

Introdução às Medidas em Física (4300152)

Aula 04 (14/04/2023)

Paula R. P. Allegro
paula.allegro@usp.br

Na aula de hoje:

- Resumo dos principais pontos da aula anterior
- Conceitos:
 - Instrumentos de medida
 - Paquímetro
 - Micrômetro
 - Noções de estatística:
 - Propagação de Incertezas
 - Compatibilidade entre medidas
- Experiência 2.2: Densidade de Sólidos
 - Realizar medidas de diferentes objetos com paquímetro e micrômetro
 - Identificar os tipos de plásticos através da comparação das medidas (+incertezas) com valores tabelados

Referências para a aula de hoje:

- Apostila do curso (página principal do moodle):
 - Capítulo 3: Instrumentos de Medidas
 - Experiência II (Aulas 03 e 04): Densidade de Sólidos.
- Texto: Conceitos Básicos da Teoria de Erros (aba Material Didático / arquivos 2023)
 - Capítulo 2: Propagação de Erros e Incertezas

Da aula anterior: tipo de incertezas

- Tipos de incerteza que influenciam uma medida:
 - Instrumental
 - precisão do instrumento utilizado para realizar a medida direta de uma grandeza
 - dificuldade de realizar essa medida
 - Estatística
 - flutuação no resultado de uma mesma medida.
 - Cálculo de média, desvio padrão e desvio padrão da média
 - Sistemática
 - Aquela onde a medida é desviada em uma única direção, tornando os resultados viciados.
 - Devem ser corrigidas ou refeitas

Qual é a incerteza total de uma medida?

- Incertezas resultantes do ato de medir:
 - Instrumental: σ_{inst}
 - Estatística: σ_{estat}
- Incerteza total da medida (σ): combinação de todas as incertezas

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{inst}^2 + \sigma_{estat}^2}$$

- Caso um tipo de incerteza seja dominante, pode-se desprezar a outra:
 - Período do pêndulo medido com o relógio de pulso:
Incerteza instrumental > estatística
 - Período do pêndulo medido com o cronômetro de 0,01s
Incerteza estatística > instrumental

Propagação de incerteza

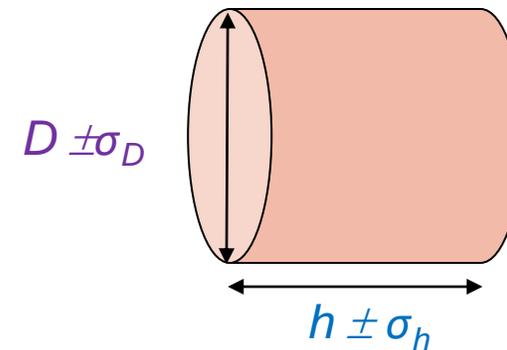
- E se uma grandeza depende de outras duas medidas, como por exemplo, na medida do volume de um cilindro? O que fazer?
- O volume (V) de um cilindro é dado por:

$$V = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 h$$

Onde:

D é o diâmetro do cilindro \pm incerteza (σ_D)

h é a altura do cilindro \pm incerteza (σ_h)



Propagação de incerteza

- A incerteza final (σ_V) no volume V do cilindro depende:
 - da incerteza no volume ($\sigma_{V\sigma_D}$) devido à incerteza (σ_D) no diâmetro do cilindro:

$$\sigma_{V\sigma_D} = \frac{V_{\text{máximo (devido a } \sigma_D)} - V_{\text{mínimo (devido a } \sigma_D)}}{2}$$

- da incerteza no volume ($\Delta V_{\Delta h}$) devido à incerteza (Δh) na altura do cilindro

$$\sigma_{V\sigma_h} = \frac{V_{\text{máximo (devido a } \sigma_h)} - V_{\text{mínimo (devido a } \sigma_h)}}{2}$$

- Assim:

$$\sigma_V = \sqrt{(\sigma_{V\sigma_D})^2 + (\sigma_{V\sigma_h})^2}$$

Assumindo que a incerteza devido ao diâmetro ($\sigma_{V\sigma_D}$) é independente da incerteza devido à altura ($\sigma_{V\sigma_h}$)

Definição de derivada

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$$

$$x' = x + \Delta x / 2$$

$$\frac{df}{dx'} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x' + \Delta x / 2) - f(x' - \Delta x / 2)}{\Delta x} \right)$$

$$\Delta x' = \Delta x / 2$$

$$\frac{df}{dx'} = \lim_{\Delta x' \rightarrow 0} \left(\frac{f(x' + \Delta x') - f(x' - \Delta x')}{2 \cdot \Delta x'} \right)$$

Cálculo da incerteza do volume do cilindro devido a variação do diâmetro

- Alguma semelhança entre as duas expressões abaixo?

$$\frac{df}{dx'} = \lim_{\Delta x' \rightarrow 0} \left(\frac{f(x' + \Delta x') - f(x' - \Delta x')}{2 \cdot \Delta x'} \right)$$

$$\sigma_V^D = \left[\frac{V(D + \sigma_D) - V(D - \sigma_D)}{2} \right]$$

Cálculo da incerteza do volume do cilindro devido a variação do diâmetro

- Alguma semelhança entre as duas expressões abaixo?

$$\frac{df}{dx'} = \lim_{\Delta x' \rightarrow 0} \left(\frac{f(x' + \Delta x') - f(x' - \Delta x')}{2 \cdot \Delta x'} \right)$$

$$\sigma_V^D = \left[\frac{V(D + \sigma_D) - V(D - \sigma_D)}{2} \right] \cdot \frac{\sigma_D}{\sigma_D}$$

Cálculo da incerteza do volume do cilindro devido a variação do diâmetro

- Alguma semelhança entre as duas expressões abaixo?

$$\frac{df}{dx'} = \lim_{\Delta x' \rightarrow 0} \left(\frac{f(x' + \Delta x') - f(x' - \Delta x')}{2 \cdot \Delta x'} \right)$$

$$\sigma_V^D = \left[\frac{V(D + \sigma_D) - V(D - \sigma_D)}{2} \right] \cdot \frac{\sigma_D}{\sigma_D}$$

$$\sigma_V^D = \left[\frac{V(D + \sigma_D) - V(D - \sigma_D)}{2\sigma_D} \right] \sigma_D \rightarrow \sigma_V^D = \frac{\partial V}{\partial D} \sigma_D$$

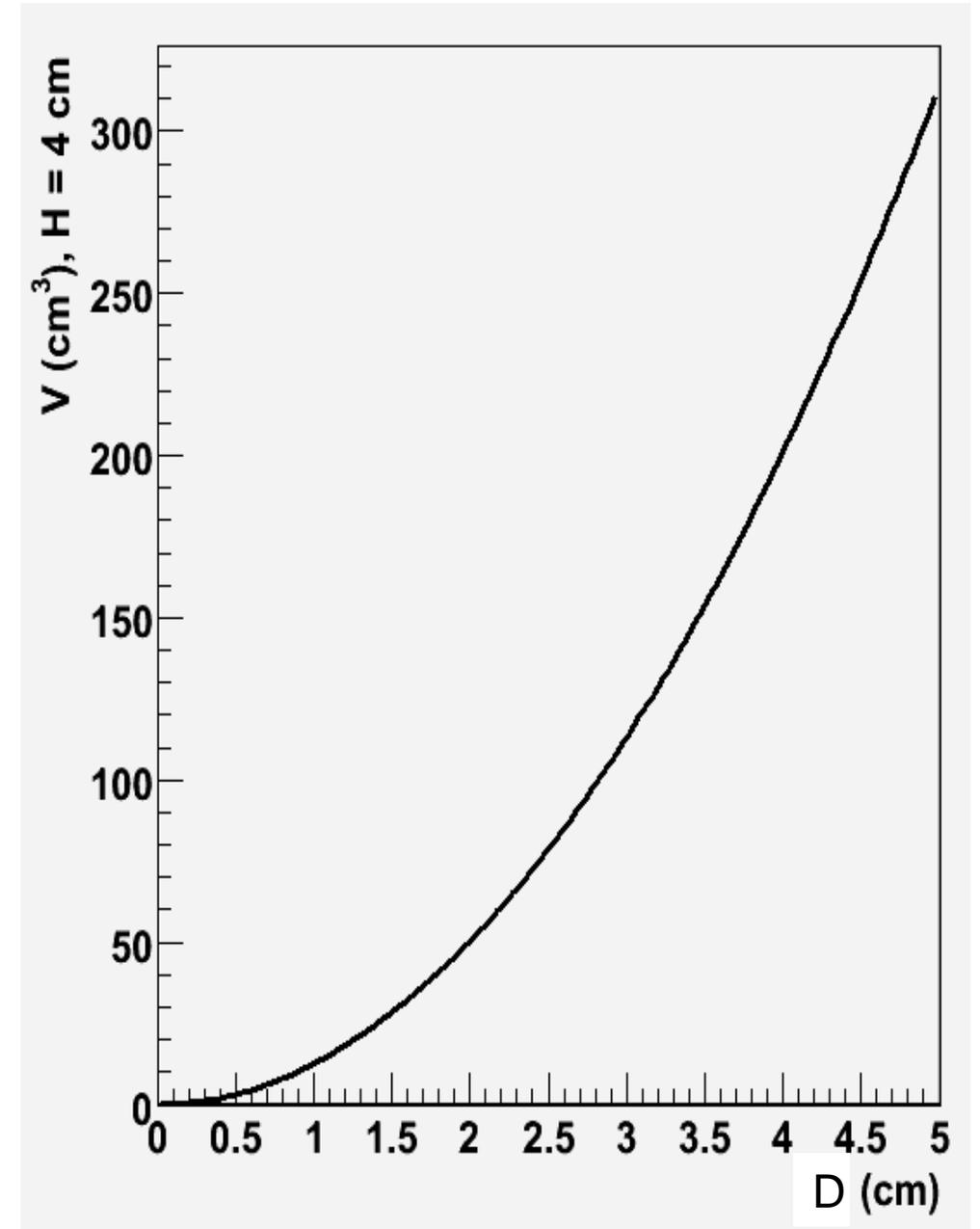
Propagação de incerteza

- Partindo da dependência do volume de um cilindro com o diâmetro:

$$V = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 h$$

- Esta fórmula é razoável?

$$\sigma_V^D = \frac{\partial V}{\partial D} \sigma_D$$



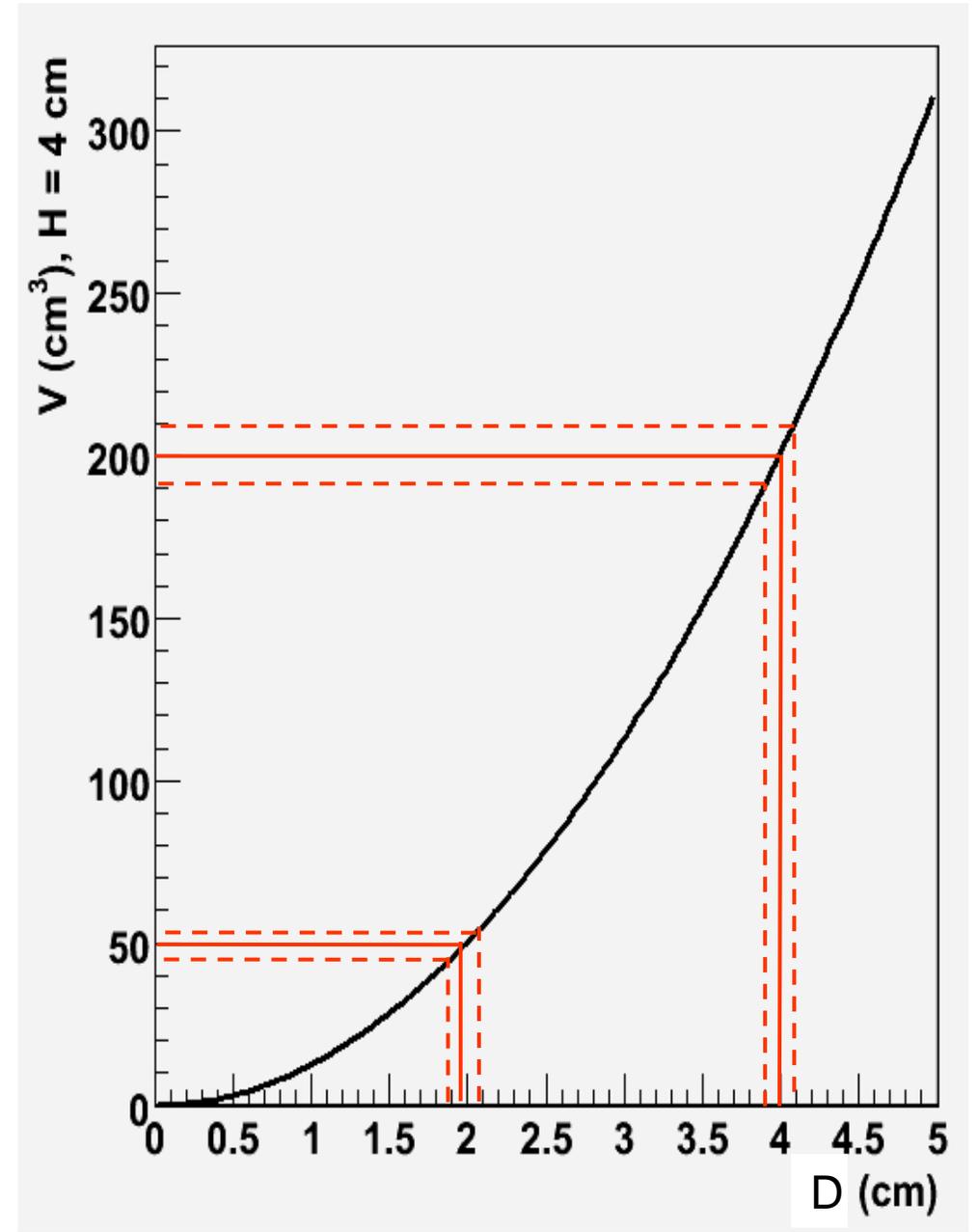
Propagação de incerteza

- Partindo da dependência do volume de um cilindro com o diâmetro:

$$V = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 h$$

- Esta fórmula é razoável?

$$\sigma_V^D = \frac{\partial V}{\partial D} \sigma_D$$



Cálculo da incerteza do volume do cilindro

- Analogamente, a incerteza no volume ($\Delta V_{\Delta h}$) devido à incerteza (Δh) na altura do cilindro fica:

$$\sigma_V^h = \left[\frac{V(h + \sigma_h) - V(h - \sigma_h)}{2\sigma_h} \right] \sigma_D \quad \rightarrow \quad \sigma_V^h = \frac{\partial V}{\partial h} \sigma_h$$

- E a incerteza total σ_V fica:

$$\sigma_V = \sqrt{(\sigma_V^D)^2 + (\sigma_V^h)^2}$$
$$\sigma_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)^2 \sigma_D^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 \sigma_h^2}$$

Como calcular as derivadas

- Suponha que todo o resto da expressão é uma constante:

$$\frac{\partial V}{\partial D} = \frac{\partial}{\partial D} \left(\frac{\pi}{4} D^2 h \right) = \frac{\pi}{4} h \frac{\partial(D^2)}{\partial D} = \frac{\pi}{4} h (2D) = \frac{\pi}{2} h D$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{\pi}{4} D^2 h \right) = \frac{\pi}{4} D^2 \frac{\partial(h)}{\partial h} = \frac{\pi}{4} D^2 (1) = \frac{\pi}{4} D^2$$

Desse modo...

- Incerteza do volume do cilindro fica:

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)^2 \sigma_D^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 \sigma_h^2}$$

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} h D\right)^2 \sigma_D^2 + \left(\frac{\pi}{4} D^2\right)^2 \sigma_h^2}$$

$$\sigma_V = \frac{\pi}{4} D^2 h \sqrt{\left(2 \frac{\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2}$$

Substituindo: $V = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 h$

$$\frac{\sigma_V}{V} = \sqrt{\left(2 \frac{\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2}$$

Cálculo da incerteza da densidade

- A densidade (d) de materiais sólidos homogêneos é dada por :

$$d = \frac{m}{V}$$

m é a massa do cilindro \pm incerteza (σ_m)

V é o volume do cilindro \pm incerteza (σ_V)

- A incerteza σ_d é dada por:

$$\sigma_d = \sqrt{(\sigma_d^m)^2 + (\sigma_d^V)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial d}{\partial m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial V}\right)^2 \sigma_V^2}$$

$$\frac{\partial d}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{m}{V}\right) = \frac{1}{V} \frac{\partial(m)}{\partial m} = \frac{1}{V} (1) = \frac{1}{V}$$

$$\frac{\partial d}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{m}{V}\right) = m \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{1}{V}\right) = m \left(-\frac{1}{V^2}\right) = -\frac{m}{V^2}$$

$$\sigma_d = \sqrt{\left(\frac{1}{V} \sigma_m\right)^2 + \left(-\frac{m}{V^2} \sigma_V\right)^2} \rightarrow \frac{\sigma_d}{d} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2}$$

Cálculo direto da incerteza da densidade

$$d = \frac{m}{V} = \frac{4m}{\pi D^2 h}$$
$$\sigma_d = \sqrt{(\sigma_d^m)^2 + (\sigma_d^D)^2 + (\sigma_d^h)^2}$$
$$\sigma_d = \sqrt{\left(\frac{\partial d}{\partial m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial D}\right)^2 \sigma_D^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial h}\right)^2 \sigma_h^2}$$

$$\frac{\partial d}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{4m}{\pi D^2 h} \right) = \frac{4}{\pi D^2 h} \frac{\partial(m)}{\partial m} = \frac{4}{\pi D^2 h} (1) = \frac{4}{\pi D^2 h}$$

$$\frac{\partial d}{\partial D} = \frac{\partial}{\partial D} \left(\frac{4m}{\pi D^2 h} \right) = \frac{4m}{\pi h} \frac{\partial}{\partial D} \left(\frac{1}{D^2} \right) = \frac{4m}{\pi D^2 h} \left(-\frac{2}{D^3} \right) = -\frac{8m}{\pi h D^3}$$

$$\frac{\partial d}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{4m}{\pi D^2 h} \right) = \frac{4m}{\pi D^2} \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{1}{h} \right) = \frac{4m}{\pi D^2 h} \left(-\frac{1}{h^2} \right) = -\frac{4m}{\pi D^2 h^2}$$

$$\sigma_d = \sqrt{\left(\frac{4}{\pi D^2 h} \sigma_m \right)^2 + \left(-\frac{8m}{\pi h D^3} \sigma_D \right)^2 + \left(-\frac{4m}{\pi D^2 h^2} \sigma_h \right)^2}$$

$$\frac{\sigma_d}{d} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m} \right)^2 + \left(2 \frac{\sigma_D}{D} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{h} \right)^2}$$

Exercício em aula

- Calcule o valor do volume da peça e de sua incerteza usando as medidas de diâmetro e altura fornecidos abaixo. Use $\pi = 3,1416$

$$V = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 h \quad \frac{\sigma_V}{V} = \sqrt{\left(2 \frac{\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2}$$

Diâmetro (cm)	altura (cm)
$4,007 \pm 0,002$	$5,106 \pm 0,004$

- Avalie a incerteza relativa tanto das medidas do diâmetro e de altura como para a informação do volume.

Incerteza relativa do Diâmetro $\left(\frac{\sigma_D}{D}\right)$:

Incerteza relativa da Altura $\left(\frac{\sigma_h}{h}\right)$:

Incerteza relativa do Volume $\left(\frac{\sigma_V}{V}\right)$:

Volume: \pm cm^3

Exercício em aula

- Calcule o valor do volume da peça e de sua incerteza usando as medidas de diâmetro e altura fornecidos abaixo. Use $\pi = 3,1416$

$$V = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 h \quad \frac{\sigma_V}{V} = \sqrt{\left(2 \frac{\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2}$$

Diâmetro (cm)	altura (cm)
$4,007 \pm 0,002$	$5,106 \pm 0,004$

- Avalie a incerteza relativa tanto das medidas do diâmetro e de altura como para a informação do volume.

Incerteza relativa do Diâmetro $\left(\frac{\sigma_D}{D}\right)$: $0,0005 = 0,05\%$

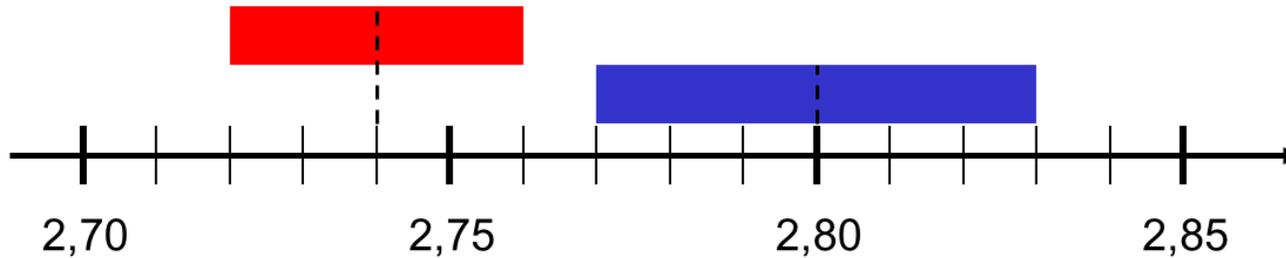
Incerteza relativa da Altura $\left(\frac{\sigma_h}{h}\right)$: $0,0008 = 0,08\%$

Incerteza relativa do Volume $\left(\frac{\sigma_V}{V}\right)$: $0,0013 = 0,13\%$

Volume: $64,39 \pm 0,08 \text{ cm}^3$

Comparando duas medidas

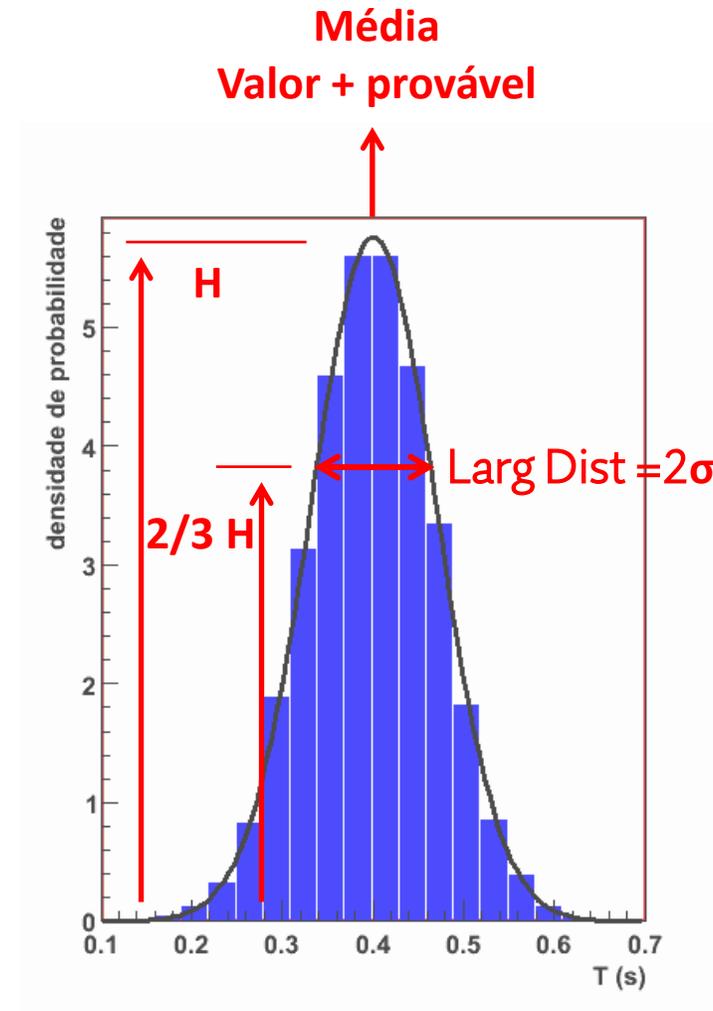
- Comparando $2,74 \pm 0,02$ mm com $2,80 \pm 0,03$ mm
 - Incerteza é uma estimativa do erro (valor verdadeiro)



- Existe uma probabilidade dessas duas medidas representarem o mesmo valor verdadeiro?

Compatibilidade

- Incerteza = Intervalo confiança
 - Paralelo com distribuição estatística:
 - $[M - \sigma; M + \sigma] = 68\%$
 - $[M - 2\sigma; M + 2\sigma] = 95\%$
 - $[M - 3\sigma; M + 3\sigma] = 99,9\%$



Critério para compatibilidade

- Superposição em 1σ = compatíveis
 - Superposição em 2σ ou 3σ
 - Compatíveis com menor probabilidade
- Teste Z indica essa probabilidade
 - Comparação entre $(a \pm \sigma_a)$ e $(b \pm \sigma_b)$

$$Z = \frac{|a - b|}{\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}}$$

$0 < Z \leq 1$, compatíveis ao nível de 1σ

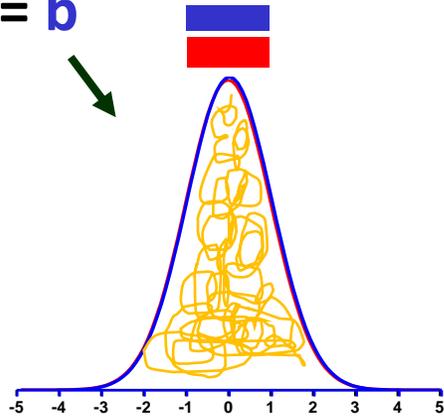
$1 < Z \leq 2$, compatíveis ao nível de 2σ

$2 < Z \leq 3$, compatíveis ao nível de 3σ

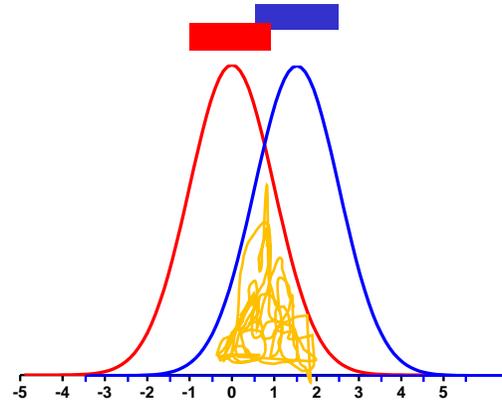
$Z > 3$, discrepantes

Compatibilidade

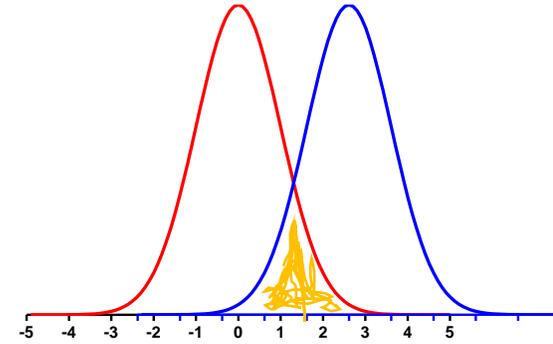
$a = b$
↓



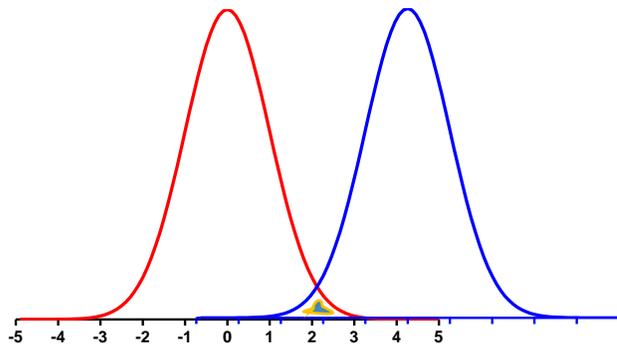
$Z = 0$



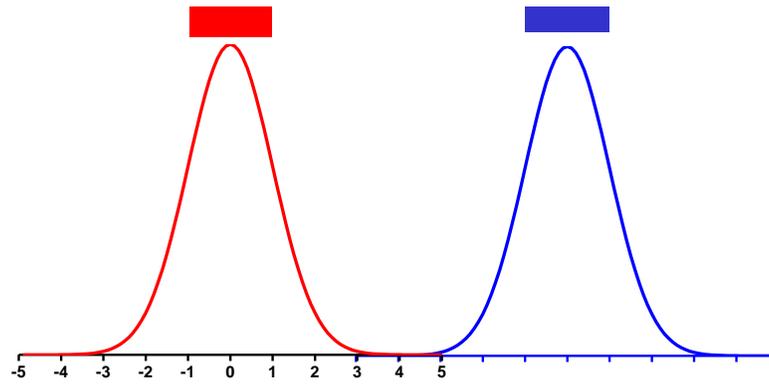
$Z = 1$



$Z = 2$



$Z = 3$



$Z > 3$

Exercício em aula

- Escolha a alternativa que represente o nível de compatibilidade entre os dois conjuntos de dados apresentados abaixo. Cada conjunto está representado em uma linha. Não se esqueça que vc deve calcular o fator Z para cada conjunto antes de responder a questão.

$$Z = \frac{|a - b|}{\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}}$$

$0 < Z \leq 1$, compatíveis ao nível de 1σ

$1 < Z \leq 2$, compatíveis ao nível de 2σ

$2 < Z \leq 3$, compatíveis ao nível de 3σ

$Z > 3$, discrepantes

	Aluno 1	Aluno 2	Nível de compatibilidade
Medida	3.452 ± 0.009	3.331 ± 0.004	

	Aluno 1	Aluno 2	Nível de compatibilidade
Medida	33.4 ± 0.2	31.57643 ± 0.00002	

Exercício em aula

- Escolha a alternativa que represente o nível de compatibilidade entre os dois conjuntos de dados apresentados abaixo. Cada conjunto está representado em uma linha. Não se esqueça que vc deve calcular o fator Z para cada conjunto antes de responder a questão.

$$Z = \frac{|a - b|}{\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}}$$

$0 < Z \leq 1$, compatíveis ao nível de 1σ

$1 < Z \leq 2$, compatíveis ao nível de 2σ

$2 < Z \leq 3$, compatíveis ao nível de 3σ

$Z > 3$, discrepantes

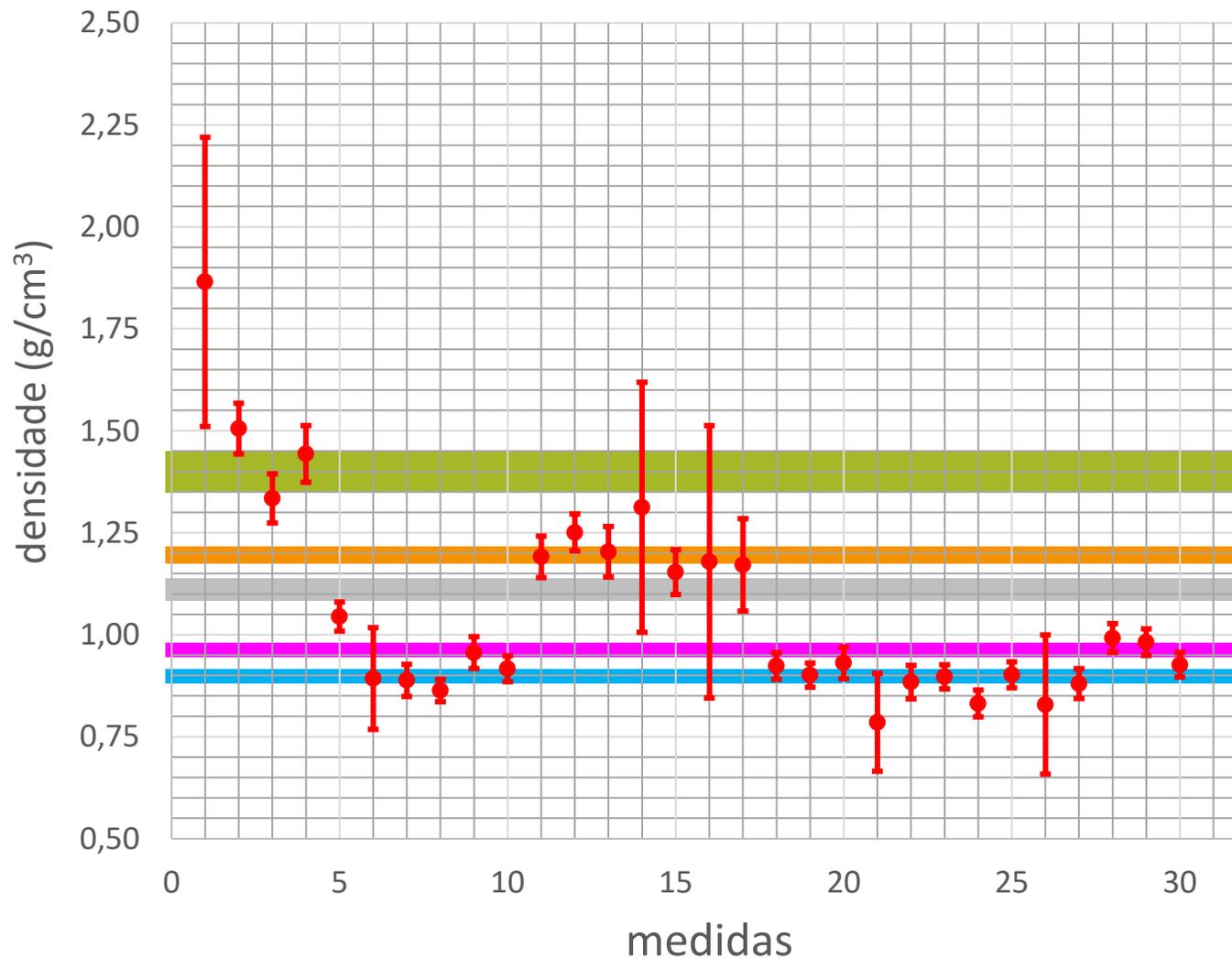
	Aluno 1	Aluno 2	Nível de compatibilidade
Medida	3.452 ± 0.009	3.331 ± 0.004	Incompatíveis
	Aluno 1	Aluno 2	Nível de compatibilidade
Medida	33.4 ± 0.2	31.57643 ± 0.00002	Incompatíveis

Análise dos resultados da aula passada

Quantos tipos de plástico tem na sala?

Dados primeira aula

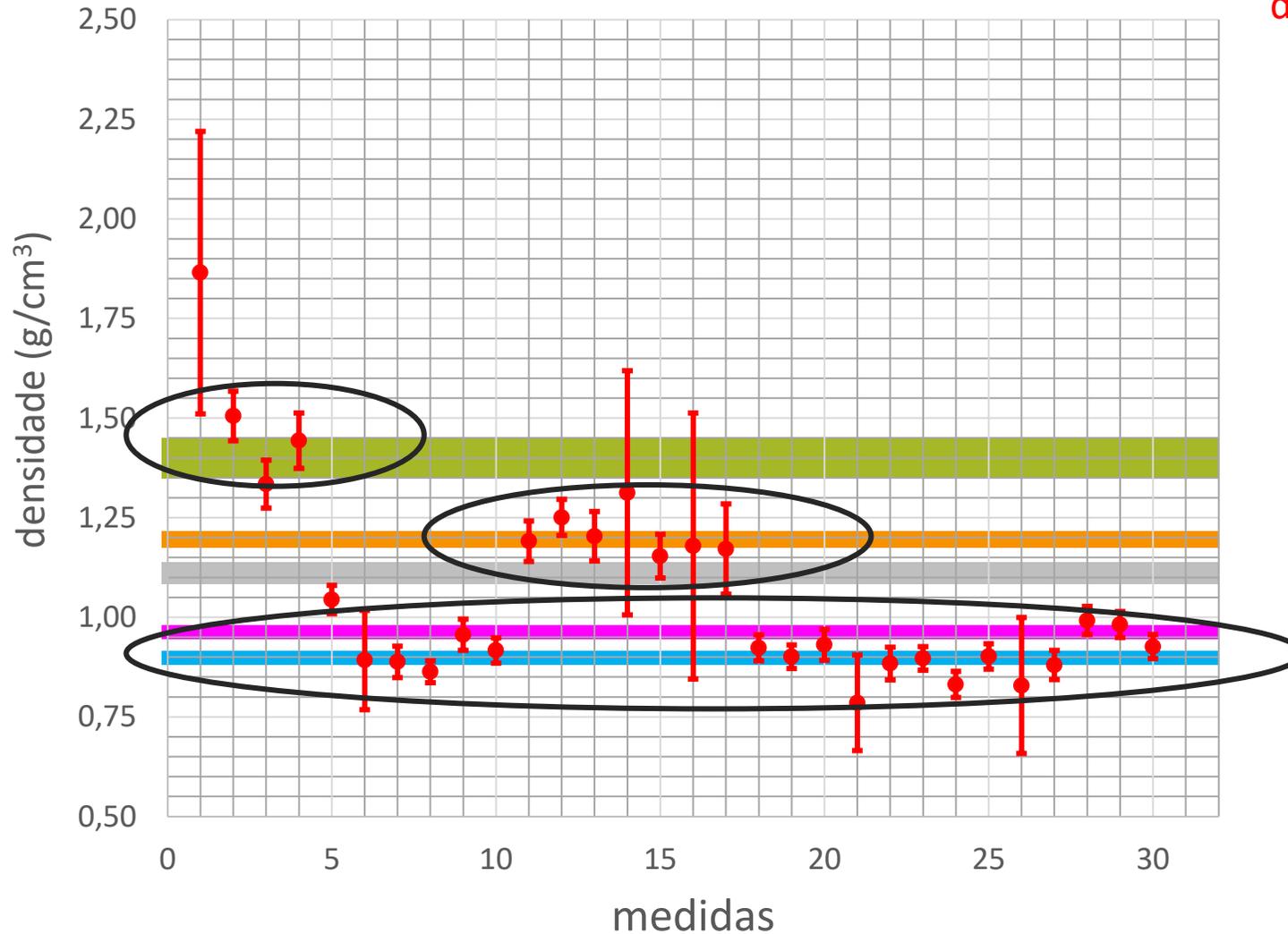
Aula 1 - Dados com balança digital



material	d(g/cm³)
PVC	1,35 a 1,45
Acrílico	1,17 a 1,20
Nylon	1,09 a 1,14
Polietileno	0,941 a 0,965
Polipropileno	0,900 a 0,915

Dados primeira aula

Aula 1 - Dados com balança digital



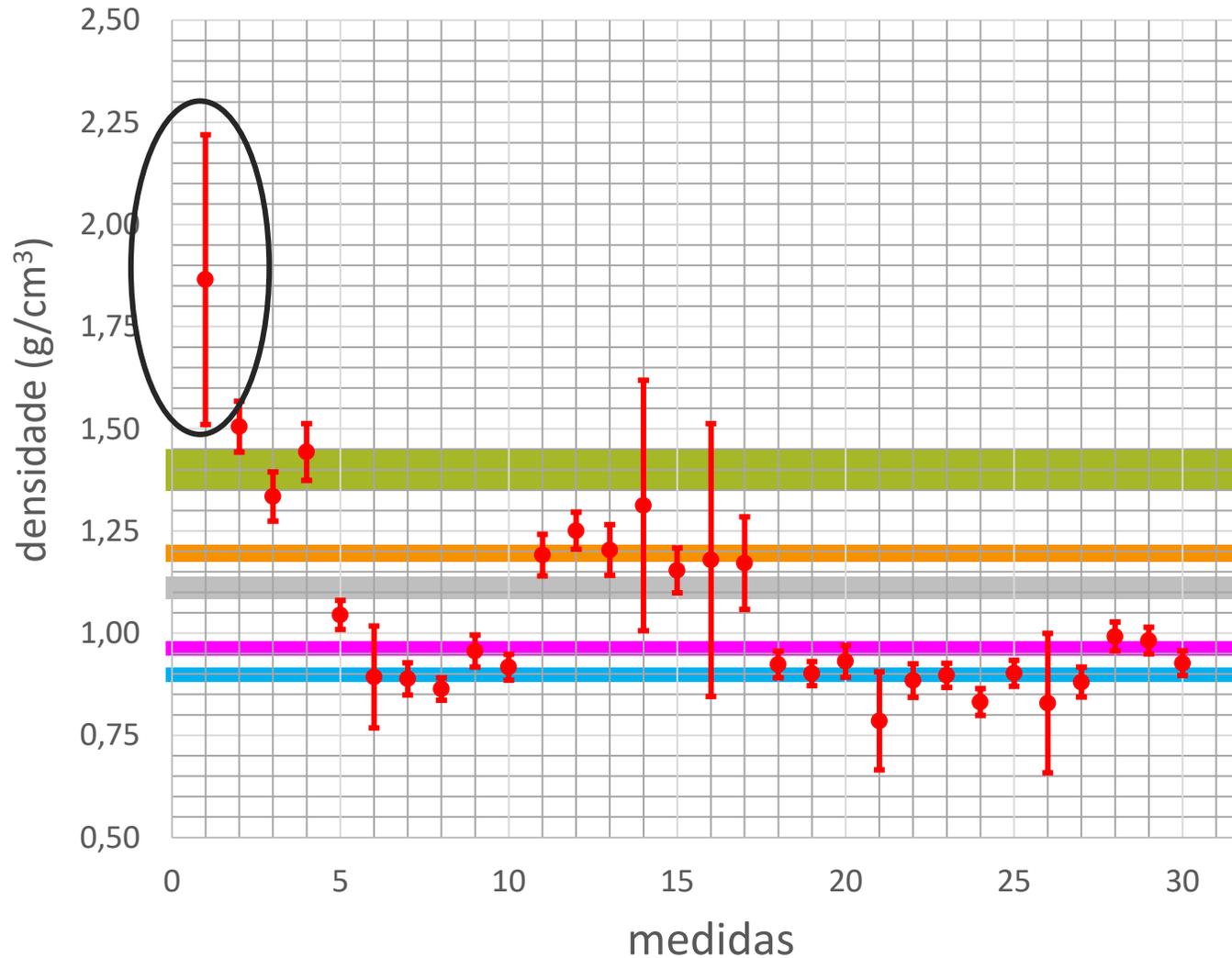
Tipos de plástico: 3

Talvez 4 se levarmos em conta 1 incerteza na compatibilidade dos dados

material	d(g/cm³)
PVC	1,35 a 1,45
Acrílico	1,17 a 1,20
Nylon	1,09 a 1,14
Polietileno	0,941 a 0,965
Polipropileno	0,900 a 0,915

Dados primeira aula

Aula 1 - Dados com balança digital

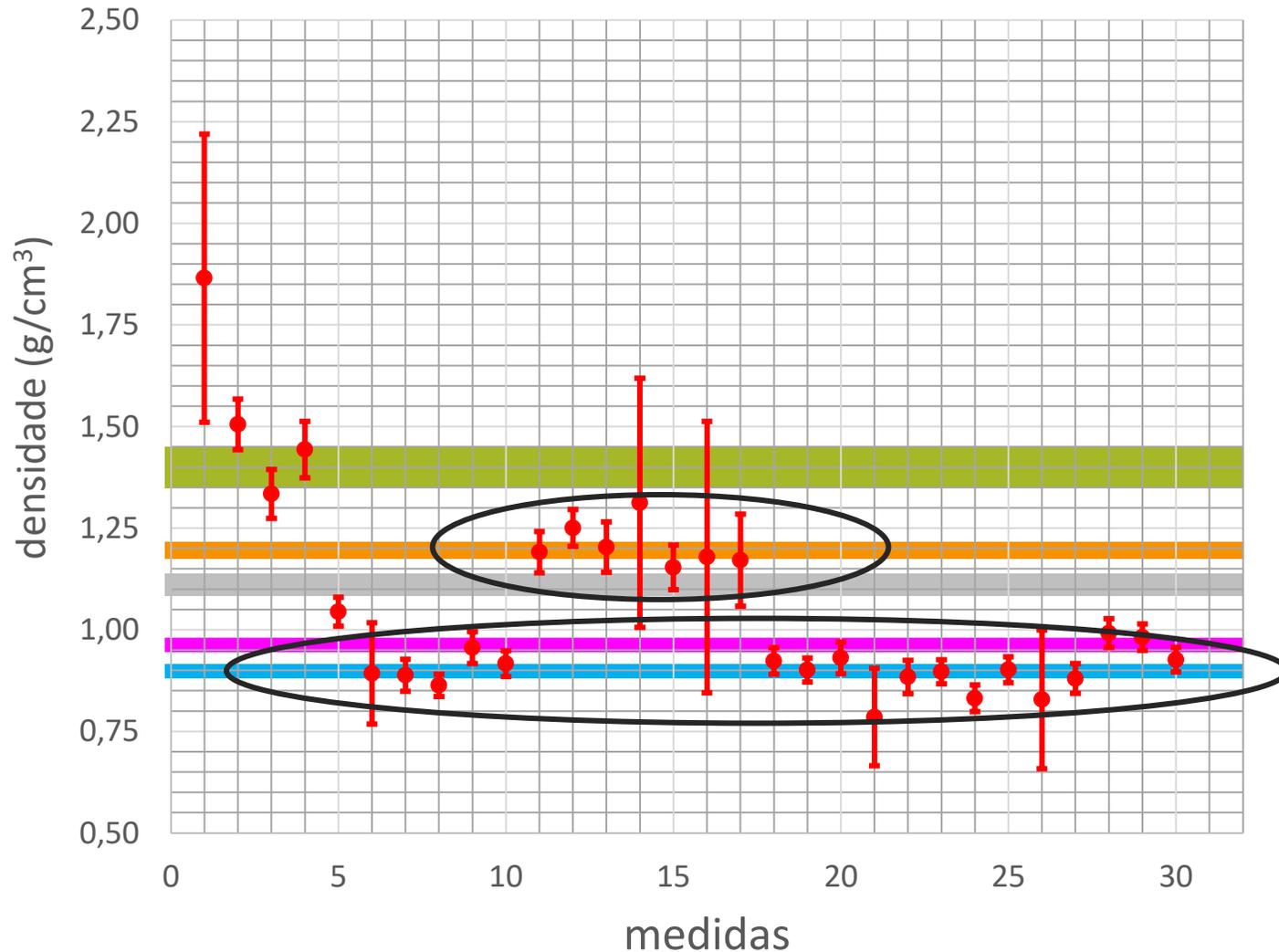


Plástico não listado
ou erro grosseiro?

material	d(g/cm³)
PVC	1,35 a 1,45
Acrílico	1,17 a 1,20
Nylon	1,09 a 1,14
Polietileno	0,941 a 0,965
Polipropileno	0,900 a 0,915

Dados primeira aula

Aula 1 - Dados com balança digital

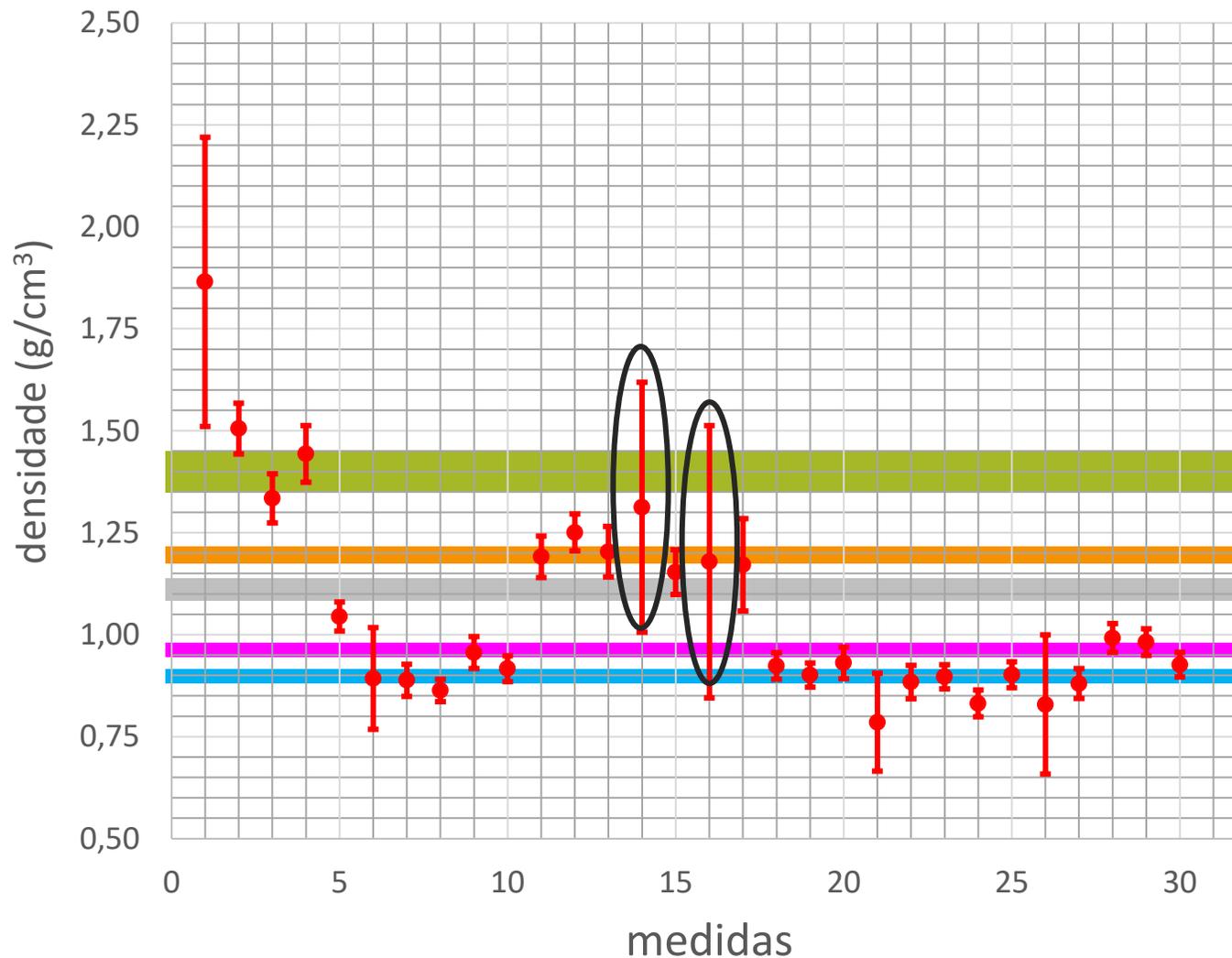


- É possível definir qual o tipo de plástico desses 2 conjuntos?
- É possível afirmar que os sólidos dos dois grupos são feitos do mesmo plástico?

material	d(g/cm³)
PVC	1,35 a 1,45
Acrílico	1,17 a 1,20
Nylon	1,09 a 1,14
Polietileno	0,941 a 0,965
Polipropileno	0,900 a 0,915

Dados primeira aula

Aula 1 - Dados com balança digital

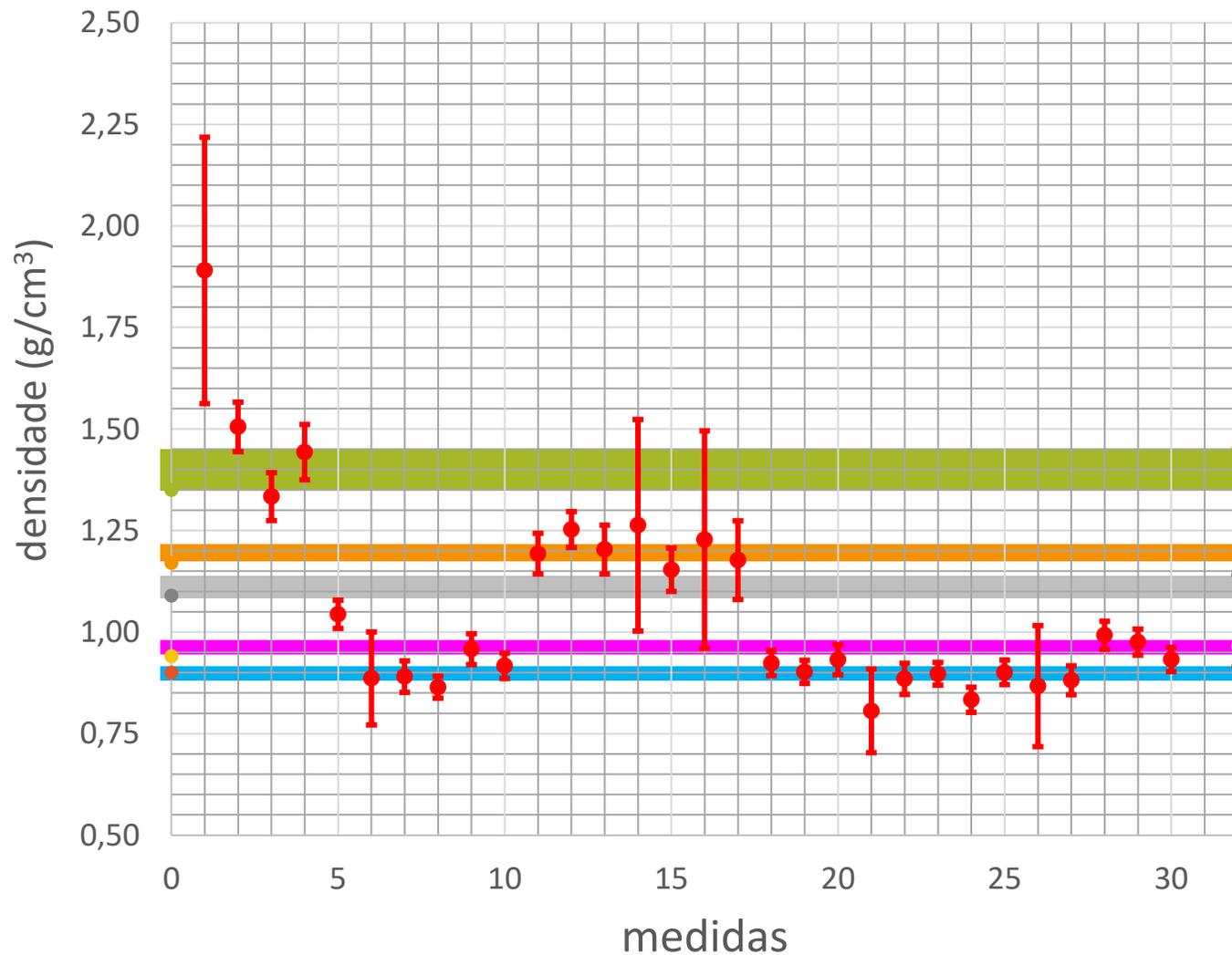


- É possível definir qual o tipo de plástico dessas peças?

material	d(g/cm³)
PVC	1,35 a 1,45
Acrílico	1,17 a 1,20
Nylon	1,09 a 1,14
Polietileno	0,941 a 0,965
Polipropileno	0,900 a 0,915

Dados primeira aula

Aula 1 - Dados com balança analítica



- Não muda muito em relação aos dados da balança digital

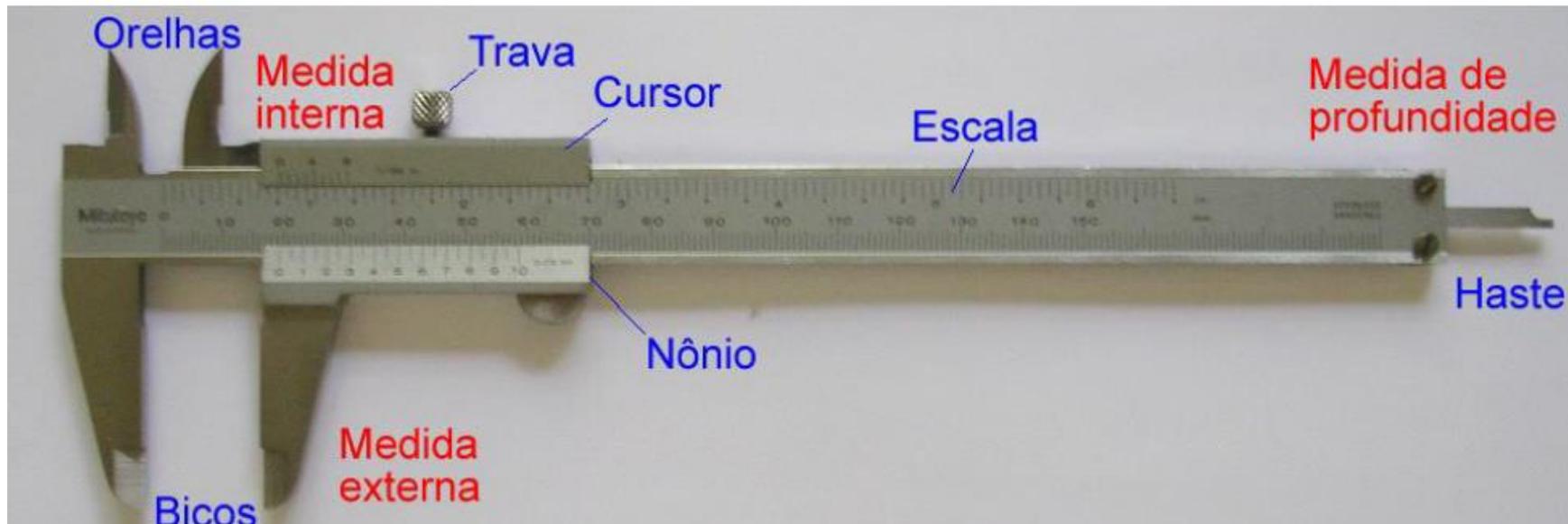
material	d(g/cm ³)
PVC	1,35 a 1,45
Acrílico	1,17 a 1,20
Nylon	1,09 a 1,14
Polietileno	0,941 a 0,965
Polipropileno	0,900 a 0,915

Conclusões Parciais

- Será que é possível que exista mais tipos de plástico do que aqueles identificados até o momento?
- Como seria possível saber isso?
 - Melhorando a precisão do experimento, ou seja, diminuindo as incertezas nas densidades

Paquímetro

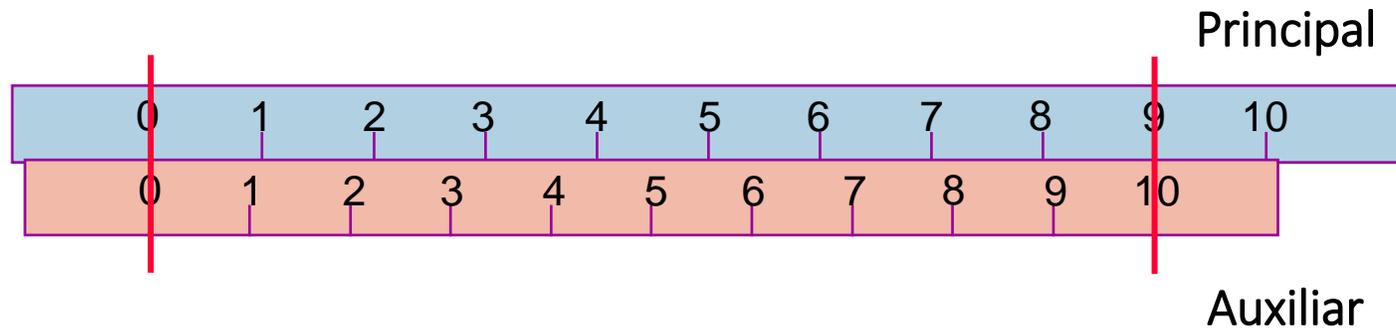
- Instrumento para medir comprimento
 - Escala auxiliar (nônio ou vernier)
 - Precisão de centésimos de mm



Paquímetro

- Nônio ou Vernier

- Escala auxiliar para aumentar a precisão da medida



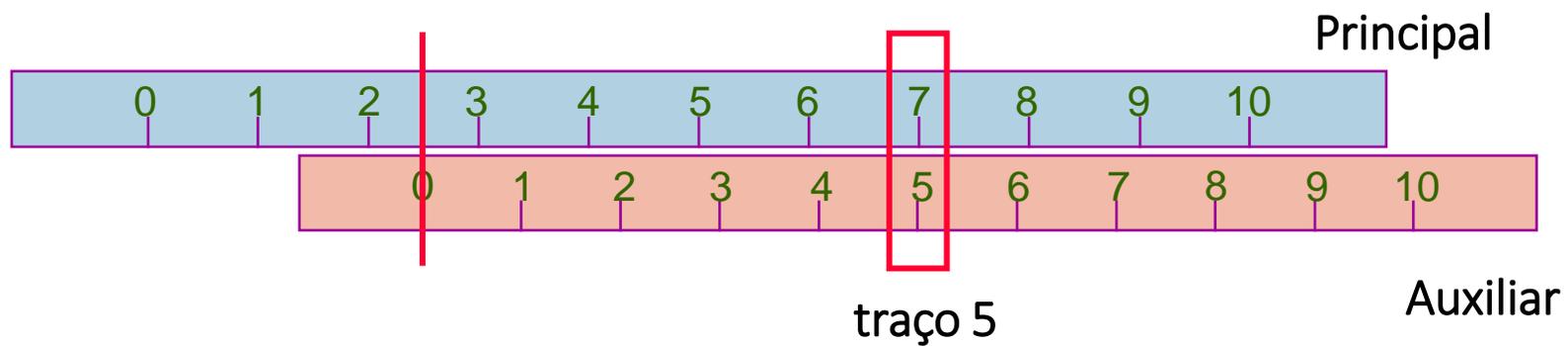
10 div escala auxiliar = 9 div escala principal

Precisão (nônio) = valor da menor divisão do nônio

$$\frac{\text{Valor da menor divisão Principal}}{\text{Número de divisões auxiliar}} = \frac{1 \text{ div}}{10} = 0,1 \text{ div}$$

Leitura com nônio

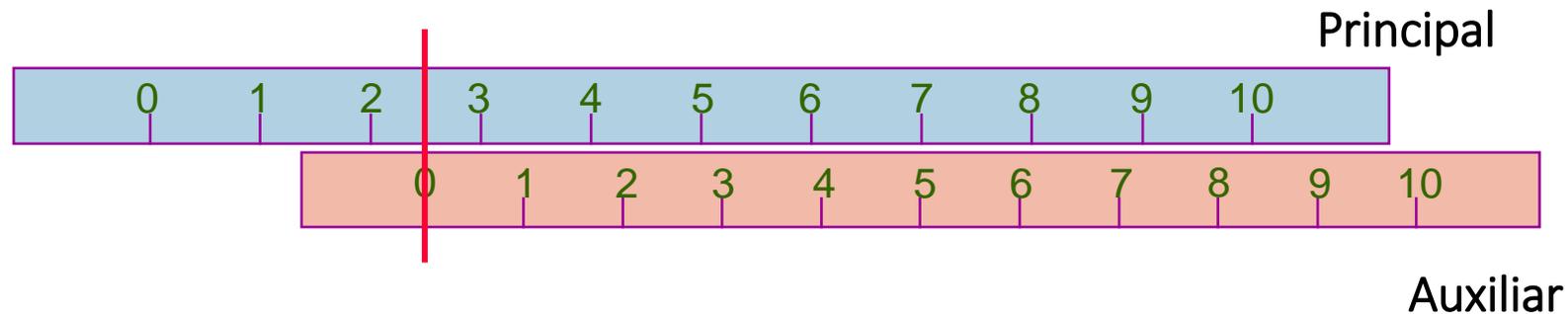
1) Posição zero do nônio



Medida = 2,

Leitura com nônio

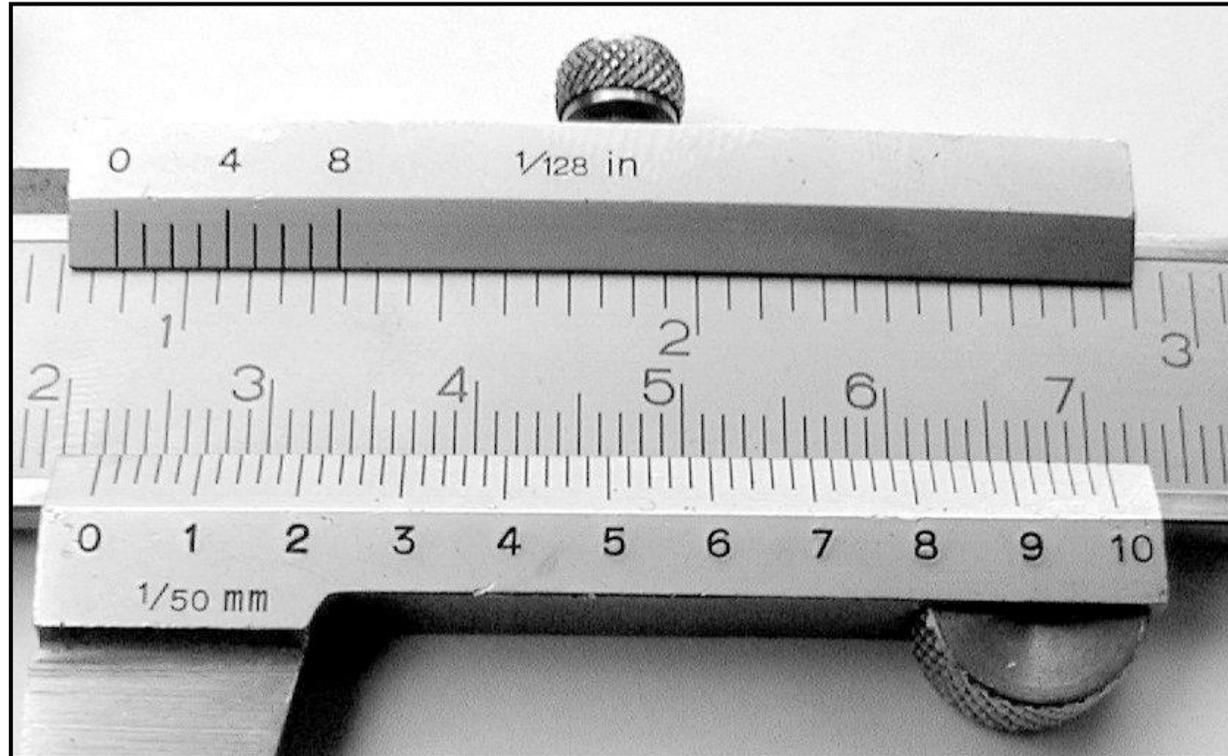
- 1) Posição zero do nônio
- 2) Número do traço da escala auxiliar que melhor coincidir com traço da escala principal



$$5 \times \text{precisão do nônio} = 5 \times 0,1 = 0,5$$

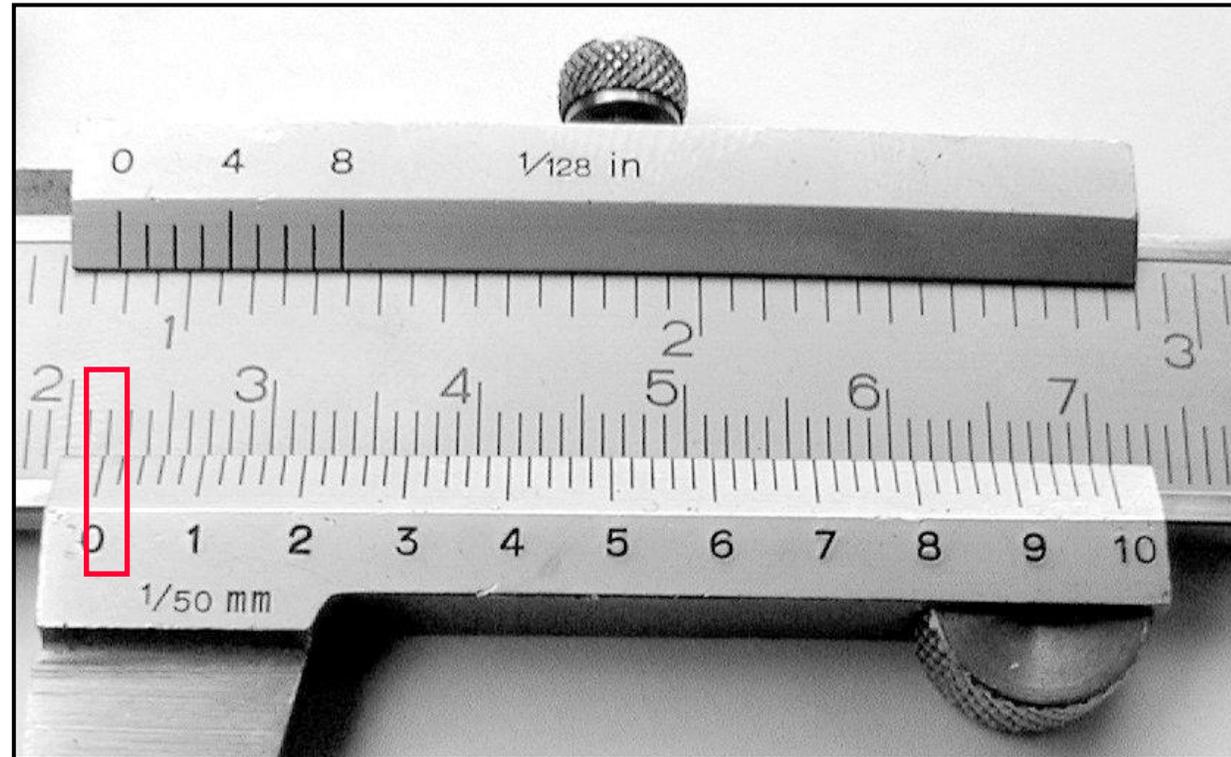
$$\text{Medida} = 2,5 \pm 0,1 \quad \text{div}$$

Leitura com paquímetro



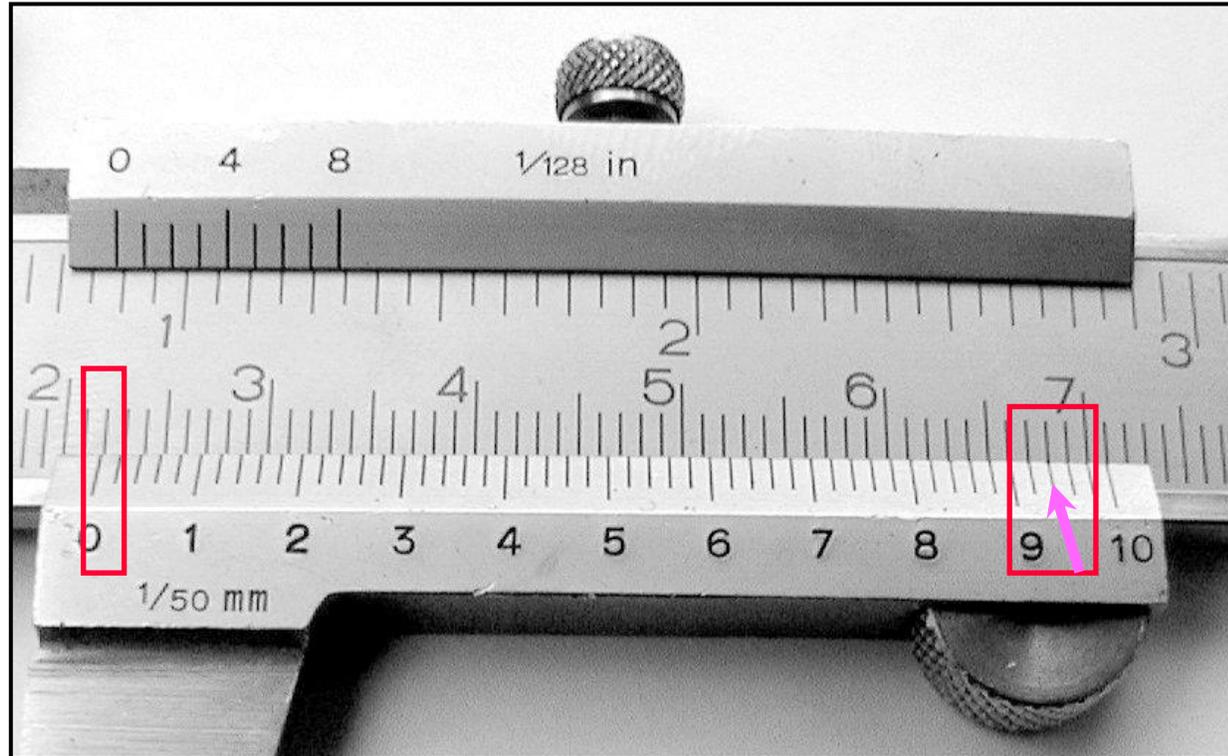
Leitura = mm

Leitura com paquímetro



Leitura = 21, mm

Leitura com paquímetro

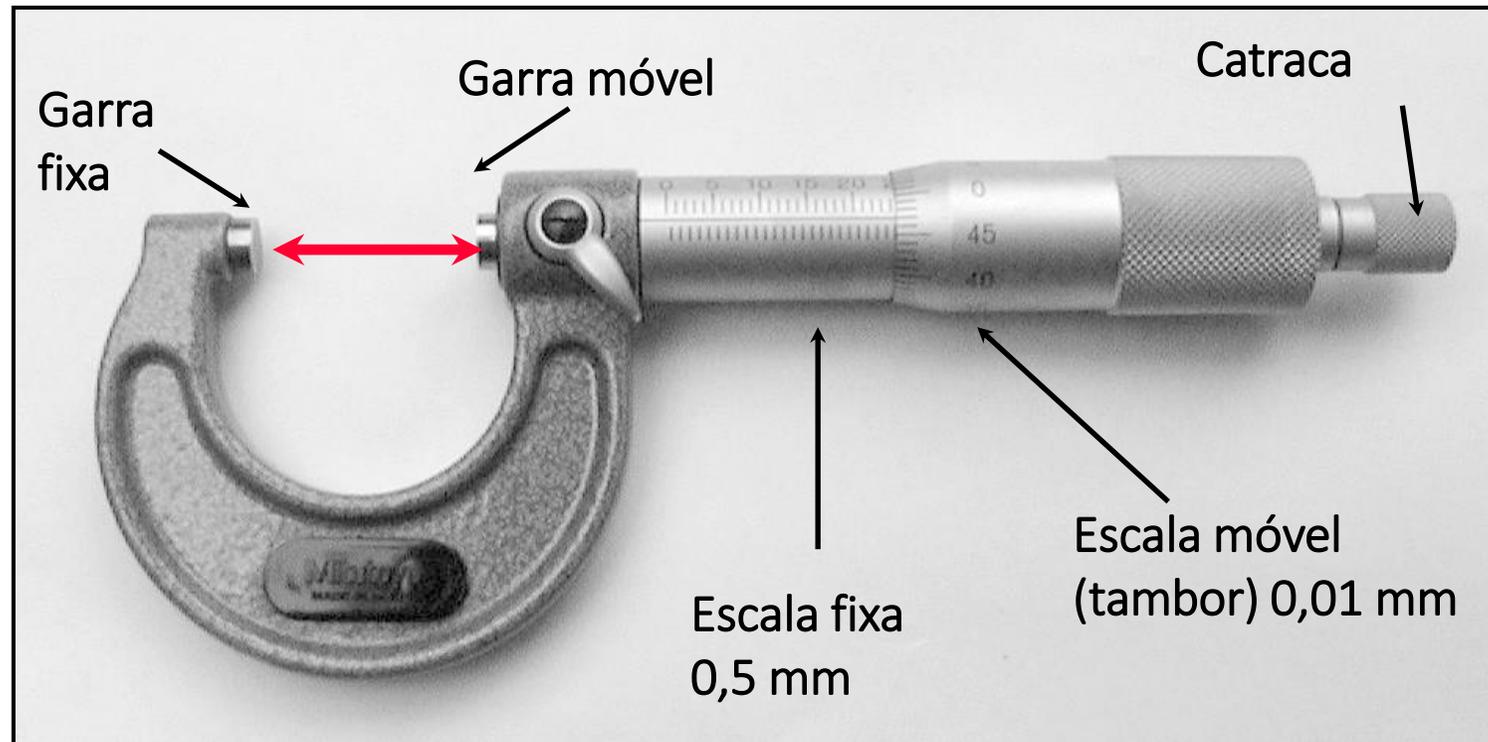


Traço 47 x Precisão 0,02 mm = 0,94 mm

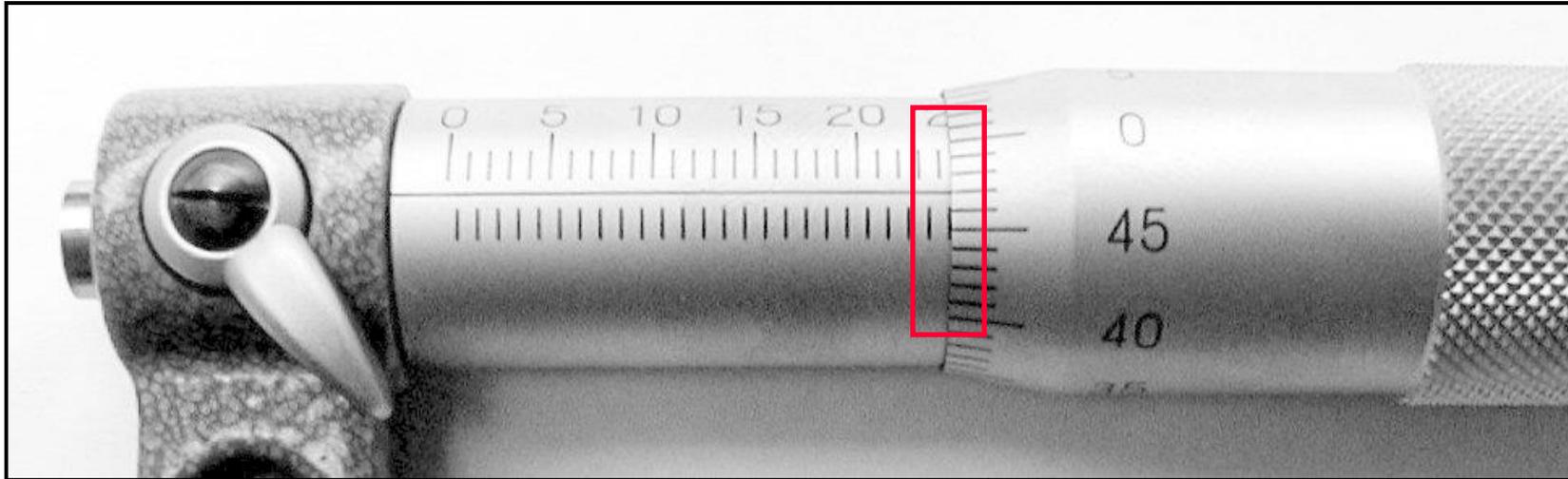
Leitura = 21,94 ± 0,02 mm

Micrômetro

- Instrumento para medir comprimento
 - Precisão de microns



Leitura com micrometro

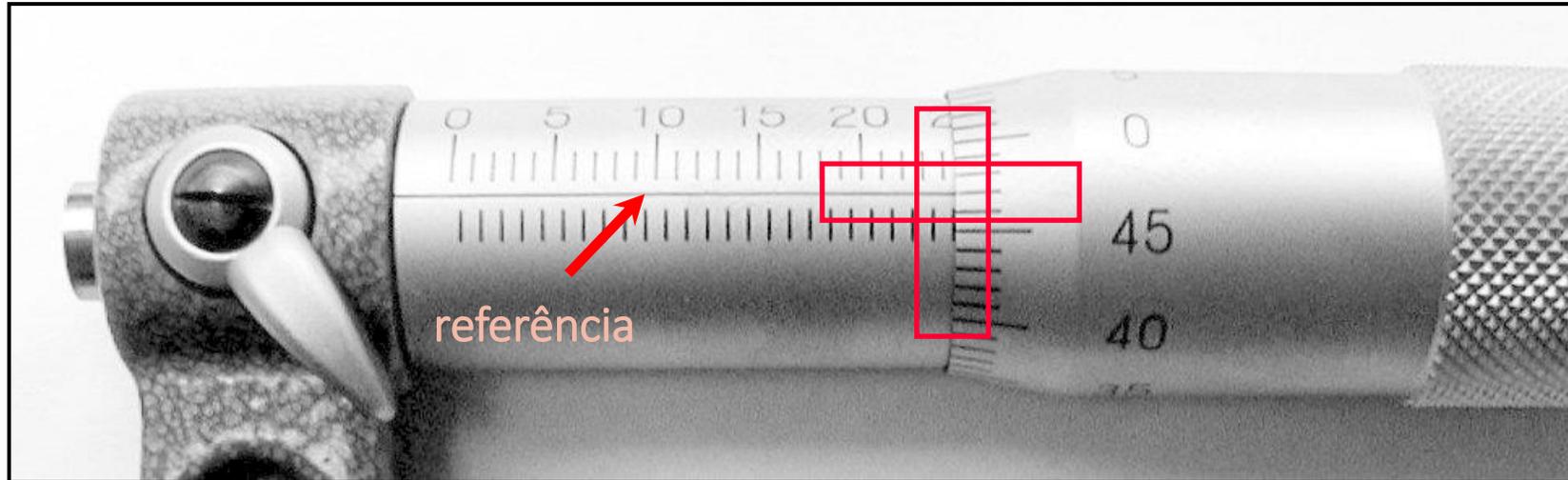


1) Posição da escala móvel (passos de 0,5 mm)

24,0 mm

Leitura = 24, mm

Leitura com micrometro



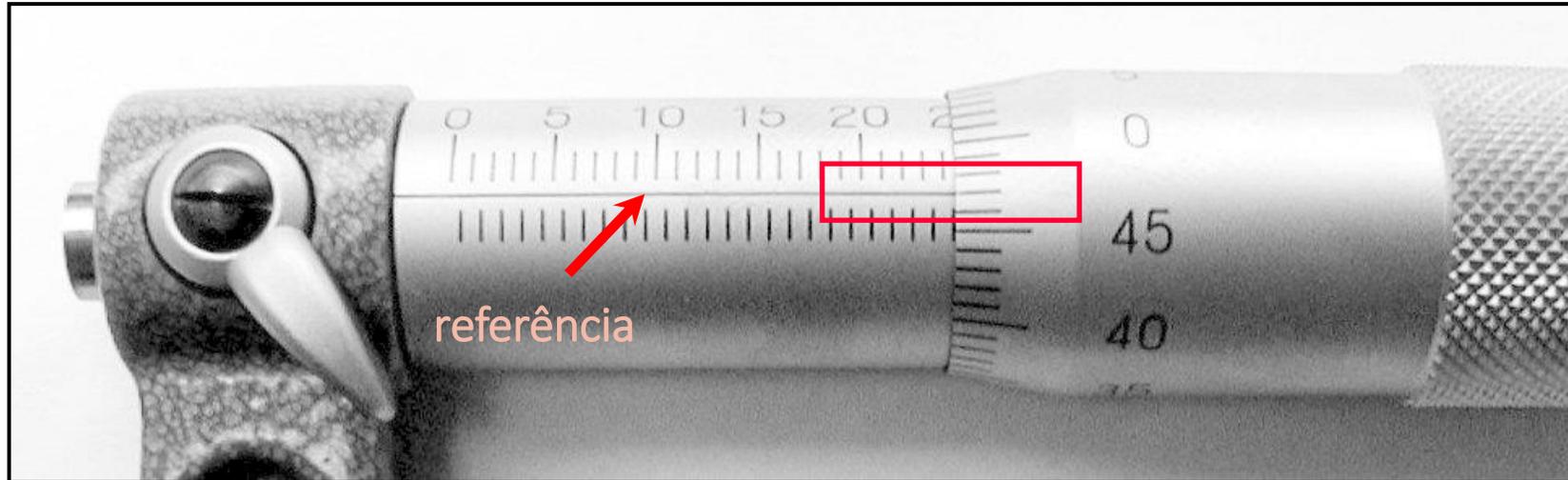
1) Posição da escala móvel (passos de 0,5 mm) 24,0 mm

2) Posição da escala fixa (referência)

$$46,9 \text{ traços} \times (0,5 \text{ mm} / 50 \text{ traços} = 0,01) = 0,469 \text{ mm}$$

$$\text{Leitura} = 24,469 \pm 0,005 \text{ mm}$$

Leitura com micrometro



1) Posição da escala móvel (passos de 0,5 mm) 24,0 mm

2) Posição da escala fixa (referência)

$$46,9 \text{ traços} \times (0,5 \text{ mm} / 50 \text{ traços} = 0,01) = 0,469 \text{ mm}$$

$$\text{Leitura} = 24,469 \pm 0,005 \text{ mm}$$

Usando o paquímetro e o micrometro



Video no moodle (aba materiais didáticos/ arquivos uteis)

Treino para leitura

- Para paquímetro e micrômetro:

www.stefanelli.eng.br

- Entre na opção metrologia/Simulador
- Escolha o equipamento e escala

Atividade prática

Medida da Densidade de Sólidos

- Objetivo
 - Identificar os diferentes tipos de plásticos que compõem um conjunto de objetos
- Identificação
 - Comparação das medidas de densidade (+incertezas) com valores tabelados de diferentes tipos de plásticos

$$d = \frac{m}{V}$$

Procedimento Experimental

- Melhorar a medida de massa e a medida do volume dos cilindros:
 - Medir a massa usando a balança analítica (já feito se utilizarem a mesma caixa da primeira aula)
 - Medir novamente as dimensões para cálculo do volume utilizando:
 - Paquímetro
 - Micrômetro

Análise dos dados

- Calcular para as novas medidas:
 - o volume + incerteza de cada peça
 - densidade + incerteza de cada peça
- Colocar os valores das medidas de massa, diâmetro e altura no guia e na planilha online:
 - link da planilha:
https://drive.google.com/drive/folders/1KjwxSm-eWm0AoQBpjGQO2BpfPpwsc0Ng?usp=share_link
- Comparar as medidas de toda a classe novamente.
 - Quantos tipos de plásticos podem ser identificados desta vez?
 - Que medida permitiu obter esse resultado?

Para a próxima aula (28/04):

- Entrega do Guia 2.2 (um por grupo)
- No moodle (aba Experimento # 2- Densidade de sólidos):
 - Exercício individual (até dia 28/04).
- Texto: Apostila do curso (página principal do moodle):
 - Experiência III (Aula 05) Distância Focal De Uma Lente