ZAB0161 - Álgebra Linear com Aplicações em Geometria Analítica

Matriz Numérica
Conceitos básicos

Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle

ZAB (Dpto. de Ciências Básicas) – FZEA – USP

Qual sua ideia de Trabalho e Estudo?

Trabalho ou Estudo como “carga pesada”.

substitua pelo conceito:

“realizar uma obra” “preparar para obrar”.

Mundo greco-romano: Dono – escravo

Idade média: Senhor – Servo

Trabalhar ou Estudar cansa mas não precisa **gerar estresse**.

You will be happy …

Matrizes Numéricas

Definição: Uma matriz numérica A é um arranjo de números em m linhas e n colunas.

Notação: $A = A_{m\times n}$

Ordem da matriz: $m \times n$. (Não é igual trocando)

$$A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0.75 & -1.2 \\ 10.5 & 3.25 \\ 2 & -2.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2}}$$

O que se pretende? **ORGANIZAR** dados em uma estrutura simples, informativa e de fácil manipulação matemática.

Organização com significado

Suponha que temos dois alimentos:

- arroz e
- purê (de batata).

Temos 0.75 kg de purê e 3.25 kg de arroz.

O arroz está a -1.2℃ e o purê a -2.1℃.

O arroz deve ser colocado na panela de 10.5 lts e o purê na bandeja de 2 lts.

Com essas considerações é possível um melhor arranjo?

O conceito da linha e coluna com significado

Observar: temos dois alimentos e relacionados a esses alimentos temos a sua quantidade, temperatura e capacidade do depósito que lhe corresponde.

Se interpretamos cada linha como alimento e as colunas como as características dadas, temos duas linhas e três colunas. Organizando:

$$A_{2\times 3} = \begin{array}{r} \\ Arroz \\ Pur\hat{e} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Quantidade & Temperatura & Volume \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3.25 & -1.2 & 10.5 \\ 0.75 & -2.1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matrizes na prática

Matéria-prima é um produto *natural* ou *transformado* (semimanufaturado), que as empresas utilizam como base em um processo produtivo para a obtenção de um *produto acabado*.

O *produto acabado* é a mercadoria que as empresas vendem. Existem também casos de matérias-primas que não precisam passar por transformações, como por exemplo os vegetais e as frutas, que são comercializados da forma que são extraídos da natureza.

Matrices na prática

Insumo é todo e qualquer elemento diretamente necessário em um processo de produção. Nesse grupo estão os produtos usados na fabricação, o maquinário, a energia e a própria mão de obra empregada, por exemplo.

As matérias-primas são um desses tipos de insumos. Porém, o insumo pode não fazer parte do produto quando pronto, diferente da matéria-prima, que é um material agregado na fabricação, tornando-se parte do produto.

Fonte: https://www.dicionariofinanceiro.com/o-que-e-materia-prima

Matrizes na prática

Os dados coletados em tabelas podem ser vistos como dados organizados em matrizes, ou delas podemos extrair porções significativas.

Observar que as tabelas geralmente contêm informações literais para identificar o que está sendo tabulado. Para efeito de cálculo numérico essas informações não são relevantes, logo se considera apenas as informações numéricas. Por exemplo:

Matrizes na prática

Quadro 1 – Resposta glicêmica disponível por 100g de alimento (parte comestível).

Identificação	Alimento	Voluntário (Tipo/n)	IG médio % (Glicose = 100)	IG Classificação	Porção recomendada	Carboidratos disponíveis (g/porção)	CG
720C	Abacaxi, Pérola, cerne, in natura, *Ananas comosus*	7/saudáveis	67	A	10	2,00	1,00
720C	Abacaxi, Pérola, cerne, liofilizado, *Ananas comosus*	7/saudáveis	67	A	*	*	*
721C	Abacaxi, Pérola, polpa e cerne, in natura, *Ananas comosus*	7/saudáveis	66	A	100	11,00	7,00
719C	Abacaxi, Pérola, polpa, in natura, *Ananas comosus*	7/saudáveis	65	A	90	9,00	6,00
718C	Abacaxi, Pérola, polpa, liofilizada, *Ananas comosus*	7/saudáveis	65	A	*	*	*
745C	Amora silvestre, liofolizada, *Rubus rosaefoluis*	6/saudáveis	27	B	50	3,00	1,00
1002A	Arroz polido/Feijão carioca, cozidos, temperados (3:1)	15/saudáveis	55	B	150	25,36	13,92
1001A	Arroz, polido, cozido, temperado, *Orysa sativa L.*	15/saudáveis	57	M	150	31,67	18,02
734A	Aveia, farelo, "Oat bran"	16/saudáveis	28	B	10	4,29	1,20
732A	Aveia, flocos, "Quaker"	16/saudáveis	39	B	30	14,81	5,77
734C	Banana, mysore, *Musa spp*	7/saudáveis	49	B	110	12,00	6,00
730C	Banana, nanica, *Musa spp*	14/saudáveis	61	M	110	24,00	14,00
716C	Banana, prata, madura, *Musa ssp*	15/saudáveis	27	B	100	27,94	7,57
1040B	Batata, inglesa, cozida/20 min, *Solanum tuberosum L.*	15/saudáveis	81	A	150	15,59	12,66
642A	Biscoito, doce, maisena	15/saudáveis	50	B	30	18,08	9,11

Fonte:
http://www.tbca.net.br/arquivosestaticos/Tabelas_Complementares_Resposta_Glicemica_n.pdf

Matrizes na prática

Outros exemplos:

Tabela 1. Composição de alimentos por 100 gramas de parte comestível: Centesimal, minerais, vitaminas e colesterol

Número do Alimento	Descrição dos alimentos	Umidade (%)	Energia (kcal)	Energia (kJ)	Proteína (g)	Lipídeos (g)	Colesterol (mg)	Carbo-idrato (g)	Fibra Alimentar (g)	Cinzas (g)	Cálcio (mg)	Magnésio (mg)
94	Batata, inglesa, sauté	83,1	68	284	1,3	0,9	NA	14,1	1,4	0,6	4	6
95	Berinjela, cozida	94,4	19	79	0,7	0,1	NA	4,5	2,5	0,3	11	9
96	Berinjela, crua	93,8	20	82	1,2	0,1	NA	4,4	2,9	0,4	9	13
97	Beterraba, cozida	90,6	32	135	1,3	0,1	NA	7,2	1,9	0,8	15	17
98	Beterraba, crua	86,0	49	204	1,9	0,1	NA	11,1	3,4	0,9	18	24
99	Biscoito, polvilho doce	5,4	438	1831	1,3	12,2	9	80,5	1,2	0,5	30	6
100	Brócolis, cozido	92,6	25	103	2,1	0,5	NA	4,4	3,4	0,4	51	15
101	Brócolis, cru	91,2	25	107	3,6	0,3	NA	4,0	2,9	0,8	86	30
102	Cará, cozido	78,9	78	325	1,5	0,1	NA	18,9	2,6	0,6	5	15
103	Cará, cru	73,7	96	400	2,3	0,1	NA	23,0	7,3	0,9	4	11
104	Caruru, cru	87,6	34	142	3,2	0,6	NA	6,0	4,5	2,6	455	197
105	Catalonha, crua	91,8	24	100	1,9	0,3	NA	4,8	2,0	1,3	57	17
106	Catalonha, refogada	87,4	63	265	2,0	4,8	NA	4,8	3,7	1,0	63	16
107	Cebola, crua	88,9	39	165	1,7	0,1	NA	8,9	2,2	0,4	14	12
108	Cebolinha, crua	93,9	20	82	1,9	0,4	NA	3,4	3,6	0,5	80	25
109	Cenoura, cozida	91,7	30	125	0,8	0,2	NA	6,7	2,6	0,6	26	14
110	Cenoura, crua	90,1	34	143	1,3	0,2	NA	7,7	3,2	0,9	23	11
111	Chicória, crua	95,1	14	58	1,1	0,1	NA	2,9	2,2	0,8	45	14
112	Chuchu, cozido	94,6	19	78	0,4	Tr	NA	4,8	1,0	0,2	8	7
113	Chuchu, cru	94,8	17	71	0,7	0,1	NA	4,1	1,3	0,3	12	7
114	Coentro, folhas desidratadas	10,6	309	1293	20,9	10,4	NA	48,0	37,3	10,2	784	393

Fonte:

https://www.cfn.org.br/wp-content/uploads/2017/03/taco_4_edicao_ampliada_e_revisada.pdf

Tabela Brasileira de Composição de Alimentos

Matrizes quadradas

Matriz quadrada (quando $m = n$):

$$R_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1.3 & 0.9 & 1.4 \\ 0.7 & 0.1 & 2.5 \\ 0.8 & 0.2 & 2.6 \end{bmatrix} = \left[r_{ij}\right]_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2,3}}$$

As linhas correspondem: batata inglesa(sauté), beringela cozida e cenoura cozida. As colunas são a quantidade de proteína, lipídeos e fibra alimentar (gr / 100 gr de parte comestível).

Matrizes onde $m \neq n$, (vide $A_{3\times 2}$) são chamadas de matrizes retangulares.

Matrizes quadradas especiais

Matriz Identidade: $$I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Nula: $$0_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz Diagonal: $$D_{3\times 3} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As matrizes superior e inferior também são chamadas
De matrizes triangulares, mas tome cuidado!

$$U_{3\times 3} = \begin{bmatrix} -2 & -1.1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \qquad L_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Outras matrizes especiais

Matriz linha

$$L_{1\times n} = \begin{bmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1n} \end{bmatrix} = \left[l_{1j}\right]_{j=1,\ldots n}$$

Matriz coluna

$$C_{m\times 1} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix} = [c_{i1}]_{i=1,\ldots m}$$

Se todas as entradas da matriz são números reais, a matriz é uma matriz (numérica) real.

Se alguma das entradas da matriz é um número complexo, a matriz é uma matriz complexa.

Conjuntos de matrizes

Matematicamente é interessante observar as matrizes como elementos de conjuntos bem determinados. Por exemplo:

O conjunto $M_{3\times 2}$ pode agrupar todas as matrizes de ordem 3×2:

$$M_{3\times 2} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3.5 \\ 2 & -0.1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0.75 & -1.2 \\ 10.5 & 3.25 \\ 2 & -2.1 \end{bmatrix} \quad \ddots$$

$$M_{2\times 3} \quad \begin{bmatrix} 3.25 & -1.2 & 10.5 \\ 0.75 & -2.1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 10 & e & \pi \\ 0.32 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \ddots$$

Operações com matrizes

- Transposta de uma matriz
- Igualar matrizes
- Soma de matrizes
- Multiplicação de matriz com escalar
- Multiplicação de matrizes
- Multiplicação de matriz linha e matriz coluna. Produto escalar
- Inversa de uma matriz
- Determinante de uma matriz (*)

Transposta de uma matriz

A operação transposta de uma matriz converte as suas linhas em colunas e as suas colunas em linhas. Exemplo:

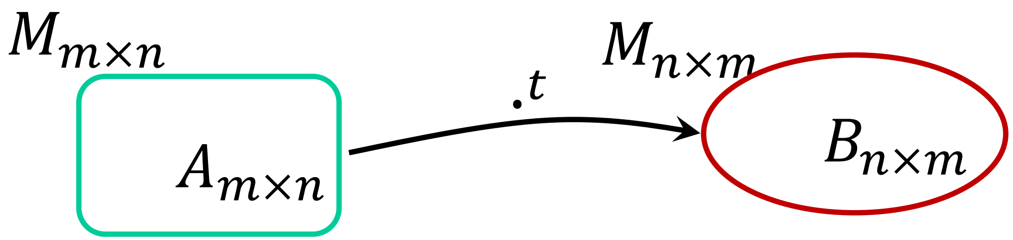
Seja uma matriz $A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0.75 & -1.2 \\ 10.5 & 3.25 \\ 2 & -2.1 \end{bmatrix}.$

Então: $Transposta(A_{3\times 2}) = (A_{3\times 2})^t = (A^t)_{2\times 3} = B_{2\times 3}$

onde: $B_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0.75 & 10.5 & 2 \\ -1.2 & 3.25 & -2.1 \end{bmatrix}.$

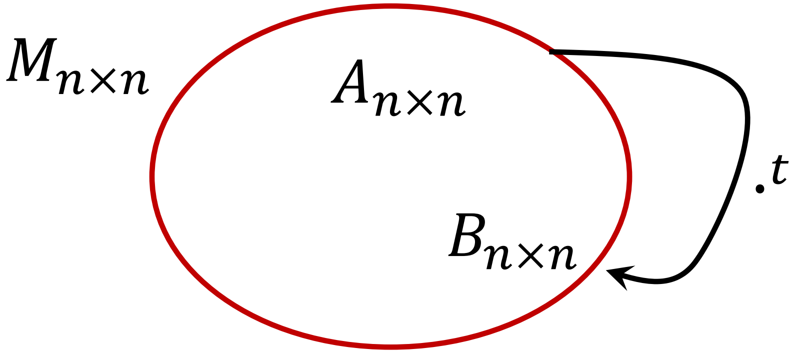
Transposta. Matriz simétrica

Observar:



Significa que a operação Transposta opera transformando um elemento(matriz) do conjunto $M_{m\times n}$ em um elemento do conjunto $M_{n\times m}$.

Também:



Definição:

$A \in M_{n\times n}$ é **simétrica** se $A = A^t$.

Aplicação simples da transposta

Suponha que recebe duas tabelas informando o estoque em duas lojas (em SP, em BH)

$$SP = \begin{array}{c} \\ Caixas \\ Valor \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Laranja & Acabate & Abacaxi \end{array} \\ \begin{bmatrix} 40 & 60 & 400 \\ 854.35 & 1010.25 & 1800.50 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$BH = \begin{array}{c} \\ Laranja \\ Abacaxi \\ Abacate \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} Caixas & Valor \end{array} \\ \begin{bmatrix} 120 & 2003.35 \\ 100 & 4356.75 \\ 230 & 3589.00 \end{bmatrix} \end{array}$$

O que fazer? Qual escolher como correto?

Aplicação simples de transposta

Aplicando transposta para SP tem-se

$$SP = \begin{array}{c} \\ Laranja \\ Abacate \\ Abacaxi \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} Caixas & Valor \end{array} \\ \begin{bmatrix} 40 & 854.35 \\ 60 & 1010.25 \\ 400 & 1800.50 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$BH = \begin{array}{c} \\ Laranja \\ Abacaxi \\ Abacate \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} Caixas & Valor \end{array} \\ \begin{bmatrix} 120 & 2003.35 \\ 100 & 4356.75 \\ 230 & 3589.00 \end{bmatrix} \end{array}$$

Mas cuidado. Observar que o formato parece mais coerente mas a segunda e terceira linhas precisam ser trocadas (operação elementar!)

Igualdade de matrizes

Duas matrizes A e B são iguais se elas tem a mesma ordem ($A_{m\times n}$ e $B_{m\times n}$) e todas as entradas correspondentes são iguais:

$a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i = 1,2,\ldots,m$ e $j = 1,2,\ldots,n$.

Matematicamente:

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i = 1,2,\ldots,m, \forall j = 1,2,\ldots,n$$

$$\begin{bmatrix} x & 1.3 & a \\ 1 & -2 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3 & y & b \\ z & \dfrac{1}{-.5} & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow x + y + z = ?$$

Soma de matrizes

A soma de matrizes é definida para cada conjunto de matrizes. Isto é, apenas **somam-se matrizes da mesma ordem.**

Definição: Sejam $A, B \in M_{n\times m}$ então define-se a soma, como a matriz denotada por $C = A + B$, tal que

- $C \in M_{n\times m}$, e
- $C = \left[c_{ij}\right]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$

Soma de matrizes

Exemplo: Some $A_{2\times3} + B_{2\times3} = ?$

$$\begin{bmatrix} x & 1.3 & a \\ 1 & -2 & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.3 & y & b \\ z & \frac{1}{-.5} & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-0.3 & y+1.3 & a+b \\ 1+z & -4 & \alpha+4 \end{bmatrix}$$

Mas, não perca de vista o significado:

$$D = \begin{array}{r} \\ Laranja \\ Abacate \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} Caixas & Valor \end{array} \\ \begin{bmatrix} 23 & 400.45 \\ 125 & 656.25 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$F = \begin{array}{r} \\ Laranja \\ Abacate \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} Kilos & Código \end{array} \\ \begin{bmatrix} 238 & 4004511 \\ 256 & 6562532 \end{bmatrix} \end{array}$$

Não pode somar $D_{2\times2} + F_{2\times2}$. As colunas não batem, o que daria o preço e o código???

Soma de matrizes

Observar:

Propriedade: Relação com a transposta,

Sejam as matrizes $A, B \in M_{n\times m}$ então

$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

Conjunto de matrizes com estrutura

Quando pegamos um conjunto qualquer, não se fala de uma estrutura.

Mas se consideramos um conjunto de matrizes e a soma, vemos que podemos identificar várias características interessantes:

- Existe um elemento neutro: a matriz nula (única) satisfaz: $0_{m\times n} + A_{m\times n} = A_{m\times n} + 0_{m\times n} = A_{m\times n}$
- Elemento inverso: Para cada $A_{m\times n} \in M_{m\times n}$, podemos formar $(-A)_{m\times n} \in M_{m\times n}$ (onde cada entrada de A tem o sinal trocado em $(-A)$) tal que: $A_{m\times n} + (-A)_{m\times n} = 0_{m\times n}$

Multiplicação de um escalar vezes matriz

Definição: Dado um **escalar** $\alpha \in \mathbb{R}$ (pode ser um $\alpha \in \mathbb{C}$) e dada uma matriz $A \in M_{n\times m}$ se define, a multiplicação do escalar vezes a matriz, como a matriz $C = \alpha A_{n\times m}$ tal que

- $C \in M_{n\times m}$ e
- $C = \left[c_{ij}\right]_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}} = \alpha\left[a_{ij}\right]_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}} = \left[\alpha a_{ij}\right]_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}}$

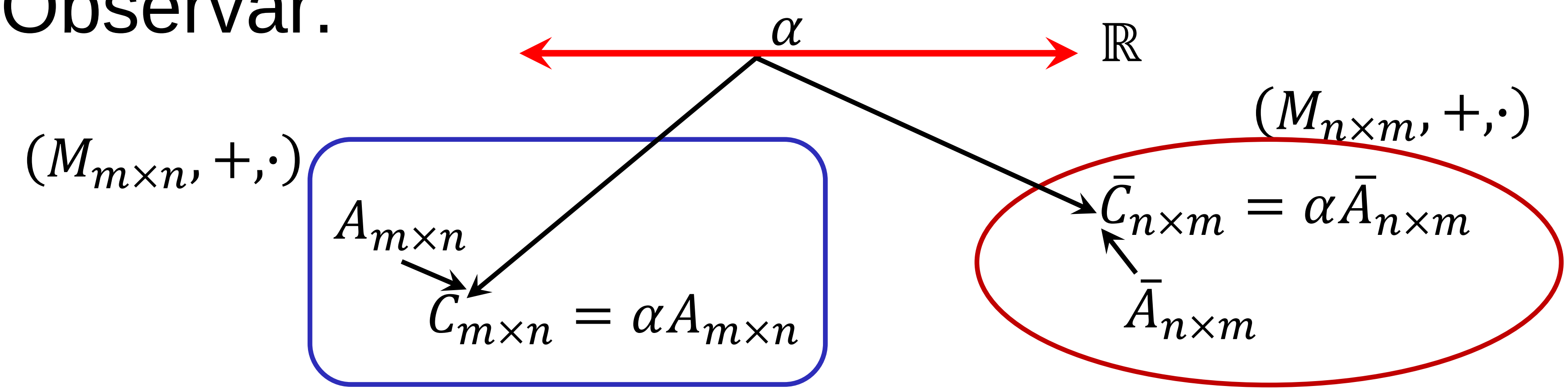
Significa que podemos construir múltiplos das matrizes: o dobro, o triplo dela, etc.

Multiplicação de escalar vezes matriz

Exemplo:

$$\pi \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\pi & 2\pi \\ \frac{\pi}{2} & -\frac{\pi}{2} \\ 0 & 3\pi \end{bmatrix}$$

Observar:



Propriedade: Relação com a transposta. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A \in M_{n\times m}$ então $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.

Teste 1. Estrutura dos conjuntos de matrizes

1. O que pode falar sobre o conjunto de matrizes de ordem $M_{3\times 3}$ e a operação transposta? Isto é, sobre $(M_{3\times 3},\cdot^{t})$. Escreva três ideias!
2. O que pode falar sobre o $M_{3\times 3}$ e a operação soma de matrizes definida anteriormente? Escreva 3 itens que lhe sejam interessantes.
3. Descreva três pontos do que você entendeu sobre os conjuntos de matrizes quadradas?