ZAB0161 - Álgebra Linear com Aplicações em Geometria Analítica

Matriz Numérica
Operações elementares

Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle

ZAB (Dpto. de Ciências Básicas) – FZEA – USP

Multiplicação de matrizes

Sejam duas matrizes $A \in M_{n\times m}$ e $B \in M_{m\times r}$, define-se a multiplicação como a matriz $C = AB$, tal que

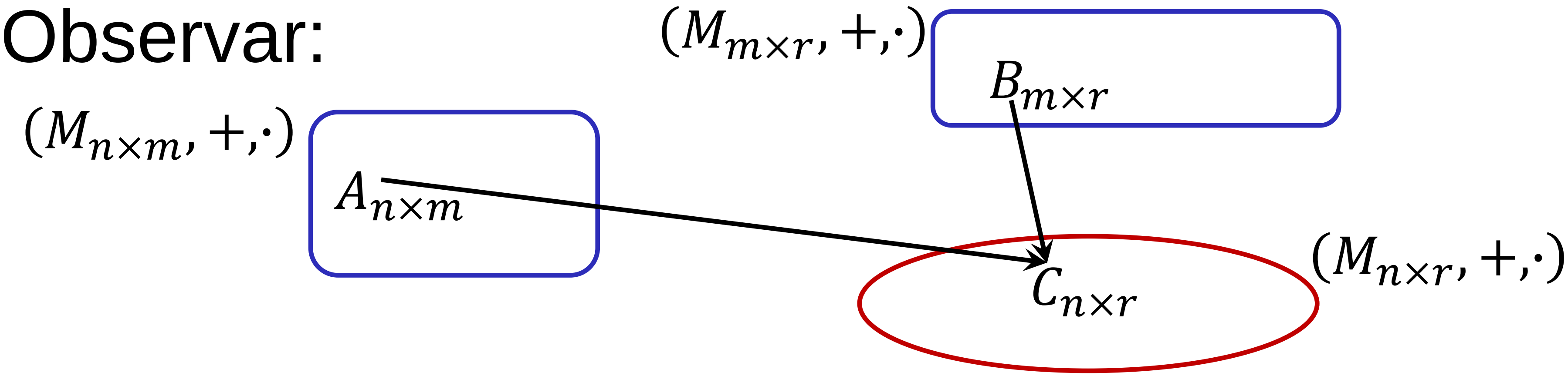
- $C \in M_{n\times r}$, e
- $C = \left[c_{ij}\right]_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,r}} = \left[\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}\right]_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,r}}$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} (-1)(-1) + 2(3) \\ (4)(-1) + 0(3) \\ (-2)(-1) + 3(3) \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 11 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

Multiplicação de matrizes

Observar:



Nota: Não associar a operação multiplicação a um conjunto, pois não é operação fechada dele.

Propriedade: Relação com a transposta,

Sejam as matrizes $A \in M_{n\times m}$ e $B \in M_{m\times r}$ então

$$(AB)^t = B^t A^t$$

Multiplicação de matrizes numéricas com incógnitas

Multiplique as matrizes:

$$A_{3\times3}X_{3\times1} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 5 \\ 9 & 5 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x + 3y + 9z \\ 3x + 2y + 5z \\ 9x + 5y + 17z \end{bmatrix}$$

Aproveitando para sistemas lineares:

$$\begin{cases} 2y + x + 3w = 1900 \\ v + 3y + 5z = 2400 \\ 3x + 2y + 4z = 2900 \\ 2x + 3y - 7z = 1200 \end{cases}$$

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y + 3w \\ 3y + 5z + v \\ 3x + 2y + 4z \\ 2x + 3y - 7z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1900 \\ 2400 \\ 2900 \\ 1200 \end{bmatrix}$$

Sistemas lineares - Matrizes

Observar o que foi obtido. Dado o sistema linear:

$$\begin{cases} 2y + x + 3w = 1900 \\ v + 3y + 5z = 2400 \\ 3x + 2y + 4z = 2900 \\ 2x + 3y - 7z = 1200 \end{cases}$$

Temos uma **relação matricial equivalente**:

$$\begin{cases} 2y + x + 3w = 1900 \\ v + 3y + 5z = 2400 \\ 3x + 2y + 4z = 2900 \\ 2x + 3y - 7z = 1200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1900 \\ 2400 \\ 2900 \\ 1200 \end{bmatrix}$$

NOTA: Mesmo sendo sistema subdimensionado!

Sistemas lineares - Matrizes

Se construímos as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1900 \\ 2400 \\ 2900 \end{bmatrix}$$

A ideia é utilizar matrizes para resolver, no caso, a equação matricial.

Achar a matriz incógnita X

Temos

$$\begin{cases} 2y + x + 3w = 1900 \\ v + 3y + 5z = 2400 \\ 3x + 2y + 4z = 2900 \\ 2x + 3y - 7z = 1200 \end{cases} \quad \underset{equivalentes}{\Longleftrightarrow} \quad AX = F$$

A expressão $AX = F$ é uma **equação matricial.**

Sistemas lineares - Matrizes

Assim, foi convertido um sistema linear de equações em uma equação matricial.

Observar alguns detalhes:

- O produto de matrizes é possível dado que as colunas de A batem com as linhas(informação) de X

$$A = \begin{array}{r} \\ 1a.\,equação \\ 2a.\,equação \\ 3a.\,equação \\ 4a.\,equação \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & v & w \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad X = \begin{array}{c} Coluna \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ v \\ w \end{bmatrix} \end{array}$$

Sistemas lineares - Matrizes

$$A = \begin{array}{c} \\ 1a.equação \\ 2a.equação \\ 3a.equação \\ 4a.equação \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & v & w \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad X = \begin{array}{c} Coluna \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ v \\ w \end{bmatrix} \end{array}$$

Dai que a matriz resultante de AX é

$$F = \begin{array}{c} 1a.equação \\ 2a.equação \\ 3a.equação \\ 4a.equação \end{array} \begin{array}{c} Coluna \\ \begin{bmatrix} 1900 \\ 2400 \\ 2900 \\ 1200 \end{bmatrix} \end{array}$$

Sistemas lineares - Matrizes

$$
\begin{array}{r}
\\
1\ equação \\
2\ equação \\
3\ equação \\
4\ equação \\
\\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x & y & z & v & w \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
A
\end{array}
\begin{array}{c}
Coluna \\
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ v \\ w \end{bmatrix} \\
X
\end{array}
=
\begin{array}{r}
1\ equação \\
2\ equação \\
3\ equação \\
4\ equação
\end{array}
\begin{array}{c}
Coluna \\
\begin{bmatrix} 1900 \\ 2400 \\ 2900 \\ 1200 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$= \quad F$$

A ideia é calcular a matriz de incógnitas X.
No momento não vamos resolver um sistema subdimensionado.
Vejamos inicialmente exemplos com equações matriciais com matrizes quadradas.
Iniciamos com um exemplo:

Sistemas lineares - Matrizes

Observar os sistemas e relacione com matrizes:

Uma indústria produz três produtos P, Q e R, usando dois tipos de insumo B e C.

- Para a manufatura de cada kg do produto P são usados 3 grama do insumo B e 2 grama do insumo C.
- Para cada kg de Q, utiliza-se 1 grama de insumo B e 1 grama de C.
- Para cada kg de R, utiliza-se 1 grama de B e 4 gramas de C.

Represente em formato matricial e determine quantas gramas dos insumos B e C são necessárias na produção de x kg de P, y kg de Q e z kg de R.

Sistemas lineares - Matrizes

Já sabemos converter sistemas lineares em matrizes, então para trabalhar com matrizes se precisa identificar suas linhas e colunas. Como fazer isso?

Para responder: Leia com cuidado o que se espera como resultado:

- Represente em formato matricial e determine quantas gramas dos insumos B e C são necessárias na produção de x kg de P, y kg de Q e z kg de R.

Sistemas lineares - Matrizes

Observar que o resultado pede total de gramas do insumo B e do insumo C. Isto sugere que a matriz resultante tenha a forma:

$$F = \begin{array}{rc} & Total\ de\ gramas \\ Insumo\ B & \left[\begin{array}{c} ??? \\ ??? \end{array}\right] \\ Insumo\ C & \end{array}$$

Como temos informação das gramas dos insumos por cada produto, formamos o produto

$$AX = F$$

$$\begin{array}{rccc} & P & Q & R \\ Insumo\ B & \\ Insumo\ C & \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} P \\ Q \\ R \end{array} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{array}{r} \\ Insumo\ B \\ Insumo\ C \end{array} \begin{array}{c} gramas \\ \begin{bmatrix} ??? \\ ??? \end{bmatrix} \end{array}$$

Sistemas lineares - Matrizes

Não é para resolver X. Procura-se uma fórmula

$$AX = F$$

Multiplicando:

$$\begin{array}{lccc} & P & Q & R \\ Insumo\ B & \multirow{2}{*}{} & & \\ Insumo\ C & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \\ Insumo\ B \\ Insumo\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P & Q & R \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} P \\ Q \\ R \end{array} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{array}{l} \\ Insumo\ B \\ Insumo\ C \end{array} \begin{array}{c} gramas \\ \begin{bmatrix} 3x + y + z \\ 2x + y + 4z \end{bmatrix} \end{array}$$

Portanto, para produzir x kg de P, y kg de Q e z kg de R é necessário $3x + y + z$ total de gramas do insumo B e $2x + y + 4z$ total de gramas do insumo C.

Cuidado

As unidades das magnitudes utilizadas em uma matriz, devem ser compatíveis.

Observe o próximo exemplo e verifique a solução utilizando os valores fornecidos diretamente, e posteriormente, utilize uma única unidade para cada grandeza.

Problema de aplicação

Uma indústria produz três produtos, X, Y e Z, utilizando dois tipos de insumo, A e B.

- Para a manufatura de cada kg de X são utilizados 2 gramas do insumo A e 1 grama do insumo B;
- Para cada kg de Y, 1 grama de insumo A e 3 gramas de insumo B, e,
- Para cada kg de Z, 3 gramas de A e 5 gramas de B.

O preço de venda de toda a produção de X, Y e Z é R$ 3.00, R$ 2.00 e R$ 4.00,respectivamente. Com a venda de toda a produção de X, Y e Z manufaturada com 1.9 kg de A e 2.4 kg de B, essa indústria arrecadou R$ 2900.00 .

Determine quantos kg de cada um dos produtos X, Y e Z foram vendidos?

Problema de aplicação

Formando um sistema de equações, e a equação matricial, com as informações tem-se:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1.9 \\ x + 3y + 5z = 2.4 \\ 3x + 2y + 4z = 2900 \end{cases} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9 \\ 2.4 \\ 2900 \end{bmatrix}$$

A solução é: $\begin{cases} x = 1931.900 \\ y = 3380.250 \\ z = -2414.05 \end{cases}$

mas **não é uma solução física**, não dá para produzir (-2414.05) kg do produto Z.

Qual o problema? Usou-se gramas e kg juntos.

Problema de aplicação

Montando corretamente o sistema linear e a equação matricial equivalente, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1900 \\ 2400 \\ 2900 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 3z = 1900 \\ x + 3y + 5z = 2400 \\ 3x + 2y + 4z = 2900 \end{cases}$$

Usando a eliminação de incógnitas, resolve-se:

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 2400 \\ 2x + y + 3z = 1900 \\ 3x + 2y + 4z = 2900 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} -2x - 6y - 10z = -4800 \\ 2x + y + 3z = 1900 \\ 3x + 2y + 4z = 2900 \end{cases}$$

Trocaram-se as duas primeiras linhas, depois multiplicou-se vezes (-2) para poder eliminar x.

Problema de aplicação

Elimina-se somando a primeira equação sobre a segunda equação:

$$\begin{cases} -2x - 6y - 10z = -4800 \\ 0x - 5y - 7z = -2900 \\ 3x + 2y + 4z = 2900 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 5z = 2400 \\ 0x - 5y - 7z = -2900 \\ 3x + 2y + 4z = 2900 \end{cases}$$

Multiplicou-se a primeira equação vezes $(-\frac{1}{2})$ e voltou a sua forma mais simples. Opera-se de forma similar para eliminar o terceiro x:

$$\begin{cases} -3x - 9y - 15z = -7200 \\ 0x + 5y + 7z = 2900 \\ 3x + 2y + 4z = 2900 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} -3x - 9y - 15z = -7200 \\ 0x + 5y + 7z = 2900 \\ 0x - 7y - 11z = -4300 \end{cases}$$

Problema de aplicação

Para simplificar, a primeira equação volta a sua forma simples, vezes $\left(-\frac{1}{3}\right)$, e troca-se de sinal a terceira equação, vezes (-1):

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 2400 \\ 0x + 5y + 7z = 2900 \\ 0x + 7y + 11z = 4300 \end{cases}$$

Para eliminar o y da terceira equação, multiplica –se a segunda vezes $(-\frac{7}{5})$ e soma-se na terceira

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 2400 \\ 0x + 5y + 7z = 2900 \\ 0x + 7y + 11z = 4300 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 5z = 2400 \\ 0x + 5y + 7z = 2900 \\ 0x + 0y + 1.2z = 240 \end{cases}$$

Problema de aplicação

Portanto:

$$z = \frac{240}{1.2} = 200$$

$$5y + 7(200) = 2900 \Longrightarrow y = 300$$

$$x + 3(300)\ + 5(200) = 2400 \Longrightarrow x = 500$$

A solução é: $\begin{cases} x = 500 \\ y = 300. \\ z = 200 \end{cases}$

A resolução foi um processo da álgebra básica para sistemas lineares. Agora será visto o trabalho equivalente utilizando matrizes.

Problema de aplicação

No processo de resolução observa-se que:

- As incógnitas não são mexidas, permanecem.
- Apenas os coeficientes e termos independentes foram alterando seus valores visando eliminar as incógnitas (zerava o coeficiente da incógnita)

Quais operações foram realizadas no sistema de equações?

a) Teve troca de equações
b) Multiplicação de uma equação vezes um número
c) Multiplicação de uma equação vezes um número e soma desse resultado sobre uma outra equação.

Representação essencial do sistema

Essas três operações realizadas não mudam a solução do sistema. As equações se expressam de forma diferente mas a solução não varia (é invariante).

É possível encontrar um processo utilizando apenas os valores numéricos?

Primeiro objetivo: obter uma representação da essência do sistema de equações.

Representação essencial do sistema

Analisa-se a representação matricial do sistema

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1900 \\ x + 3y + 5z = 2400 \\ 3x + 2y + 4z = 2900 \end{cases} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1900 \\ 2400 \\ 2900 \end{bmatrix}$$

Sabe-se que nas matrizes temos implícitas as incógnitas (no mudam após determinar posição)

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1900 \\ x + 3y + 5z = 2400 \\ 3x + 2y + 4z = 2900 \end{cases} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} ??? \begin{bmatrix} 1900 \\ 2400 \\ 2900 \end{bmatrix}$$

A última expressão tem todas as informações numéricas do sistema e incógnitas implícitas!!

Representação essencial do sistema

Podem ser agrupadas todas as informações numéricas sem perder a ordem das colunas.

Observar que as colunas identificam as incógnitas e os termos independentes:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1900 \\ x + 3y + 5z = 2400 \\ 3x + 2y + 4z = 2900 \end{cases} \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{array}\right]$$

A última matriz, representa o sistema na sua essência e será chamada de **matriz estendida**.

Assim, dado um sistema $AX = F$

A matriz estendida correspondente é $[A \mid F]$.

Representação essencial do sistema

Como trabalhar a **matriz estendida** do sistema, de forma fundamentada, para as operações ??

a) Troca de equações

b) Multiplicação de uma equação vezes um número

c) Multiplicação de uma equação vezes um número e soma desse resultado sobre uma outra equação.

Corresponde:

a) A troca de linhas?

b) A multiplicação de um número vezes uma linha?

c) A multiplicação de um número vezes uma linha e somar esse resultado sobre uma outra linha?

Matriz estendida

Observar o processo equivalente na matriz estendida para a primeira operação no sistema:

a) Troca de equações é troca de linhas

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1900 \\ x + 3y + 5z = 2400 \\ 3x + 2y + 4z = 2900 \end{cases} \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 2400 \\ 2x + y + 3z = 1900 \\ 3x + 2y + 4z = 2900 \end{cases} \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{array}\right]$$

Para as equações não existe diferença mas a matriz estendida não é a mesma, é **outra** matriz

Matriz estendida

Como entender o processo matricial??

Uma matriz qualquer vezes a matriz identidade dá como resultado a mesma matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{array}\right]$$

Observar que se são trocadas as unidades da primeira e segunda linhas da matriz identidade tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{array}\right]$$

Operações elementares

Em conclusão:

a) Na matriz estendida a troca de linhas é multiplicar com uma matriz adequada de uns:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1900 \\ x + 3y + 5z = 2400 \\ 3x + 2y + 4z = 2900 \end{cases} \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 2400 \\ 2x + y + 3z = 1900 \\ 3x + 2y + 4z = 2900 \end{cases} \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{array}\right]$$

Operações elementares

Agora a segunda operação sobre o sistema:

b) Multiplicar uma linha vezes um número:

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 2400 \\ 2x + y + 3z = 1900 \\ 3x + 2y + 4z = 2900 \end{cases} \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & -10 & -4800 \\ 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix}$$

Tem-se o segundo sistema de equações:

$$\begin{cases} -2x - 6y - 10z = -4800 \\ 2x + y + 3z = 1900 \\ 3x + 2y + 4z = 2900 \end{cases} \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -6 & -10 & -4800 \\ 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{array}\right]$$

Operações elementares

Agora a terceira operação que zera coeficientes, mais ainda, sem modificar a primeira equação:

c) Multiplicar uma linha vezes um número e somar o resultado sobre outra linha:

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 2400 \\ 2x + y + 3z = 1900 \\ 3x + 2y + 4z = 2900 \end{cases} \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & -5 & -7 & -2900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 2400 \\ 0x - 5y - 7z = -2900 \\ 3x + 2y + 4z = 2900 \end{cases} \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & -5 & -7 & -2900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{array}\right]$$

Operações elementares

Foram identificadas três operações que mudam a matriz estendida, mas o sistema de equações representado com a nova matriz estendida é equivalente ao sistema original.

São chamadas de **operações elementares** as multiplicações com matrizes que permitem:

a) Permutar a linha i e a linha j,

b) Multiplicar uma linha i vezes um escalar não nulo, modificando os valores da linha i,

c) Multiplicar uma linha i vezes um escalar não nulo, e somar sobre a linha j, modificando a linha j.

Operações elementares

a) Troca de linhas,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

b) Multiplicar uma linha vezes um escalar,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 9 \\ -6 & -4 & -8 \end{bmatrix}$$

c) Multiplicar uma linha vezes um escalar e o resultado somar sobre uma outra linha.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -11 \end{bmatrix}$$

Matrizes estendidas equivalentes

Se uma matriz “estendida” é obtida de uma outra, via uma operação elementar, diz-se que ambas as **matrizes são equivalentes**.

Generalizando:

Definição: Uma matriz A é equivalente a B, se B pode ser obtida, via um número finito de operações elementares, a partir de A.

Matriz escalonada

Definição: Uma matriz A é dita escalonada se todas as entradas da matriz abaixo (acima) da diagonal são zeros.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Posto de uma matriz

Definição: Para uma matriz quadrada $A_{n\times n}$, o número n é chamado de ordem da matriz A.

Definição: Posto da matriz A é o menor número de linhas não nulas considerando todas as matrizes escalonadas equivalentes de A.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Posto de A é 2.

Nulidade de uma matriz

Definição: A nulidade de uma matriz $A_{n\times n}$ é a diferença da ordem da matriz A menos o posto de A.

$$Nulidade(A) = Ordem(A) - Posto(A) = n - p$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Nulidade(A) = Ordem(A) - Posto(A) = 3 - 2$$

Nulidade de A é 1.

Resolva os sistemas e opine sobre X

Resolva o sistema $AX = F$, onde

1. $A = \begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix}$ e $F = \begin{bmatrix} 1999 \\ 1997 \end{bmatrix}$
2. $A = \begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix}$ e $F = \begin{bmatrix} 1998.99 \\ 1997.01 \end{bmatrix}$

As respostas são:

1. $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
2. $X = \begin{bmatrix} 20.97 \\ -18.99 \end{bmatrix}$