existir.

Calcule a matriz inversa

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0.5 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Determinar a matriz inversa (Gauss-Jordan)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-11}{16} & \frac{-1}{8} & \frac{7}{8} \\ \frac{5}{16} & \frac{-1}{8} & \frac{-1}{8} \\ \frac{17}{32} & \frac{3}{16} & \frac{-5}{16} \end{bmatrix}$$

Represente a inversa utilizando uma matriz de números inteiros vezes escalar.