

# Introdução às Medidas em Física (4300152)

Aula 03 (31/03/2023)

Paula R. P. Allegro  
[paula.allegro@usp.br](mailto:paula.allegro@usp.br)

# Na aula de hoje:

- Resumo dos principais pontos das aulas anteriores
- Conceitos:
  - Medidas indiretas
    - Medida da densidade de sólidos
  - Noções de estatística:
    - Propagação de Incertezas
    - Compatibilidade entre medidas
- Experiência 2.1: Densidade de Sólidos
  - Realizar medidas de diferentes objetos
  - Identificar os tipos de plásticos através da comparação das medidas (+incertezas) com valores tabelados

# Referências para a aula de hoje:

- Apostila do curso (página principal do moodle):
  - Capítulo 3: Instrumentos de Medidas
  - Experiência II (Aulas 03 e 04): Densidade de Sólidos.
- Texto: Conceitos Básicos da Teoria de Erros (aba Material Didático / arquivos 2023)
  - Capítulo 2: Propagação de Erros e Incertezas

# Da 1ª aula (17/03):

- Medidas:
  - Definição: quantificar uma grandeza com relação a algum padrão tomado como unidade.
  - Medidas repetidas por:
    - Diferentes experimentadores
    - Diferentes instrumentos resultados diferentes
- Supondo que existe um valor verdadeiro associado à grandeza que está sendo medida, nunca iremos obter o valor verdadeiro em nossas medições devido:
  - características da própria grandeza sendo medida
  - limitações intrínsecas e inevitáveis dos nossos instrumentos e técnicas de medida
- A possibilidade de haver erros é que dá origem à **incerteza** de uma medida.

# Da 1ª aula (17/03):

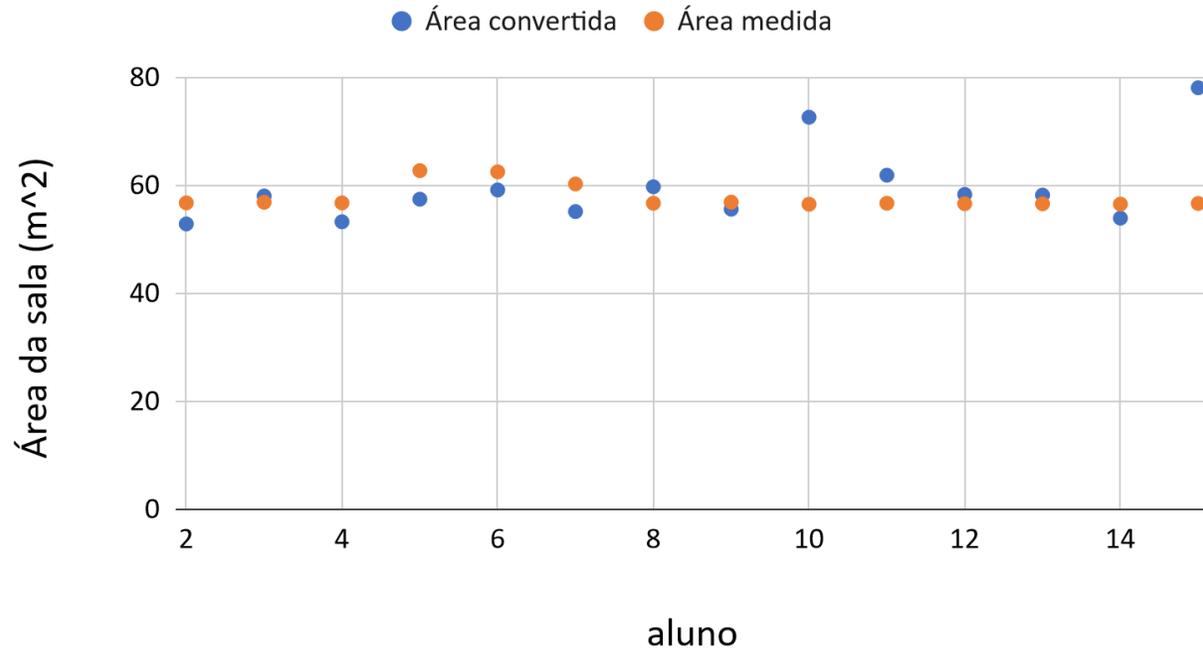
- Representação dos resultados de cada medida:  
valor medido  $\pm$  incerteza (estimativa do erro)
- Representação de conjuntos de medidas: Tabelas
  - Identificação
  - Legenda
  - Cabeçalho
  - Unidades
  - Medidas
  - Incertezas

**Tabela 1.1:** Alguns valores experimentais para a constante de gravitação ao longo dos anos.

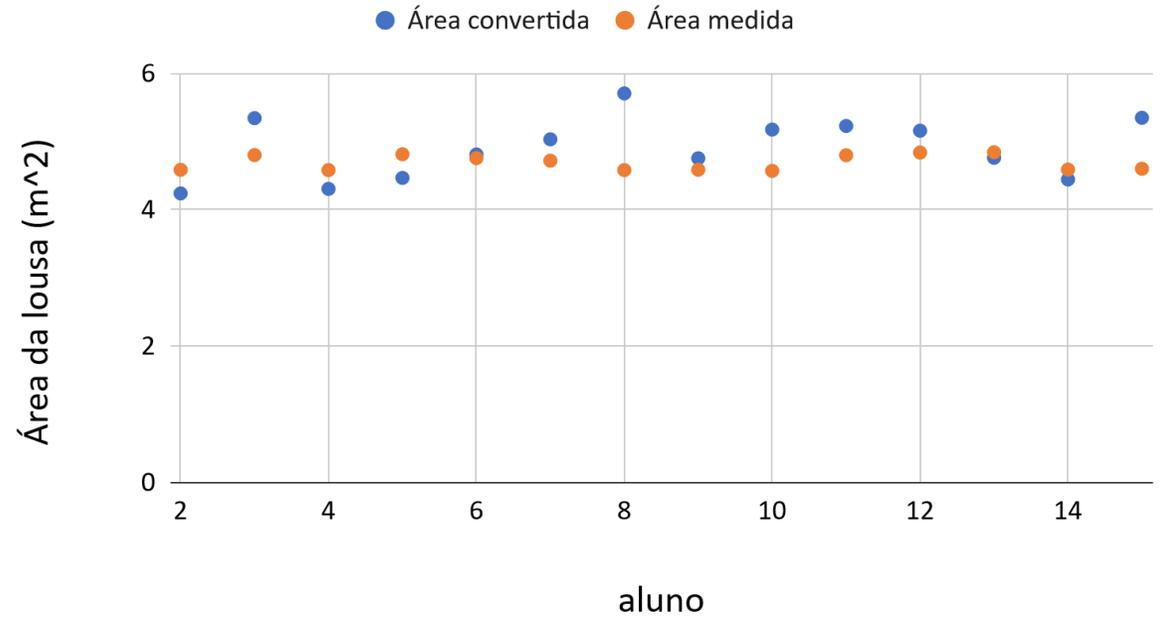
ano	$G \pm \sigma$ ( $10^{-11} \text{m}^3 \text{s}^{-2} \text{kg}^{-1}$ )
1798	$6,75 \pm 0,05$
1930	$6,670 \pm 0,005$
1988	$6,67259 \pm 0,00085$

# Da 1ª aula (17/03):

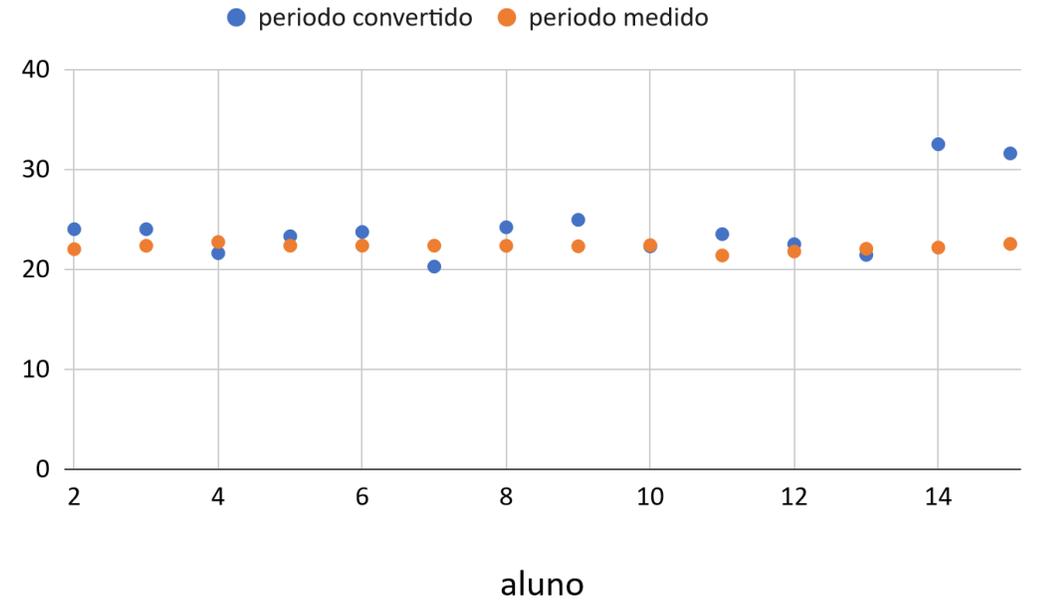
Área da sala



Área da lousa



Período de 10 oscilações (s)



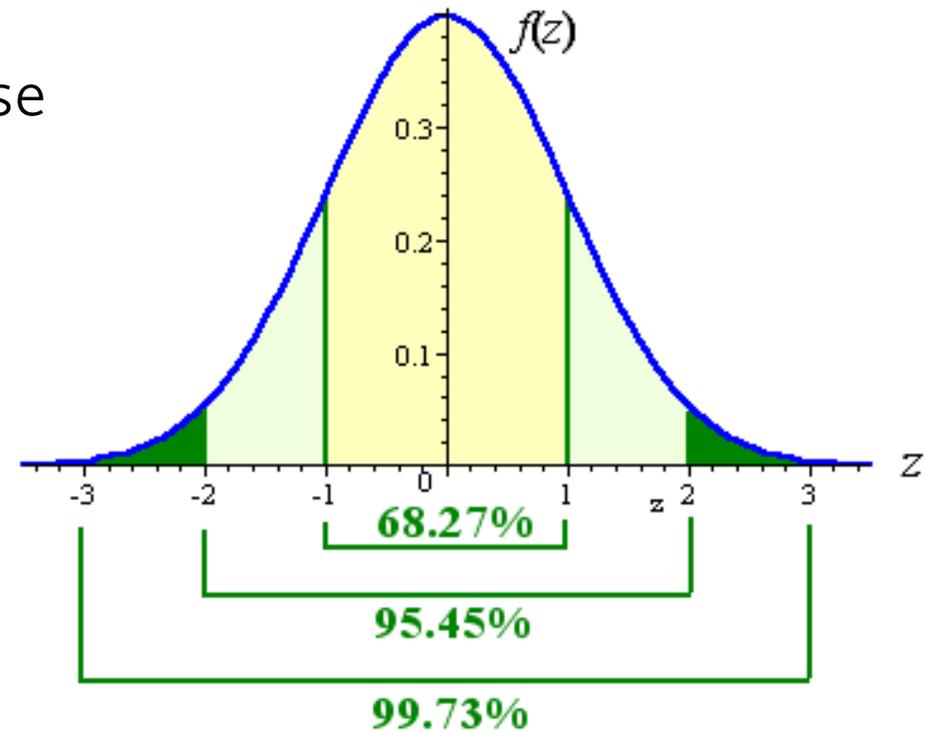
# Da 2ª aula (24/03): conceitos sobre medidas

- Resultados experimentais estão sempre sujeitos a **erros**:
  - Erros podem ou não ser conhecidos e podem ter diversas origens:
    - Erros conhecidos : incerteza instrumental
- São classificados de acordo com o **efeito** das fontes de erro em uma medida:
  - **Erros sistemáticos**: **afetam igualmente** todos os dados medidos, **independe** de quantos dados tenham sido tomados.
    - Exemplo: incerteza instrumental
  - **Erros aleatórios**: **afetam de maneira diferente** cada um dos dados medidos, causando variações dos valores obtidos em medições repetidas
    - podem ser reduzido aumentando-se o número de dados
    - são obtidos por métodos estatísticos, por isso são também conhecidos como **erros estatísticos**

# Da 2ª aula (24/03): Erros aleatórios

- Há uma distribuição de valores medidos, concentrados em um intervalo de valores
- Há várias distribuições possíveis de valores medidos
- Grandezas físicas sujeitas a erros aleatórios costumam se distribuir de forma simétrica próxima a uma gaussiana (distribuição normal ou de Gauss)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



# Da 2ª aula (24/03): Representação do resultado de um conjunto de medidas

- Quantitativamente:

- Resultado da medida → Média: 
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

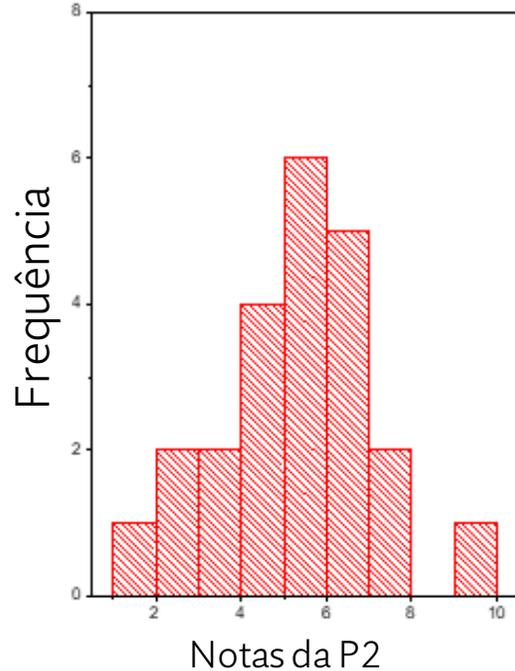
- Flutuação dos dados → Desvio Padrão ( $\sigma$ ) 
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

- Estimativa do erro estatístico da média: desvio padrão da média ( $\sigma_m$ ) 
$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

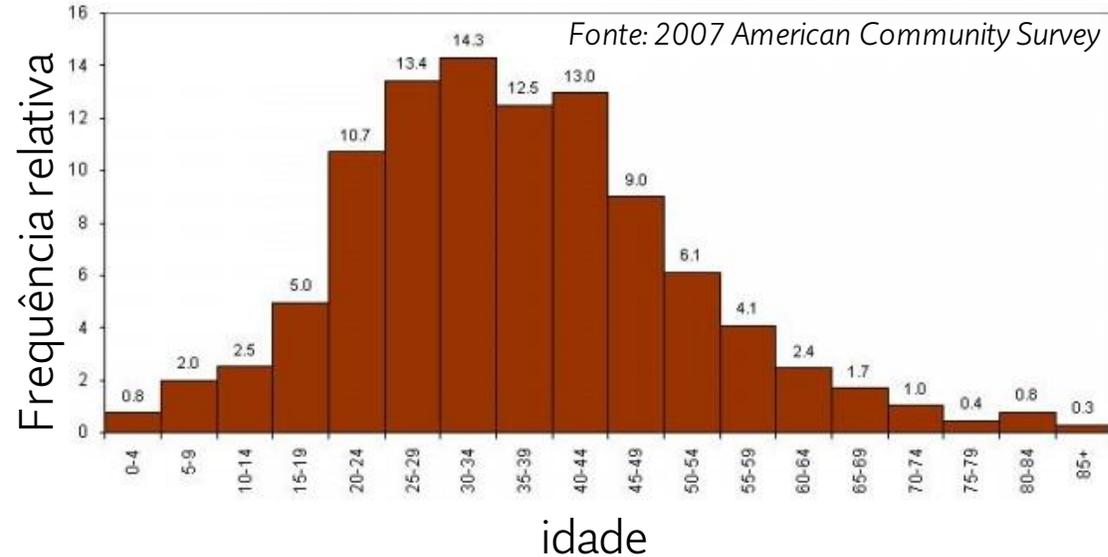
onde  $N$  medidas  $x_i$  foram realizadas nas mesmas condições e possuem as mesmas incertezas (instrumental + aleatórias)

# Da 2ª aula (24/03): Histogramas

- Tipo de gráfico onde é possível visualizar como as medidas se distribuem:



Distribuição Etária da População Brasileira Imigrante (%) - 2007



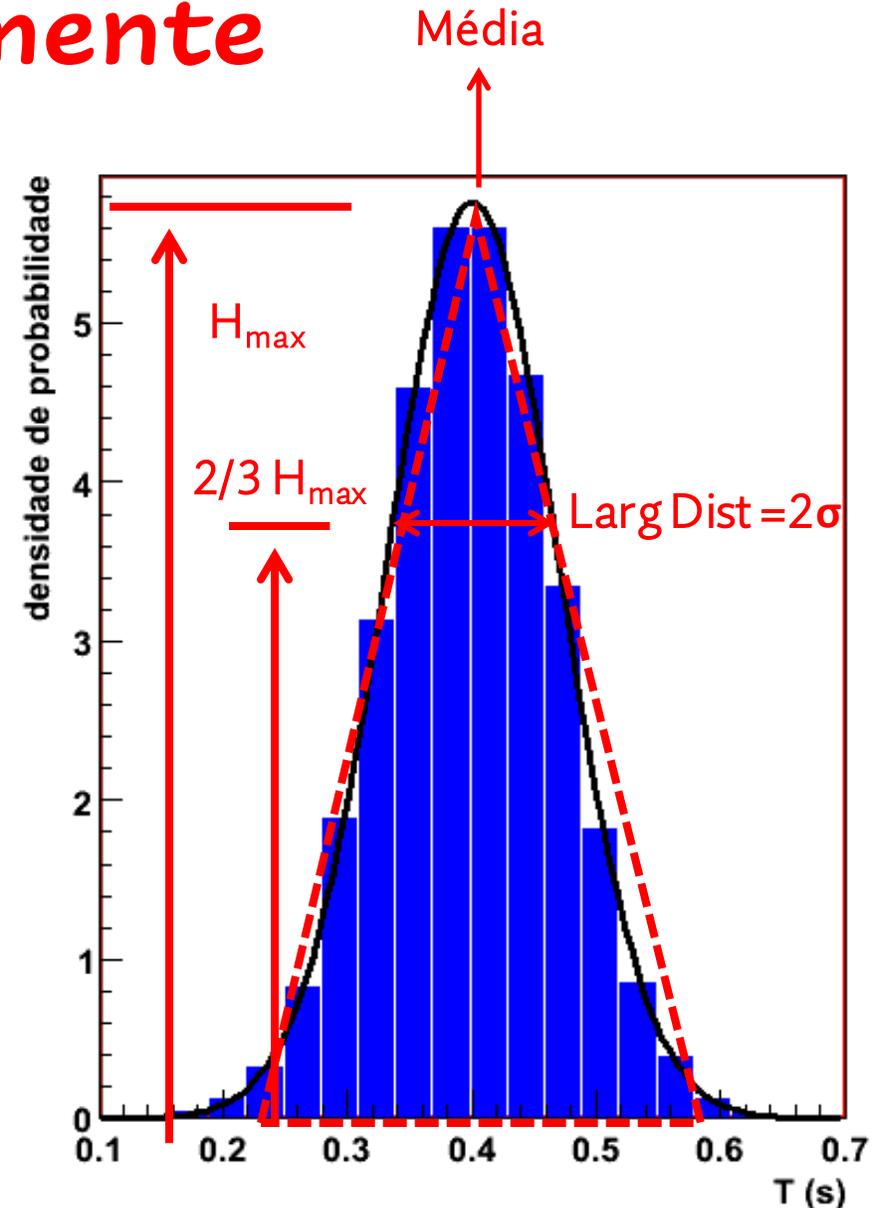
Eixo x (abscissa): mostra intervalos de medidas, também chamados de “canais” ou “bins”

Eixo y (ordenadas): mostra o número de ocorrências (frequência) ou a frequência relativa (número de ocorrências pelo número total de dados N).

# Da 2ª aula (24/03): Graficamente

- Média:
  - Valor mais provável
- Desvio padrão ( $\sigma$ ):
  - $\frac{1}{2}$  Largura da distribuição medida a  $\frac{2}{3}$  da altura máxima
- Total aproximado de eventos N:
  - Área do triângulo ajustado na distribuição
- Incerteza da média:

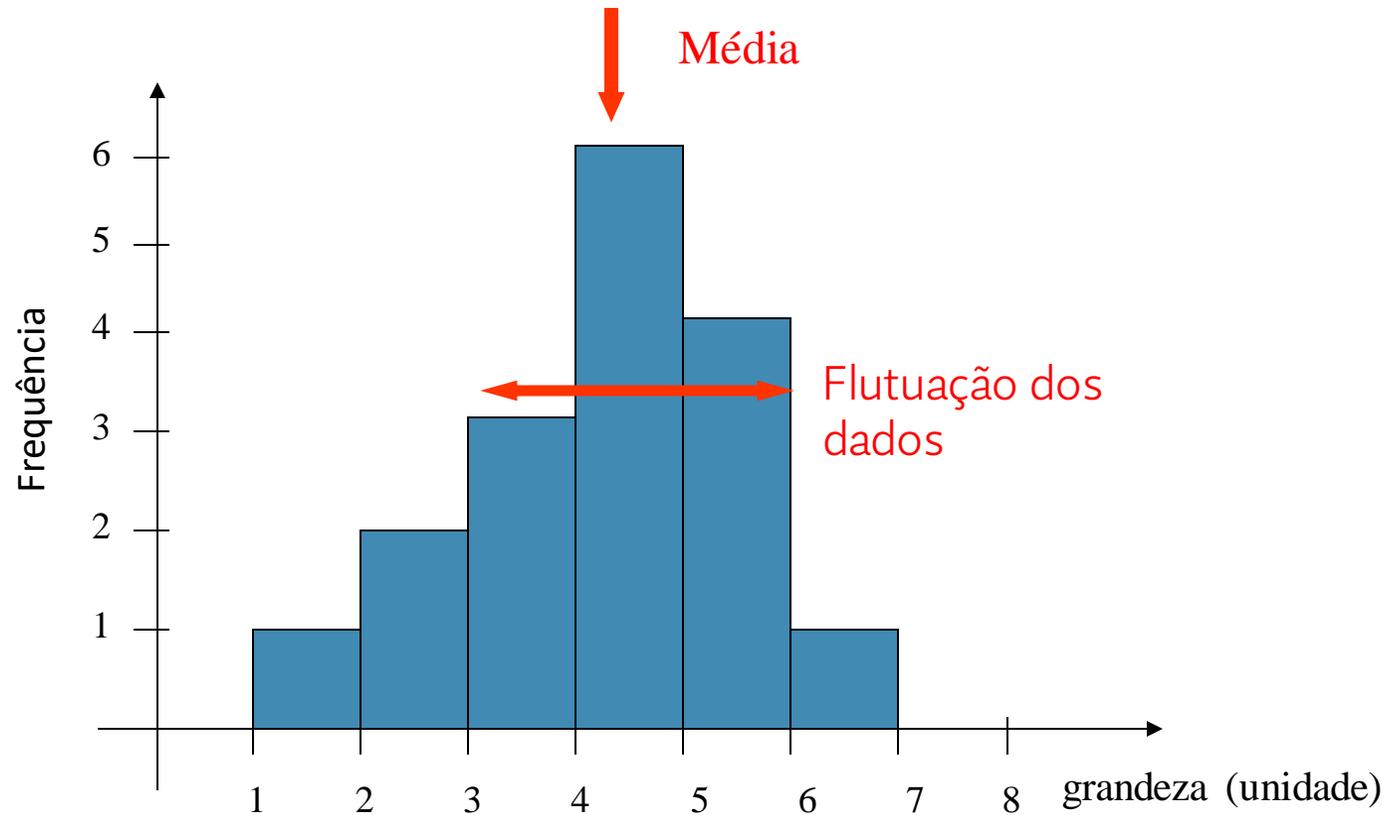
◦ Incerteza estatística 
$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$



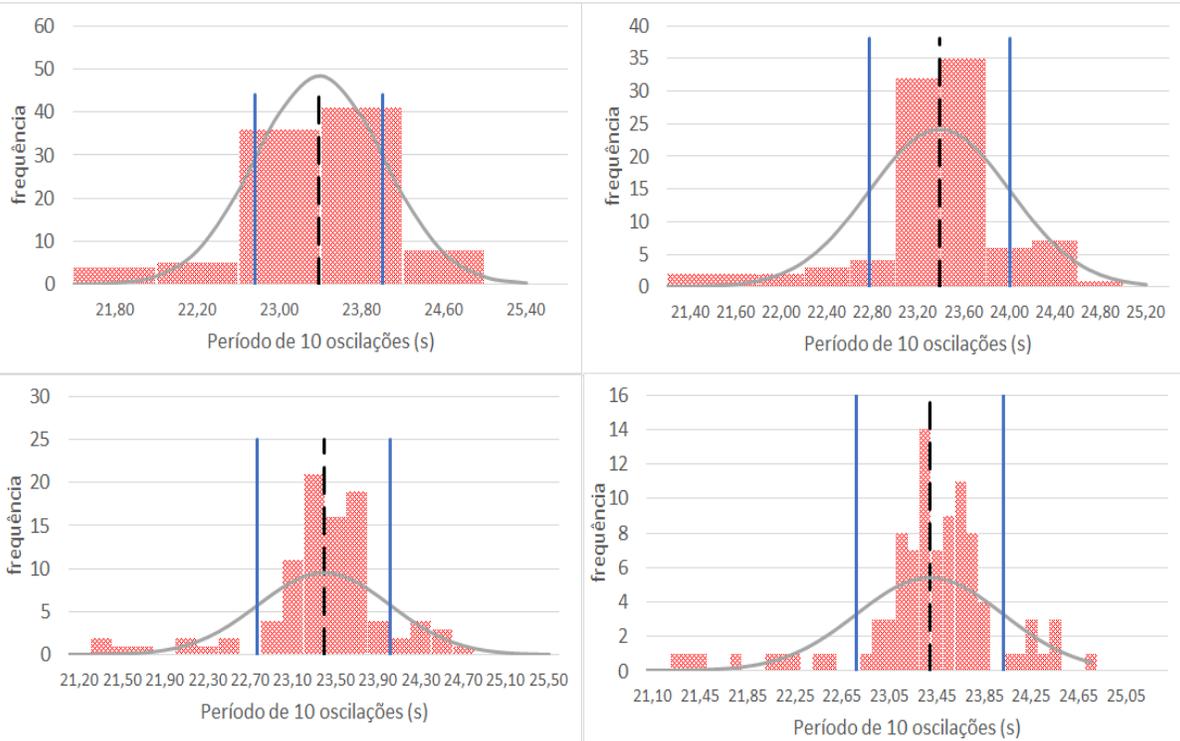
$$N_{dist} = (H_{max} * N_{colunas}) / 2$$

# Da 2ª aula (24/03): Representação de dados

$$x_{final} = \bar{x} \pm \sigma_m \text{ unid}$$

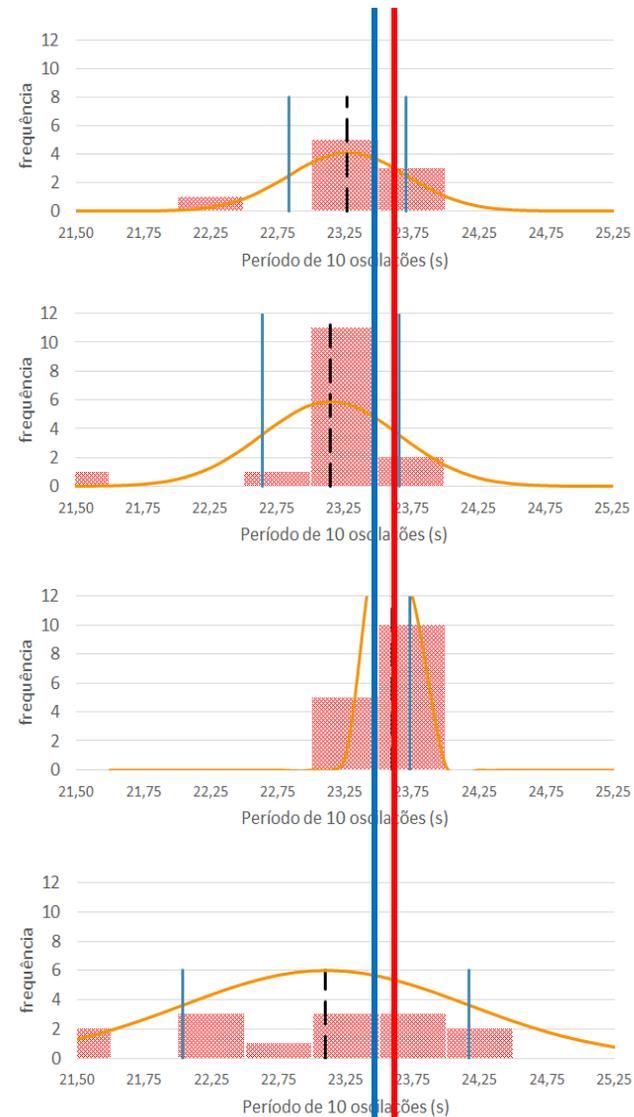


# Da 2ª aula (24/03): Dados turma 04/2022

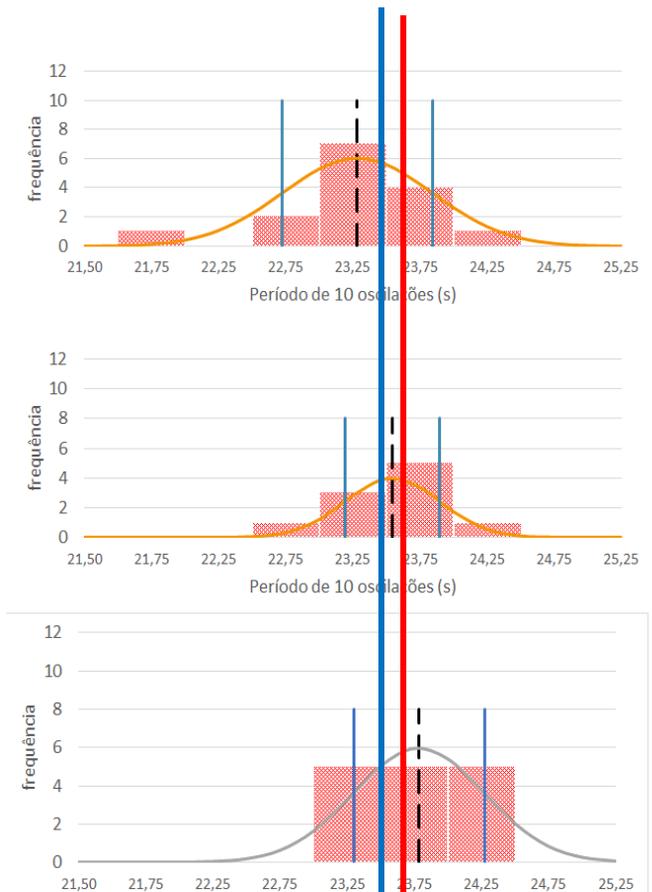


Média  $23,39$  s  
Desvio Padrão  $0,6$  s  
Inc média  $0,06$  s

Valor esperado do período para 10 oscilações:  
Para  $L = 1,380 \pm 0,005$  m  $\rightarrow T_{10} = 23,60$  s

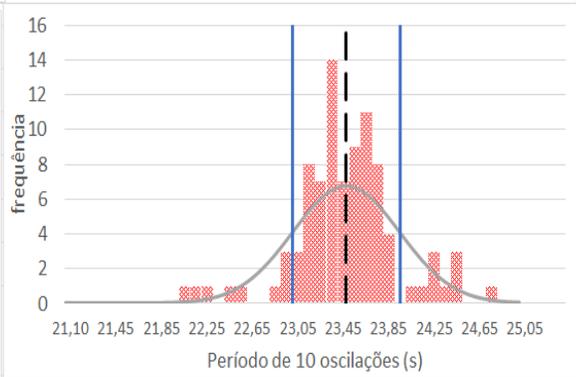
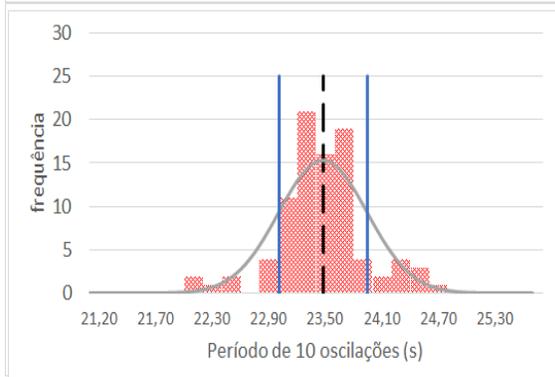
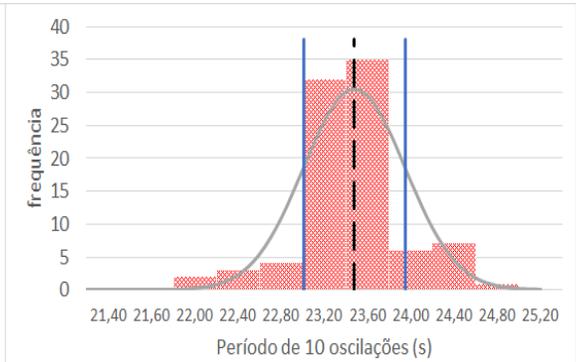
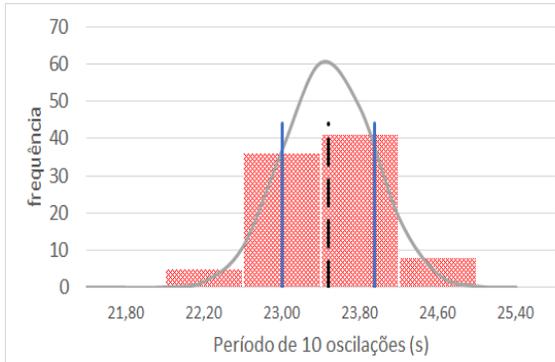


$\bar{T} = 23,39$  s  $T_{10} = 23,60$  s

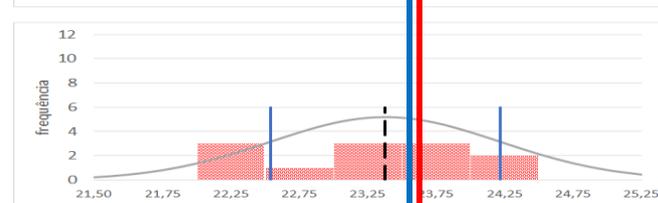
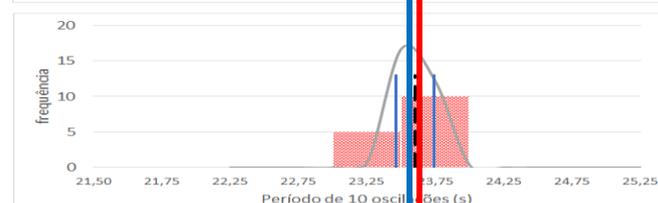
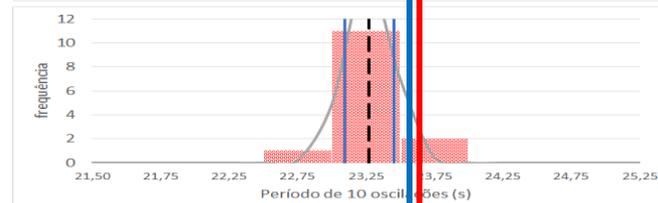
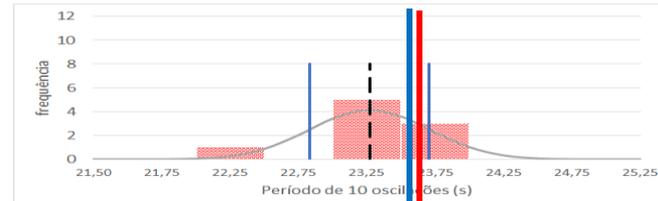


$\bar{T} = 23,39$  s  $T_{10} = 23,60$  s

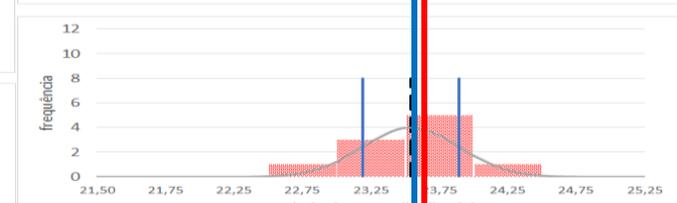
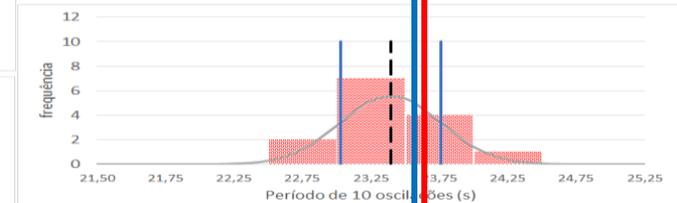
# Da 2ª aula (24/03): Dados turma 04/2022 sem pontos errados ( $T < 22$ s)



Média                      23,48 s  
Desvio Padrão            0,5 s  
Inc média                 0,05 s



$\bar{T} = 23,48$  s     $T_{10} = 23,60$  s



$\bar{T} = 23,48$  s     $T_{10} = 23,60$  s

Valor esperado do período para 10 oscilações:

Para  $L = 1,380 \pm 0,005$  m  $\rightarrow T_{10} = 23,60$  s

# Aula de hoje: avaliação das incertezas

- Tipos de incerteza que influenciam uma medida:
  - Instrumental
    - Aquela associada à precisão do instrumento utilizado para realizar a medida direta de uma grandeza
  - Estatística
    - Incerteza associada à flutuação no resultado de uma mesma medida
  - Sistemática
    - Aquela onde a medida é desviada em uma única direção, tornando os resultados viciados

# Incertezas instrumentais

- Precisão do instrumento de medida:
  - Instrumentos analógicos (ex. régua): é a metade da menor divisão
    - Cuidado com instrumentos que possuem escalas auxiliares tipo nônio (ex: paquímetro): **a incerteza é a menor divisão do nônio**
  - Instrumentos digitais (ex: multímetro): 1 unidade na escala do último dígito disponível
- Dificuldade de leitura
  - Posicionamento objeto/instrumento ou estabilidade de leitura (digital)
    - **A incerteza instrumental pode ser definida maior do que a precisão do instrumento de medida.**

# Incertezas estatísticas

- Flutuação no resultado das medidas

- Representação do resultado de  $N$  medidas  $x_i$ : média ( $\bar{x}$ )

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

- Incerteza estatística do resultado das medidas: desvio padrão da média ( $\sigma_m$ )

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

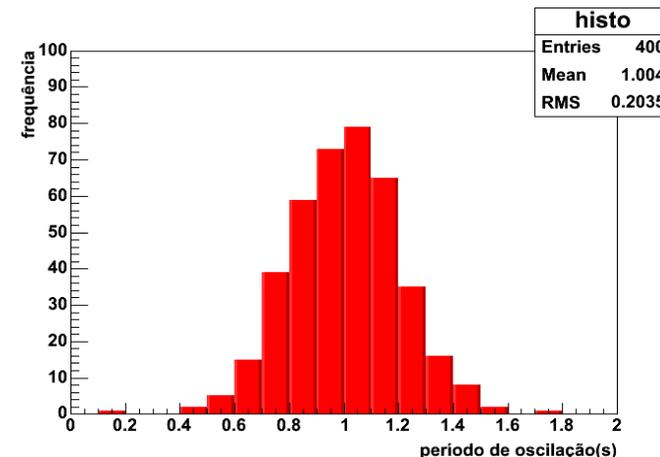
Sendo  $\sigma$  o desvio padrão:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}$$

Equações válidas para medidas realizadas nas mesmas condições e que possuem as mesmas incertezas (instrumental + aleatórias)

- Distribuição de dados:

- simétrica em torno de um certo valor:
  - Valor médio = valor mais provável
- decresce ao se afastar desse valor.



# Incertezas sistemáticas

- A medida é desviada em uma única direção:
  - Ex: uma régua onde o primeiro mm está faltando e o experimentador não percebe
    - Todas as medidas serão 1 mm maiores do que deveriam
  - Ex: uma balança descalibrada e/ou com o zero deslocado
- Esse tipo de incerteza, em geral, só é percebida quando um resultado difere do esperado
  - Devem ser corrigidas ou refeitas

# Qual é a incerteza total de uma medida?

- Incertezas resultantes do ato de medir:
  - Instrumental:  $\sigma_{inst}$
  - Estatística:  $\sigma_{estat}$
- Incerteza total da medida ( $\sigma$ ): combinação de todas as incertezas

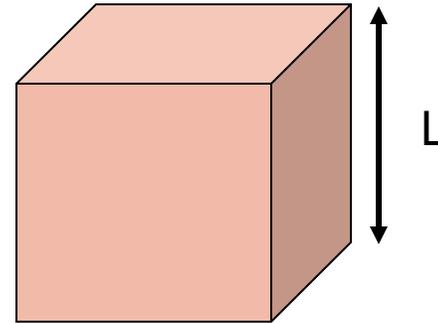
$$\sigma = \sqrt{\sigma_{inst}^2 + \sigma_{estat}^2}$$

- Caso um tipo de incerteza seja dominante, pode-se desprezar a outra:
  - Período do pêndulo medido com o relógio de pulso:  
Incerteza instrumental > estatística
  - Período do pêndulo medido com o cronômetro de 0,01s  
Incerteza estatística > instrumental

# Uma medida obtida de outra medida tem incerteza?

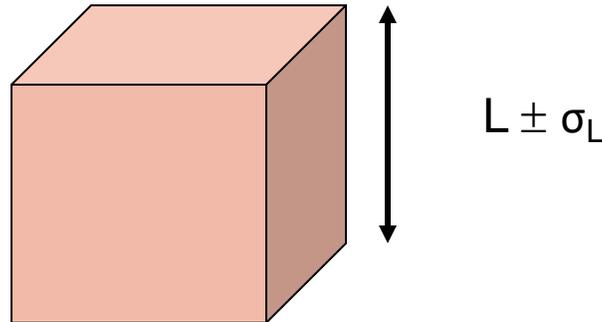
- Por exemplo, vamos determinar o volume de um cubo:

$$V = L^3$$



# Uma medida obtida de outra medida tem incerteza?

- Inicialmente medimos o tamanho de sua aresta  $L$  com uma régua (que tem incerteza).

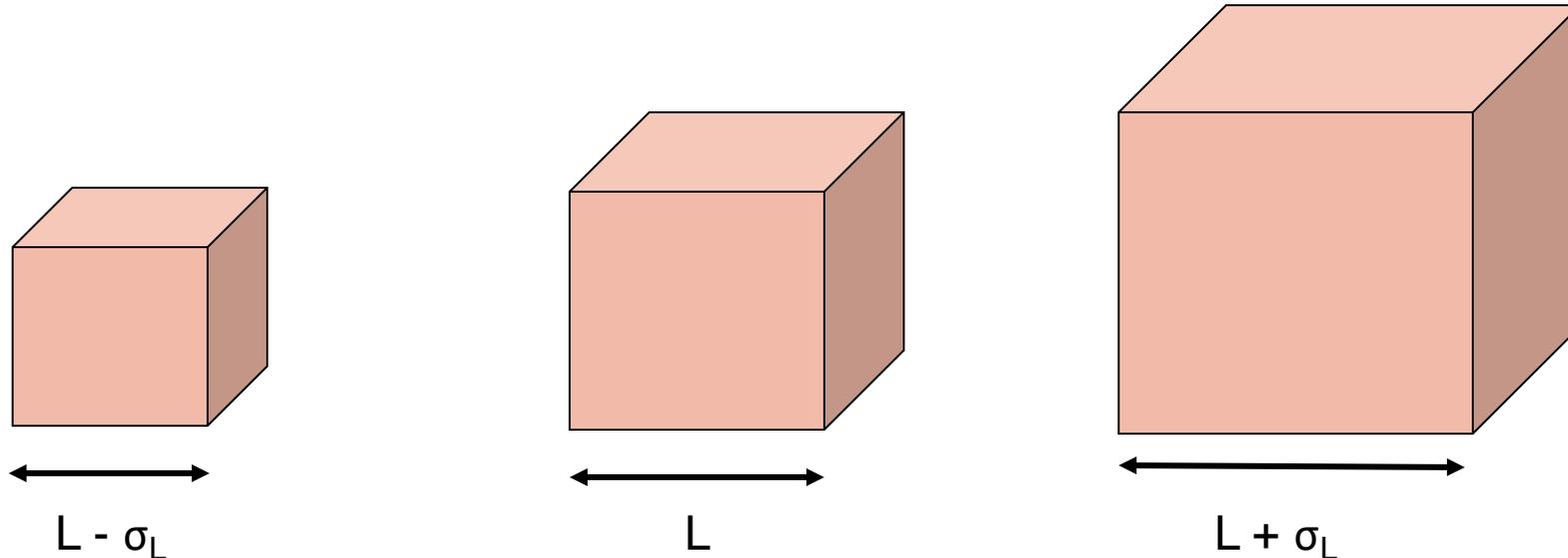


- Depois calculamos seu volume:  $V = L^3$

O volume do cubo tem uma incerteza?

# Uma medida obtida de outra medida tem incerteza?

- A incerteza de uma medida **se propaga** para as grandezas obtidas a partir do valor dessa medida.
- No caso do cubo:
  - A incerteza na medida da aresta ( $L$ ) se propaga para a medida do volume  $V$



# Como calcular essa incerteza?

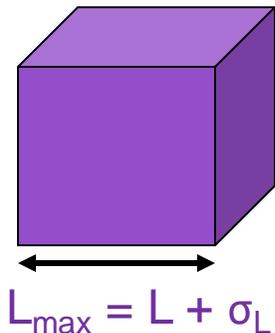
- No exemplo do cubo, temos:

$V = L^3$  onde:  $L \pm \sigma_L$  é a aresta do cubo medida com a régua e sua incerteza.

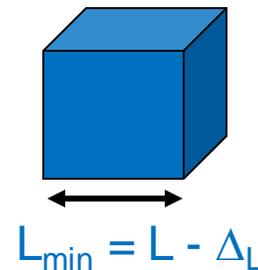
- A incerteza no volume do cubo ( $\sigma_V$ ) pode ser inicialmente obtida considerando os volumes máximo ( $V_{max}$ ) e mínimo ( $V_{min}$ ) possíveis:

$$\sigma_V = \frac{V_{max} - V_{min}}{2}$$

Sendo:



$$V_{max} = (L_{max})^3$$
$$V_{max} = (L + \sigma_L)^3$$



$$V_{min} = (L_{min})^3$$
$$V_{min} = (L - \sigma_L)^3$$

# Propagação de incerteza

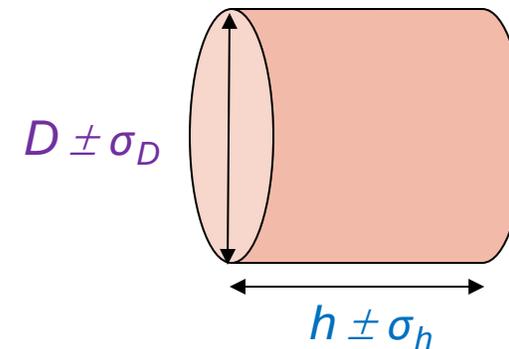
- E se uma grandeza depende de outras duas medidas, como por exemplo, na medida do volume de um cilindro? O que fazer?
- O volume ( $V$ ) de um cilindro é dado por:

$$V = \pi \left( \frac{D}{2} \right)^2 h$$

Onde:

$D$  é o diâmetro do cilindro  $\pm$  incerteza ( $\sigma_D$ )

$h$  é a altura do cilindro  $\pm$  incerteza ( $\sigma_h$ )



# Propagação de incerteza

- A incerteza final ( $\sigma_V$ ) no volume  $V$  do cilindro depende:
  - da incerteza no volume ( $\sigma_{V\sigma_D}$ ) devido à incerteza ( $\sigma_D$ ) no diâmetro do cilindro
  - da incerteza no volume ( $\sigma_{V\sigma_h}$ ) devido à incerteza ( $\sigma_h$ ) na altura do cilindro
- Assim:

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\sigma_{V\sigma_D}\right)^2 + \left(\sigma_{V\sigma_h}\right)^2}$$

Assumindo que a incerteza devido ao diâmetro ( $\sigma_{V\sigma_D}$ ) é independente da incerteza devido à altura ( $\sigma_{V\sigma_h}$ )

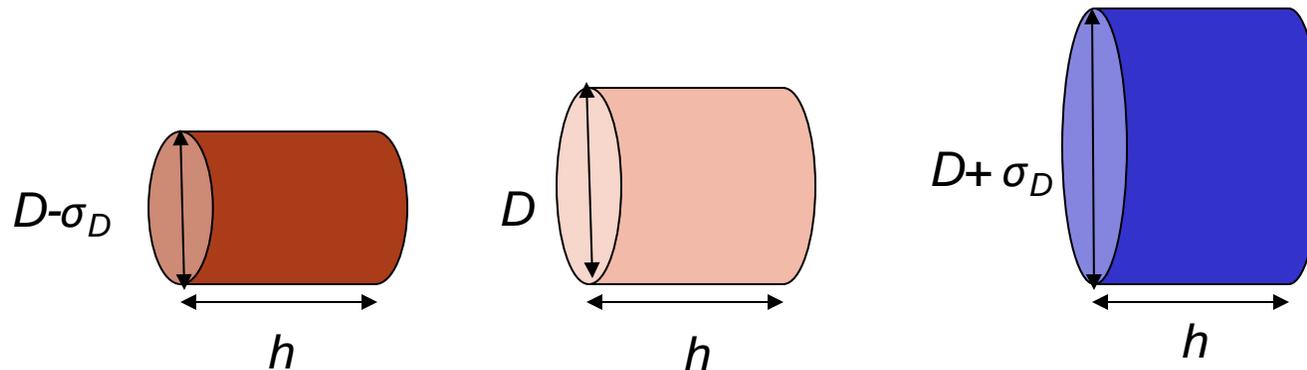
# Propagação de incerteza

- Calculando a incerteza no volume ( $\sigma_{V_{\sigma_D}}$ ) devido à incerteza ( $\sigma_D$ ) no diâmetro do cilindro:

$$\sigma_{V_{\sigma_D}} = \frac{V_{\text{máximo (devido a } \sigma_D)} - V_{\text{mínimo (devido a } \sigma_D)}}{2}$$

Com:

$$V_{\text{mínimo (devido a } \sigma_D)} = \pi \left( \frac{(D - \sigma_D)}{2} \right)^2 h \quad V_{\text{máximo (devido a } \sigma_D)} = \pi \left( \frac{(D + \sigma_D)}{2} \right)^2 h$$



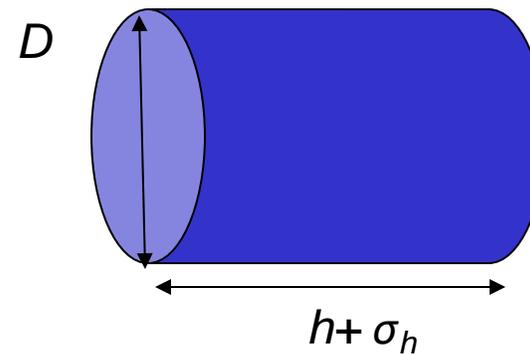
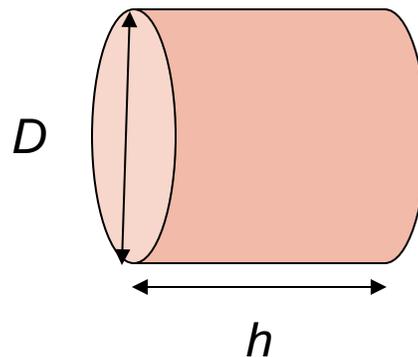
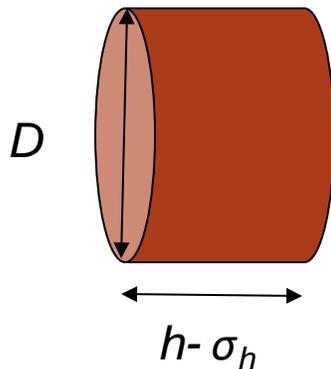
# Propagação de incerteza

- Calculando a incerteza no volume ( $\sigma_{V_{\sigma_h}}$ ) devido à incerteza ( $\sigma_h$ ) na altura do cilindro:

$$\sigma_{V_{\sigma_h}} = \frac{V_{\text{máximo (devido a } \sigma_h)} - V_{\text{mínimo (devido a } \sigma_h)}}{2}$$

Com:

$$V_{\text{mínimo (devido a } \Delta h)} = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 (h - \sigma_h) \quad V_{\text{máximo (devido a } \Delta h)} = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 (h + \sigma_h)$$



# Incerteza relativa

- Incerteza absoluta ( $\sigma_{abs}$ ): Valor apresentado no resultado

$$\text{Volume} = 27,4 \pm 0,5 \text{ cm}^3$$

- Incerteza relativa ( $\sigma_{rel}$ ): Porcentagem da incerteza sobre o valor principal

$$\sigma_{rel} = \frac{\sigma_{abs}}{\text{valor principal}} = \frac{0,5}{27,4} = 0,018 \text{ ou } 1,8\%$$

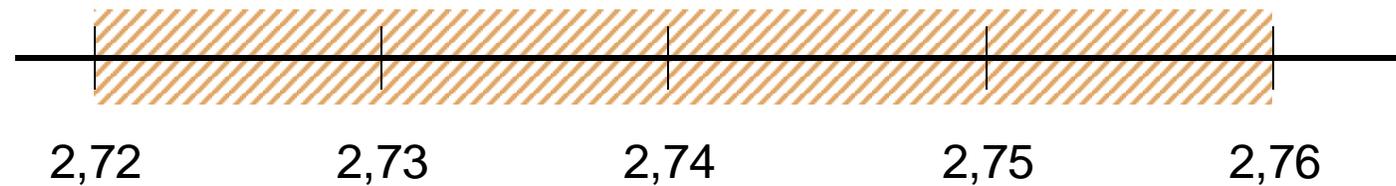
- Assim, se o valor da incerteza representa 5% do valor medido:

$$\sigma_{abs} = \text{valor principal} \times 0,05$$

$$\sigma_{abs} = 27,4 \times 0,05 = 1,4$$

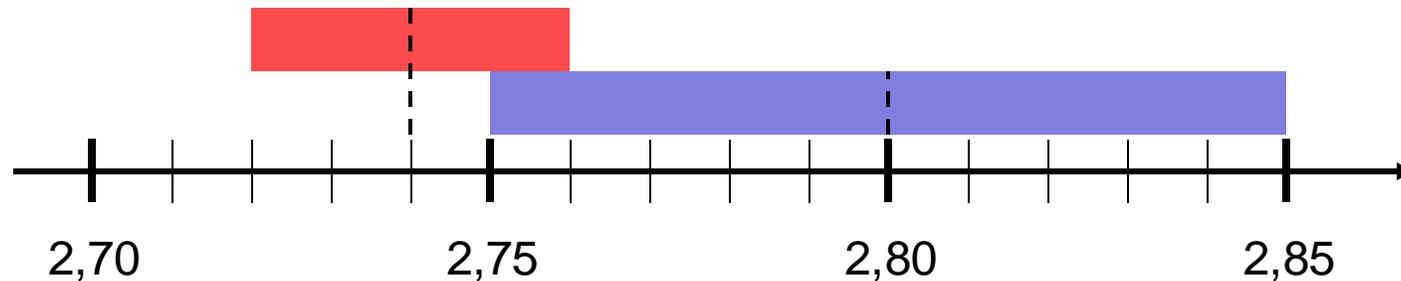
# Como interpretar o significado da incerteza?

- O que significa dizer que minha medida, é  $2,74 \pm 0,02$  mm?
  - Eu tenho confiança que o valor verdadeiro da grandeza medida está entre  $(2,74 - 0,02)$  e  $(2,74 + 0,02)$



# Como comparar os resultados de duas medidas?

- É preciso sempre se levar em consideração a incerteza da medida.
  - Por isso perguntamos se as medidas são **compatíveis** ao invés de “iguais”
  - Exemplo:  $2,74 \pm 0,02$  mm é compatível com  $2,80 \pm 0,05$  mm ?



# Exercícios em aula

- Um aluno calculou o valor do volume do cilindro obtendo o seguinte valor:

$$V = 6,3302 \text{ cm}^3$$

- Sabendo que a incerteza relativa é de 5%, qual é o valor da incerteza do volume ?

# Exercícios em aula

- Um aluno calculou o valor do volume do cilindro obtendo o seguinte valor:

$$V = 6,3302 \text{ cm}^3$$

- Sabendo que a incerteza relativa é de 5%, qual é o valor da incerteza do volume ?

$$\sigma_V = 6,3302 \times 0,05 = 0,3 \text{ cm}^3$$

# Exercícios em aula

- Verifique a compatibilidade dos conjuntos de valores apresentados abaixo testando a superposição dos intervalos representados pelas medidas.

	Aluno 1	Aluno 2	Compatível?
Medida	$1,20 \pm 0.01$	$1,23 \pm 0.01$	

	Aluno 1	Aluno 2	Compatível?
Medida	$1.20 \pm 0.09$	$1.24 \pm 0.04$	

# Exercícios em aula

- Verifique a compatibilidade dos conjuntos de valores apresentados abaixo testando a superposição dos intervalos representados pelas medidas.

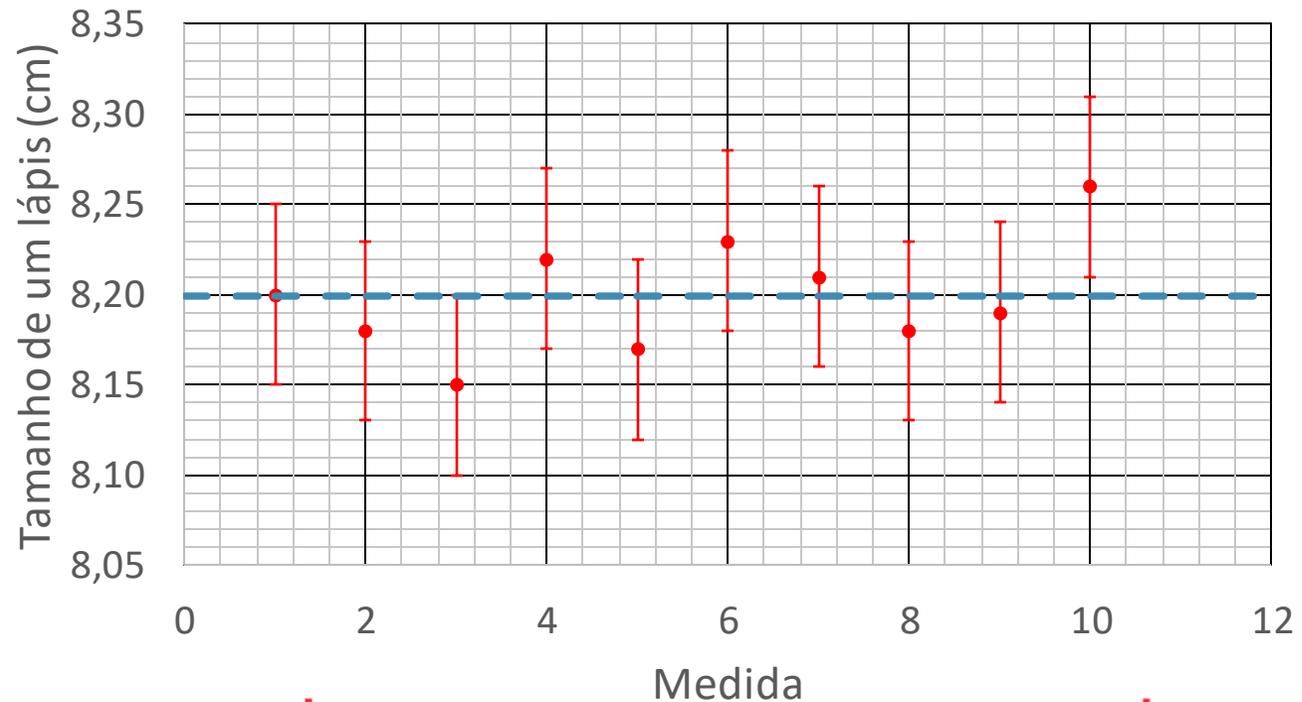
	Aluno 1	Aluno 2	Compatível?
Medida	$1,20 \pm 0.01$	$1,23 \pm 0.01$	Não

	Aluno 1	Aluno 2	Compatível?
Medida	$1.20 \pm 0.09$	$1.24 \pm 0.04$	Sim

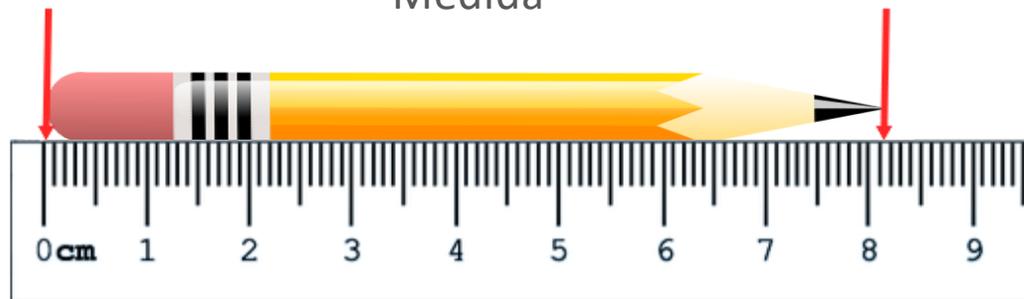
# Representando valores: gráfico

- Vamos considerar as seguintes medidas:

Medida	Tamanho de um lápis (cm)
1	$8,20 \pm 0,05$
2	$8,18 \pm 0,05$
3	$8,15 \pm 0,05$
4	$8,22 \pm 0,05$
5	$8,17 \pm 0,05$
6	$8,23 \pm 0,05$
7	$8,21 \pm 0,05$
8	$8,18 \pm 0,05$
9	$8,19 \pm 0,05$
10	$8,26 \pm 0,05$



Tamanho lápis:  $8,20 \pm 0,01$  cm



*Atividade prática*

# Medida da Densidade de Sólidos

- Objetivo

- Identificar os diferentes tipos de plásticos que compõem um conjunto de objetos

- Identificação

- Comparação das medidas de densidade (+incertezas) com valores tabelados de diferentes tipos de plásticos

# Densidade

- A densidade ( $d$ ) de materiais sólidos homogêneos é dada por:

$$d = \frac{m}{V}$$

Onde:

$m$  é a massa do cilindro  $\pm$  incerteza ( $\sigma_m$ )

$V$  é o volume do cilindro  $\pm$  incerteza ( $\sigma_V$ )

Necessário medir a massa e o volume do objeto !

# Cálculo da incerteza da densidade

- Apesar das incertezas da massa e do volume serem independentes, vamos utilizar a seguinte aproximação:
  - Propagação simultânea dos valores das incertezas do volume e da massa:

$$\sigma_d = \frac{d_+ - d_-}{2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{(m + \sigma_m)}{(V - \sigma_v)} - \frac{(m - \sigma_m)}{(V + \sigma_v)} \right]$$

# Volume e incerteza do cilindro

- O volume ( $V$ ) de um cilindro é dado por:

$$V = \pi \left( \frac{D}{2} \right)^2 h$$

$D$  é o diâmetro do cilindro  $\pm$  incerteza ( $\sigma_D$ )  
 $h$  é a altura do cilindro  $\pm$  incerteza ( $\sigma_h$ )

- Cálculo da incerteza ( $\sigma_V$ ):
  - Apesar das incertezas do diâmetro e da altura serem independentes, vamos utilizar a seguinte aproximação:
    - Propagação simultânea dos valores das incertezas do diâmetro e da altura:

$$\sigma_V = \frac{(V_+ - V_-)}{2} = \frac{\pi}{4} \left( \frac{(D + \sigma_D)^2 (h + \sigma_h) - (D - \sigma_D)^2 (h - \sigma_h)}{2} \right)$$

# Procedimento Experimental 1

- Medidas dos cilindros da caixa:
  - Grupos de 3: dois alunos medem 2 peças e 1 aluno mede 1 peça
  - Grupos de 2: um aluno mede 3 peças e o outro mede 2 peças

ANOTAR NÚMERO DA CAIXA (VAI SER USADA NA PRÓXIMA AULA)!

NÃO MISTUREM CILINDROS DE CAIXAS DIFERENTES!

- Medir as dimensões necessárias para **determinar o volume + incerteza das peças.**
- Medir a massa usando a balança digital da sala de aula

# Análise dos dados 1

- Calcular:
  - o volume + incerteza de cada peça
  - densidade + incerteza de cada peça
- Colocar os valores das medidas de massa, diâmetro e altura no guia e na planilha online:
  - link da planilha:  
[https://drive.google.com/drive/folders/1KJwxSm-eWm0AoQBpjGQO2BpfPpwsc0Ng?usp=share\\_link](https://drive.google.com/drive/folders/1KJwxSm-eWm0AoQBpjGQO2BpfPpwsc0Ng?usp=share_link)

# Conclusão Parcial

- É possível determinar quantos tipos de plástico nas peças da turma?

# Determinação dos tipos de plásticos

- Como seria possível saber quantos tipos de plástico nas peças da turma?

# Determinação dos tipos de plásticos

- Como seria possível saber quantos tipos de plástico nas peças da turma?

Melhorando a precisão do experimento, ou seja, diminuindo as incertezas nas densidades.

# Procedimento Experimental 2

- Melhorar a medida de massa das peças
  - Medir novamente todas as peças, mas desta vez usando uma balança analítica (disponível na sala dos técnicos)
  - Anotar os valores no guia e na planilha online

## Análise de dados 2

- Calcular novamente a densidade do objeto estudado e sua incerteza com as novas medidas
- Comparar os valores novos com os antigos. É possível dizer quantos tipos de plástico existem na turma?

# Para a próxima aula (14/04):

- Entrega do Guia 2.1 (um por grupo)
- No moodle (aba Experimento # 2- Densidade de sólidos):
  - Exercício individual (até dia 14/04).
- Texto: Instrumentos de Medidas (aba Material Didático / arquivos 2023)
- Lembrando: dia 07/04/23 não haverá aula (Semana Santa)
- Pra quem ainda não fez o Guia 1.2:
  - Entrega do guia 1.2
  - Exercício individual (até dia 07/04).