

# Introdução às Medidas em Física (4300152)

Aula 02 (24/03/2022)

Paula R. P. Allegro

[paula.allegro@usp.br](mailto:paula.allegro@usp.br)


# Na aula de hoje:

- Resumo dos principais pontos da aula anterior
- Conceitos:
  - Noções de estatística:
    - Introdução a erros aleatórios ou estatísticos
    - Média e desvio padrão
  - Introdução a histogramas:
    - Ocorrências
    - Frequências
    - Densidade de probabilidade
- Experiência 1.2: Medidas de Tempo e o Pêndulo Simples
  - Realizar medidas de tempo e adquirir noções sobre ordem de grandeza em medidas de tempo
  - Estudo do período de oscilação de um pêndulo

# Referências para a aula de hoje:

- Apostila do curso (página principal do moodle):
  - Capítulo 4: Interpretação Gráfica de Dados
  - Experiência I (Aulas 01 e 02) Calibração de Medidas e Pêndulo Simples.
- Texto: Conceitos Básicos da Teoria de Erros (aba Material Didático / arquivos 2022)
  - Capítulo 1: Expressão de Medições Experimentais

# Da aula anterior:

- Medidas:
  - Definição: quantificar uma grandeza com relação a algum padrão tomado como unidade.
  - Medidas repetidas por:
    - Diferentes experimentadores
    - Diferentes instrumentos resultados diferentes
- Supondo que existe um valor verdadeiro associado à grandeza que está sendo medida, nunca iremos obter o valor verdadeiro em nossas medições devido:
  - características da própria grandeza sendo medida
  - limitações intrínsecas e inevitáveis dos nossos instrumentos e técnicas de medida
- A possibilidade de haver erros é que dá origem à **incerteza** de uma medida.

# Da aula anterior:

- Representação dos resultados de cada medida:

valor medido  $\pm$  incerteza (estimativa do erro)

- Representação de conjuntos de medidas: Tabelas

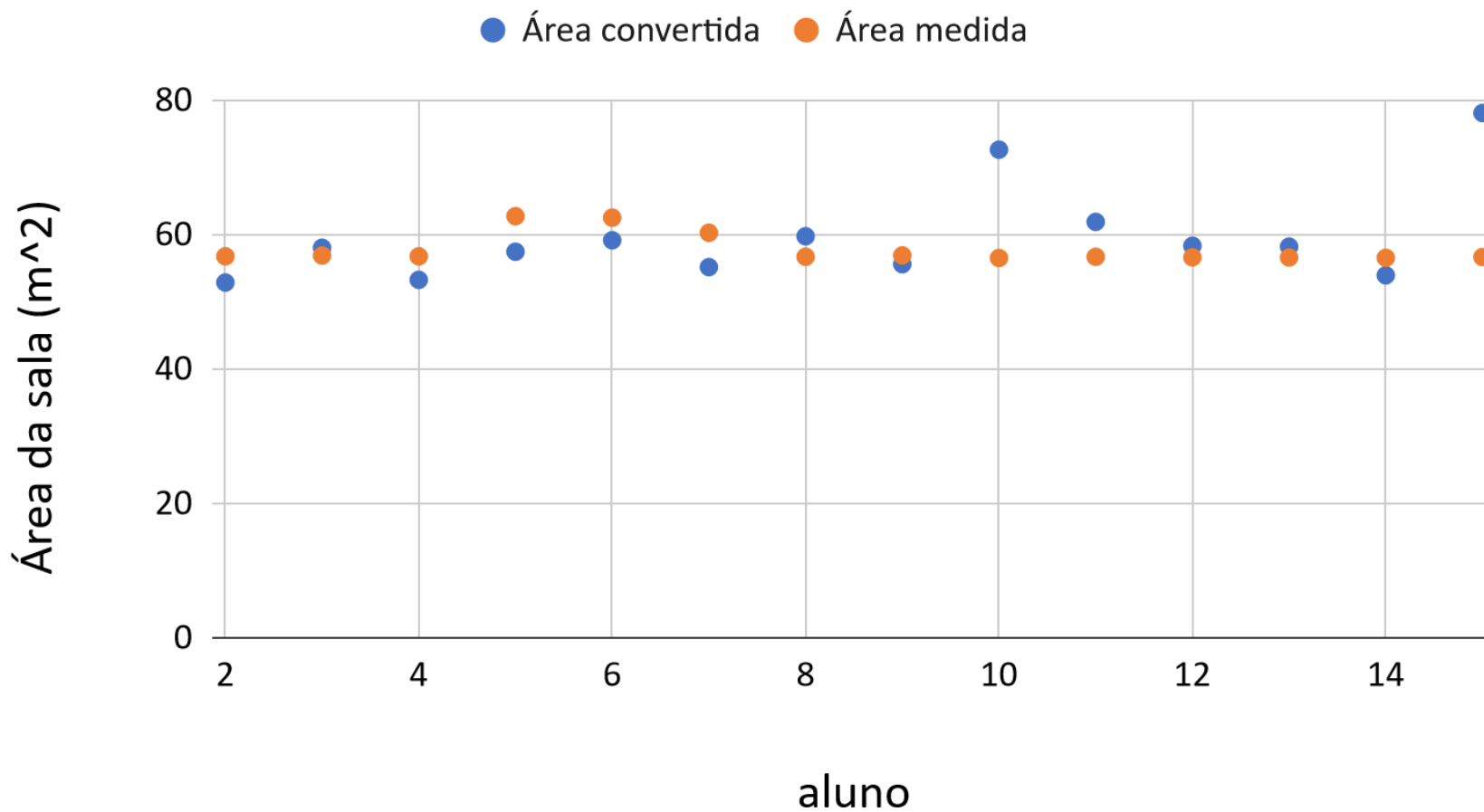
- Identificação
- Legenda
- Cabeçalho
- Unidades
- Medidas
- Incertezas

**Tabela 1.1:** Alguns valores experimentais para a constante de gravitação ao longo dos anos.

ano	$G \pm \sigma$ ( $10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$ )
1798	$6,75 \pm 0,05$
1930	$6,670 \pm 0,005$
1988	$6,67259 \pm 0,00085$

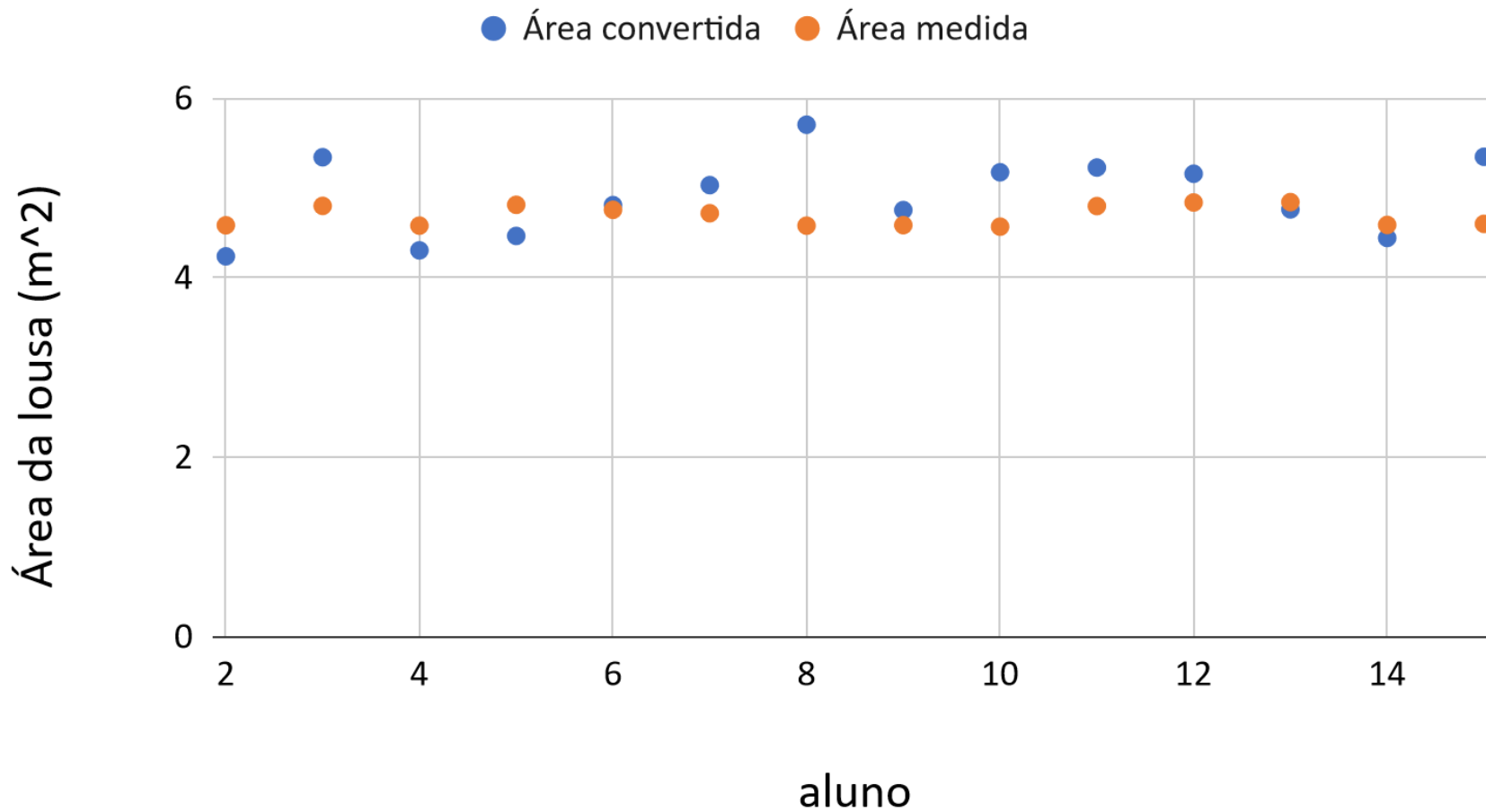
# Dados aula passada

Área da sala



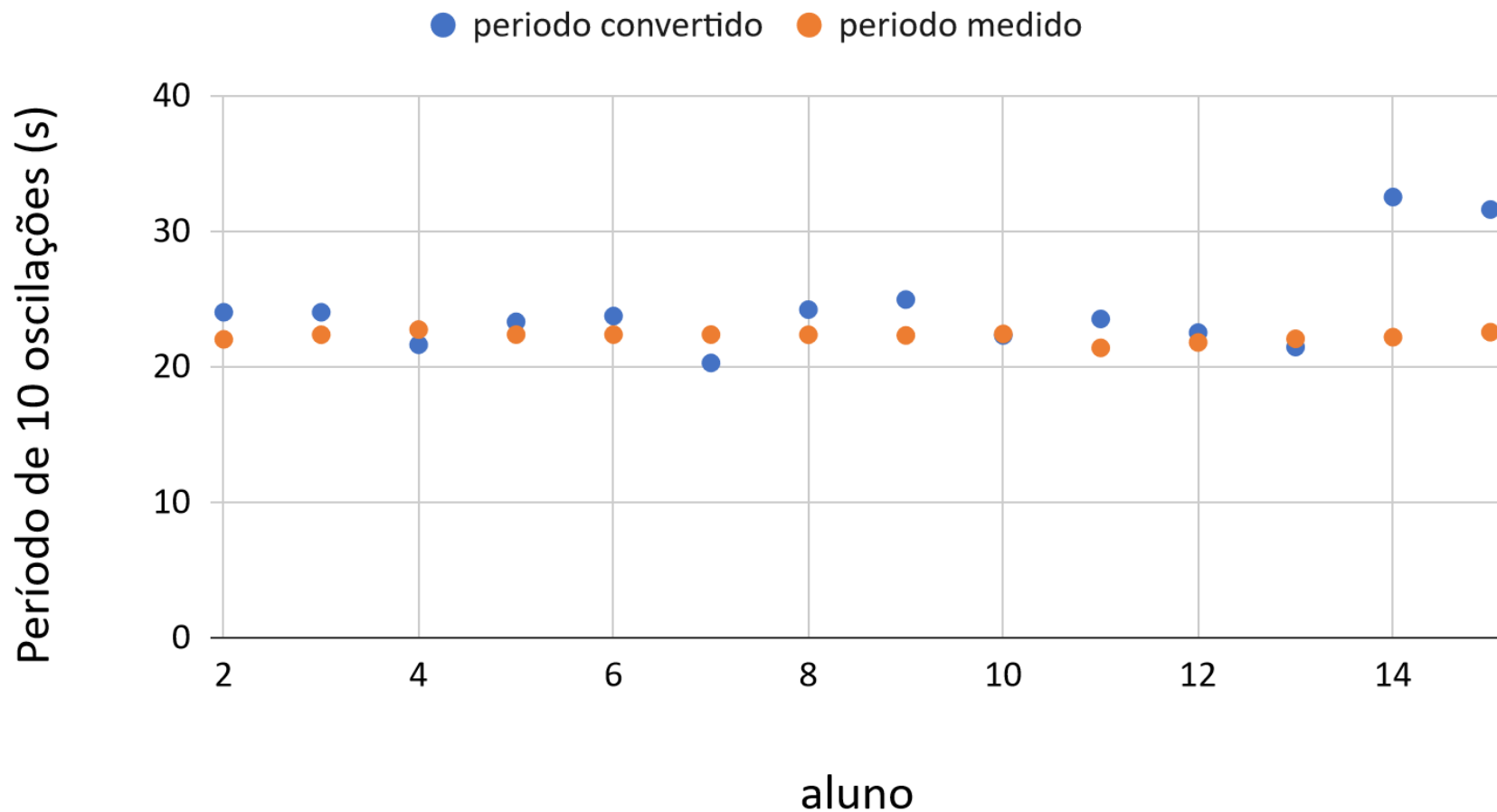
# Dados aula passada

Área da lousa



# Dados aula passada

Período de 10 oscilações





# Aula de hoje: conceitos sobre medidas

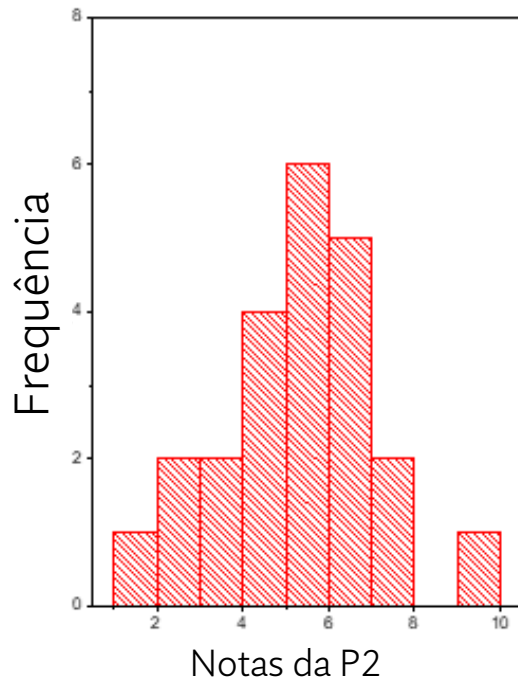
- Resultados experimentais estão sempre sujeitos a **erros**:
  - Erros podem ou não ser conhecidos e podem ter diversas origens:
    - Erros conhecidos : incerteza instrumental
- São classificados de acordo com o **efeito** das fontes de erro em uma medida:
  - **Erros sistemáticos**: **afetam igualmente** todos os dados medidos, **independe** de quantos dados tenham sido tomados.
    - Exemplo: incerteza instrumental
  - **Erros aleatórios**: **afetam de maneira diferente** cada um dos dados medidos, causando variações dos valores obtidos em medições repetidas
    - podem ser reduzido aumentando-se o número de dados
    - são obtidos por métodos estatísticos, por isso são também conhecidos como **erros estatísticos**

# Erros aleatórios

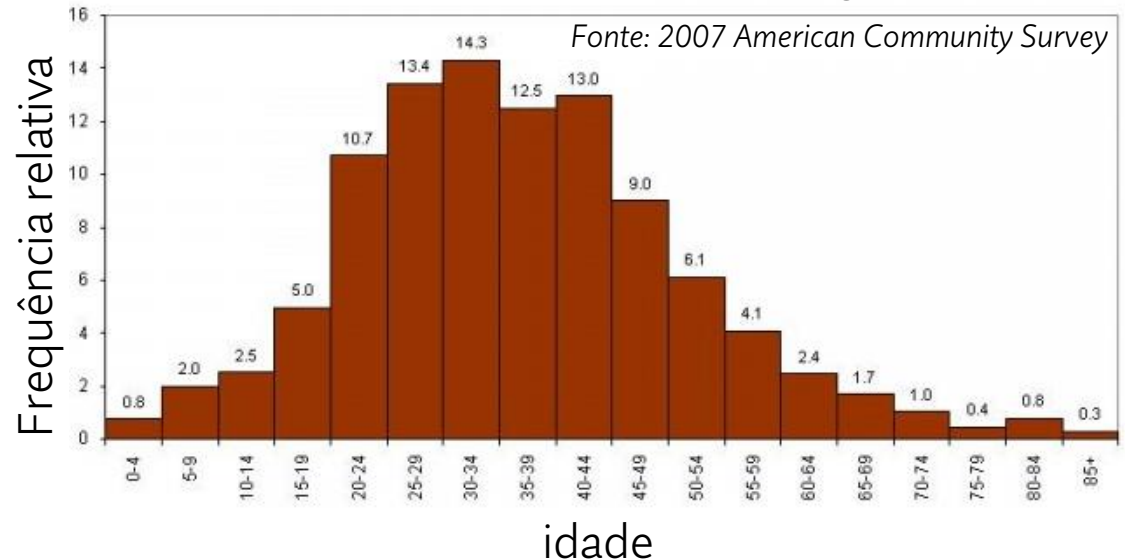
- Há uma distribuição de valores medidos, concentrados em um intervalo de valores
- Há várias distribuições possíveis de valores medidos
- Grandezas físicas sujeitas a erros aleatórios costumam se distribuir de forma simétrica próxima a uma gaussiana (distribuição normal ou de Gauss)

# Representação de conjuntos de medidas: Histogramas

- Tipo de gráfico onde é possível visualizar como as medidas se distribuem:



Distribuição Etária da População Brasileira Imigrante (%)-2007

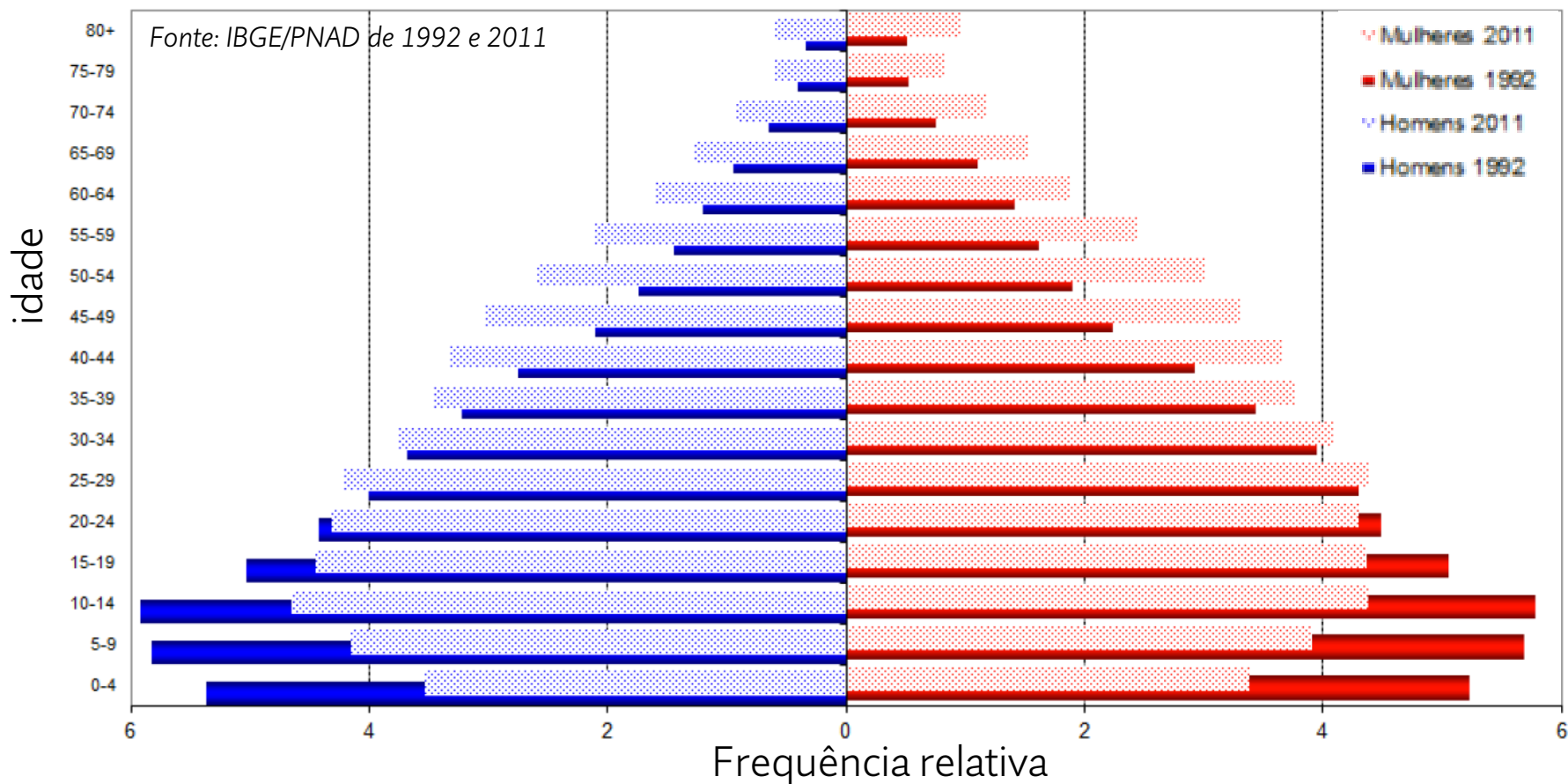


Eixo x (abscissa): mostra intervalos de medidas, também chamados de “canais” ou “bins”

Eixo y (ordenadas): mostra o número de ocorrências (frequência) ou a frequência relativa (número de ocorrências pelo número total de dados N).

# Representação de conjuntos de medidas: Histogramas

Distribuição Etária da População do Brasil, 1992 e 2011

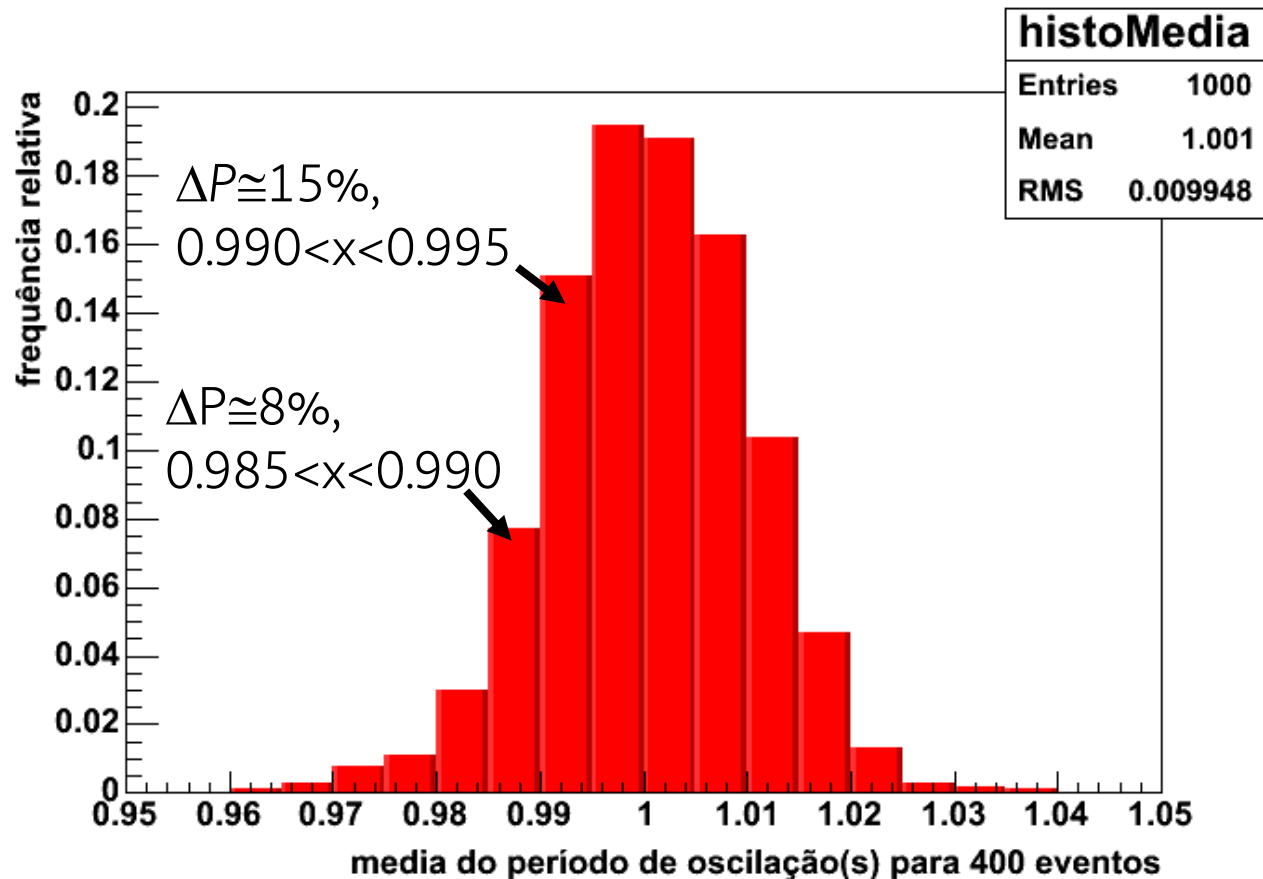


Eixo x (abscissa): mostra a frequência relativa

Eixo y (ordenadas): mostra intervalos de medidas

# Representação de conjuntos de medidas: Histogramas

- Podemos dizer que cada canal representa a probabilidade de se fazer uma medida entre o limite inferior e o limite superior do valor de uma medida representada no intervalo do canal



# Como fazer um Histograma

- 1ª etapa : decidir a escala e a largura do canal do histograma
  - mínimo : 2 s
  - máximo: 7 s
  - largura do canal: 1 s
- 2ª etapa : calcular a frequência com que os dados aparecem em cada intervalo

[2,3[ → 1

[3,4[ → 0

[4,5[ → 2

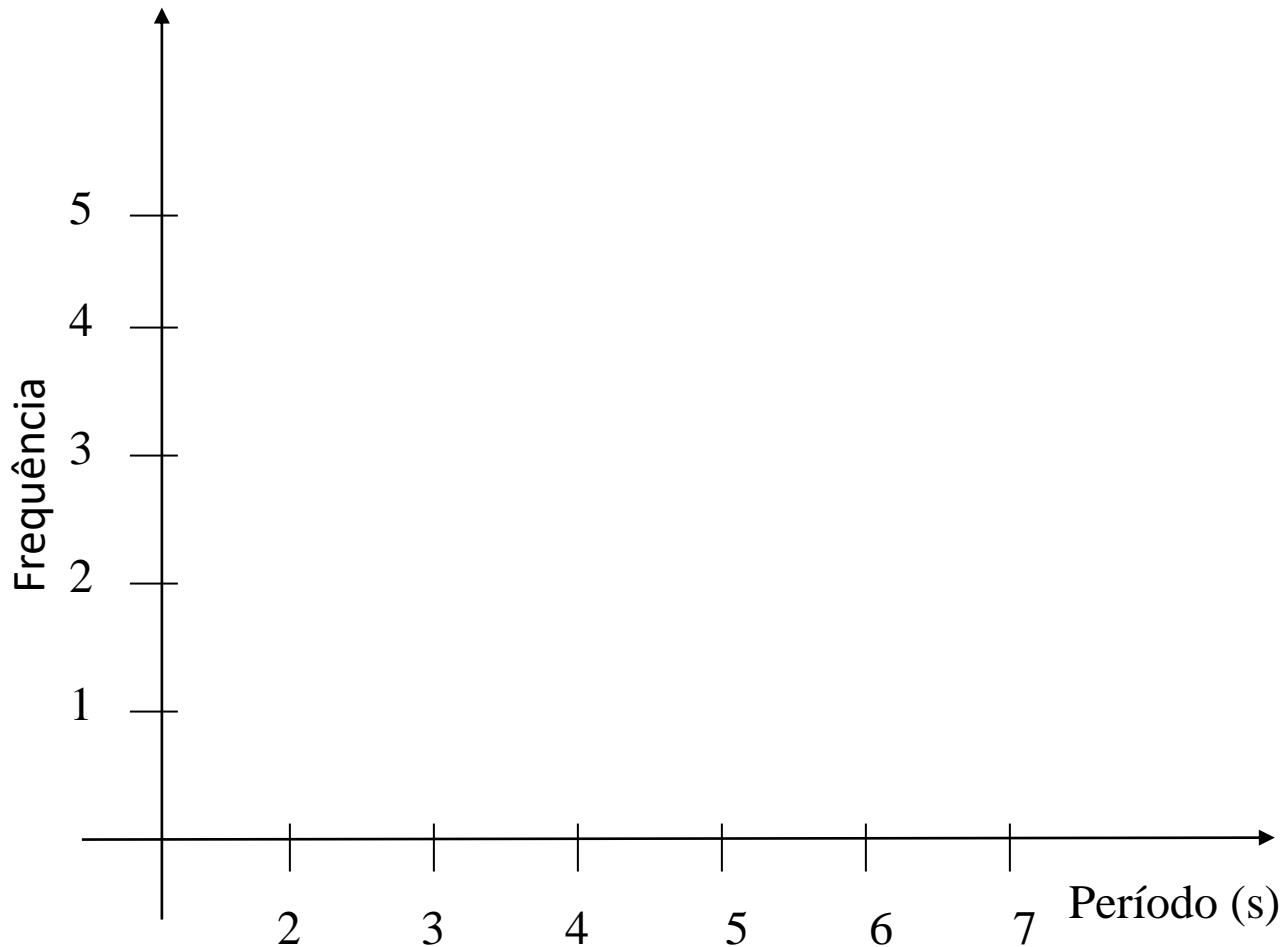
[5,6[ → 4

[6,7[ → 1

medida	período (s)
1	2,4
2	5,3
3	5,8
4	6,1
5	5,5
6	4,7
7	4,1
8	5,2

# Como fazer um Histograma

- 3ª etapa : preencher o histograma



medida	período (s)
1	2,4
2	5,3
3	5,8
4	6,1
5	5,5
6	4,7
7	4,1
8	5,2

frequência

[2,3[ → 1

[3,4[ → 0

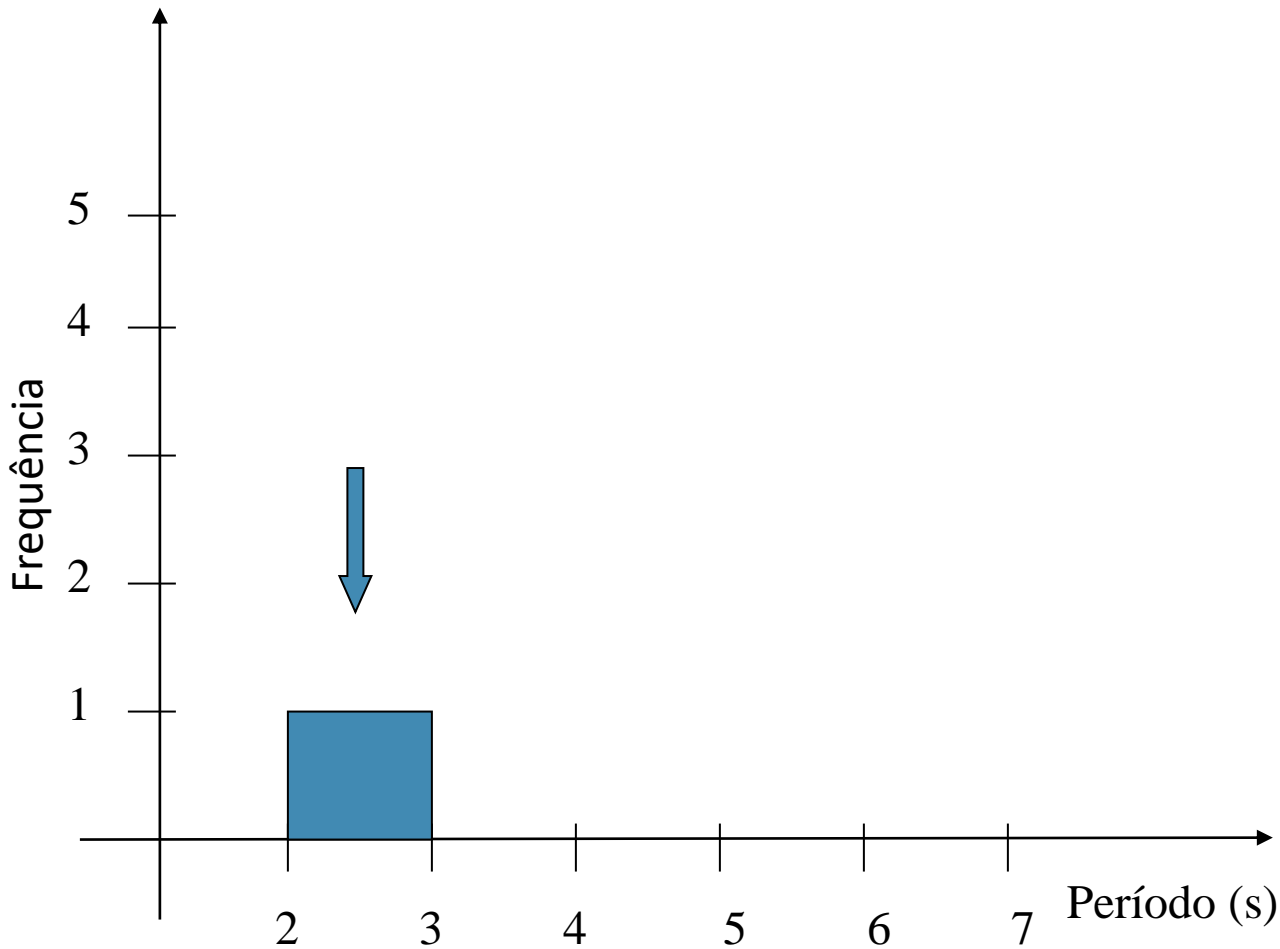
[4,5[ → 2

[5,6[ → 4

[6,7[ → 1

# Como fazer um Histograma

- 3ª etapa : preencher o histograma



medida	período (s)
1	2,4
2	5,3
3	5,8
4	6,1
5	5,5
6	4,7
7	4,1
8	5,2

frequência

[2,3[ → 1

[3,4[ → 0

[4,5[ → 2

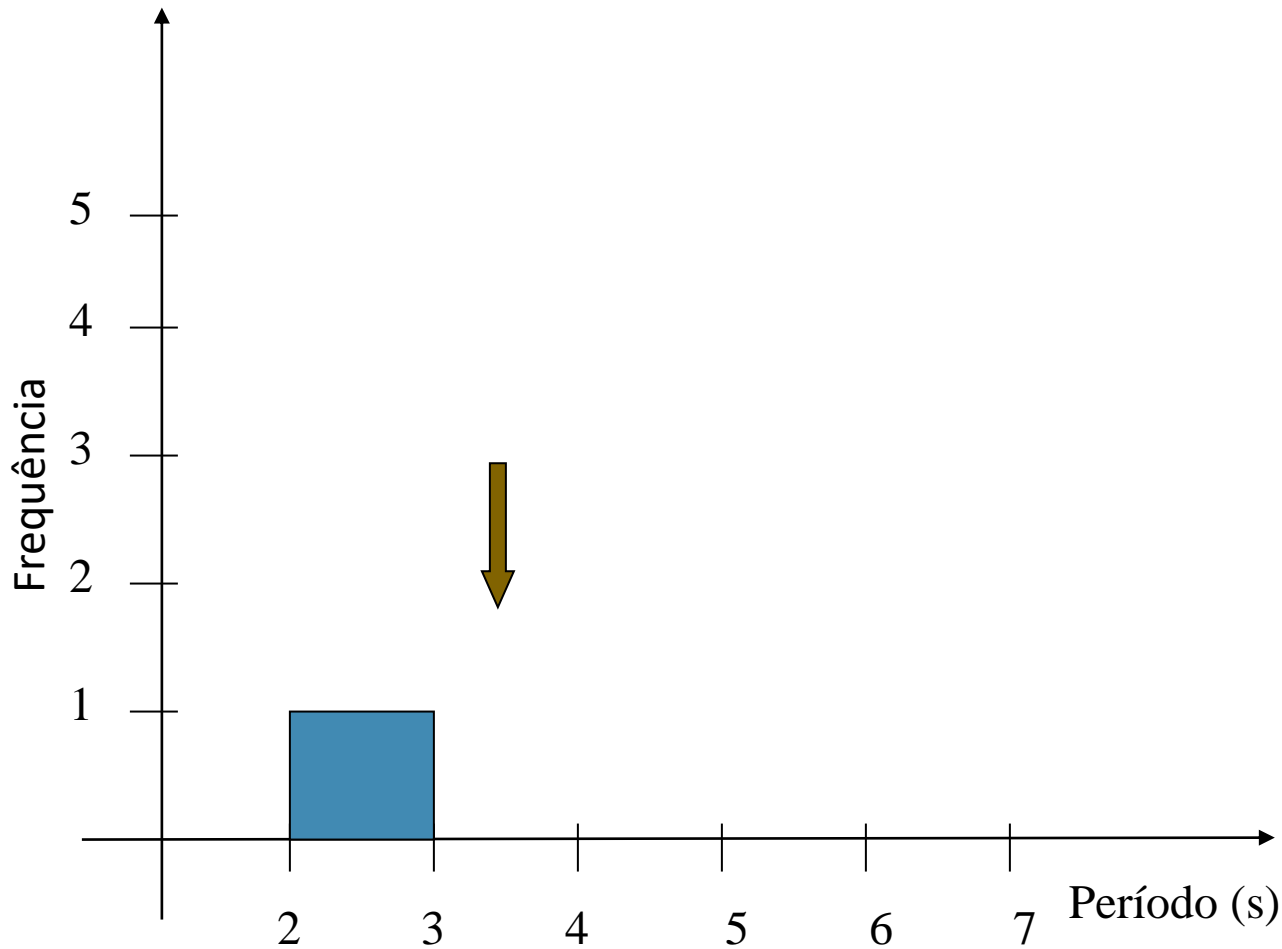
[5,6[ → 4

[6,7[ → 1



# Como fazer um Histograma

- 3ª etapa : preencher o histograma



medida	período (s)
1	2,4
2	5,3
3	5,8
4	6,1
5	5,5
6	4,7
7	4,1
8	5,2

frequência

[2,3[ → 1

[3,4[ → 0

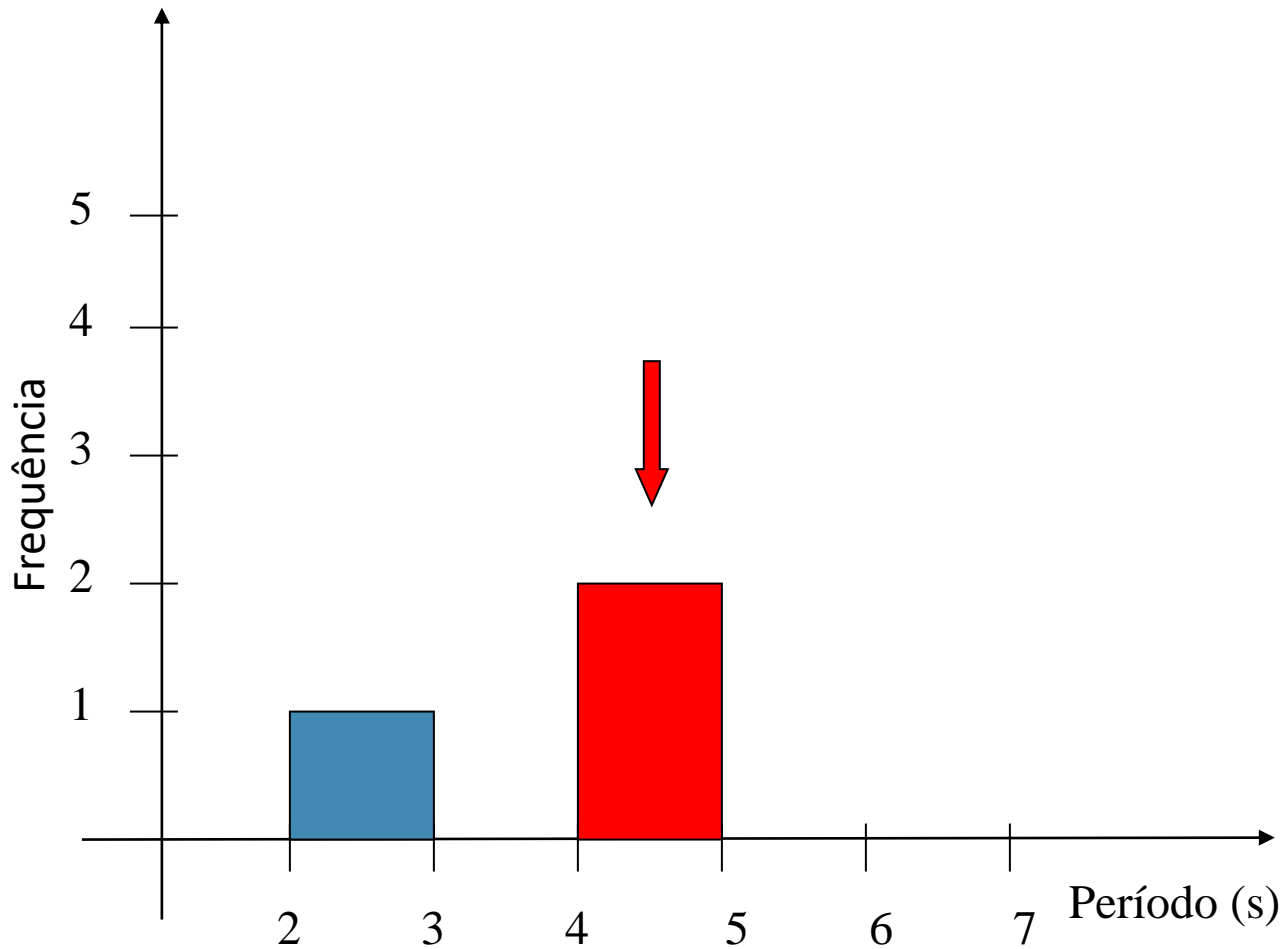
[4,5[ → 2

[5,6[ → 4

[6,7[ → 1

# Como fazer um Histograma

- 3ª etapa : preencher o histograma



medida	período (s)
1	2,4
2	5,3
3	5,8
4	6,1
5	5,5
6	4,7
7	4,1
8	5,2

frequência

[2,3[ → 1

[3,4[ → 0

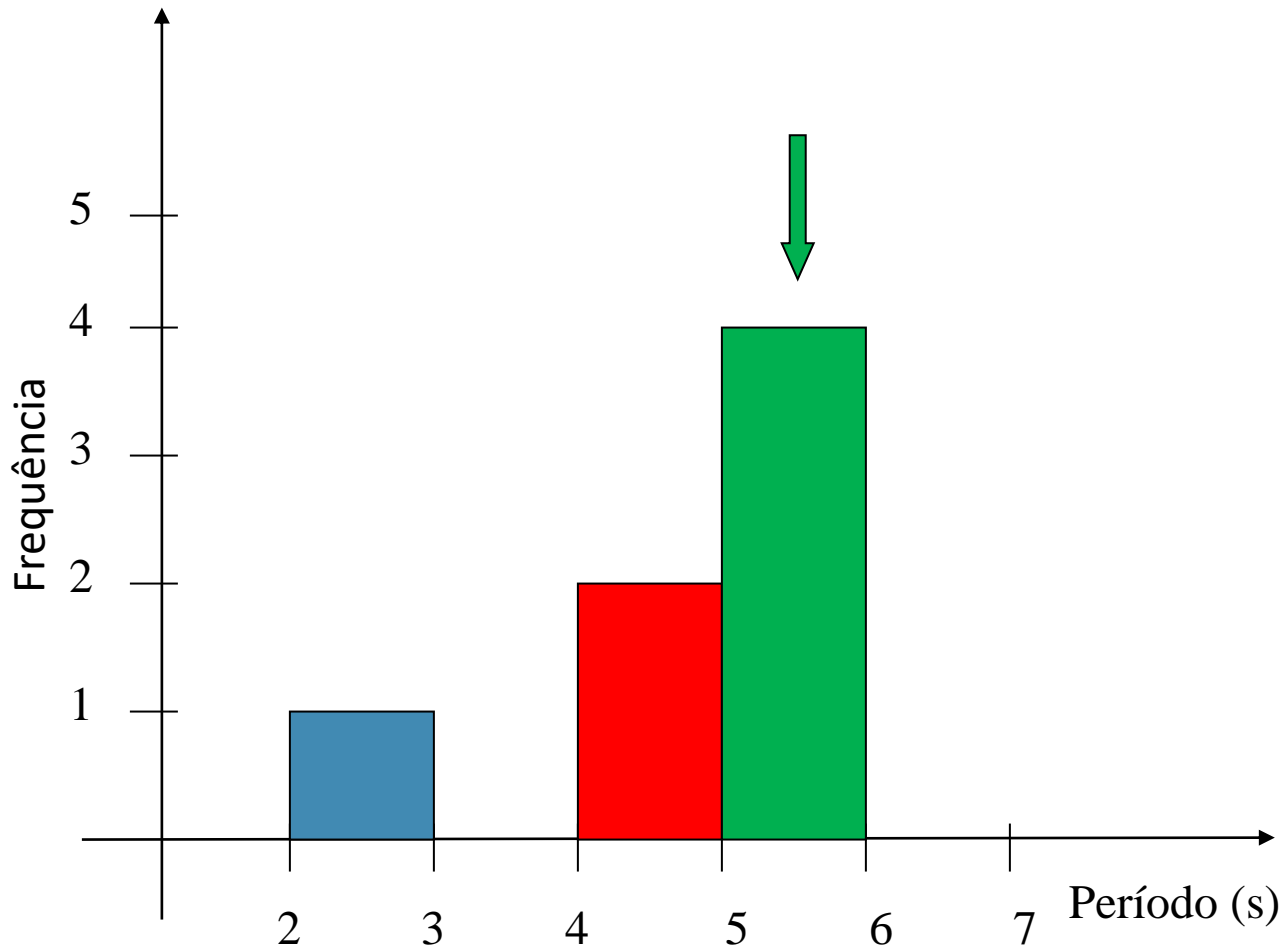
[4,5[ → 2

[5,6[ → 4

[6,7[ → 1

# Como fazer um Histograma

- 3ª etapa : preencher o histograma



medida	período (s)
1	2,4
2	5,3
3	5,8
4	6,1
5	5,5
6	4,7
7	4,1
8	5,2

frequência

[2,3[ → 1

[3,4[ → 0

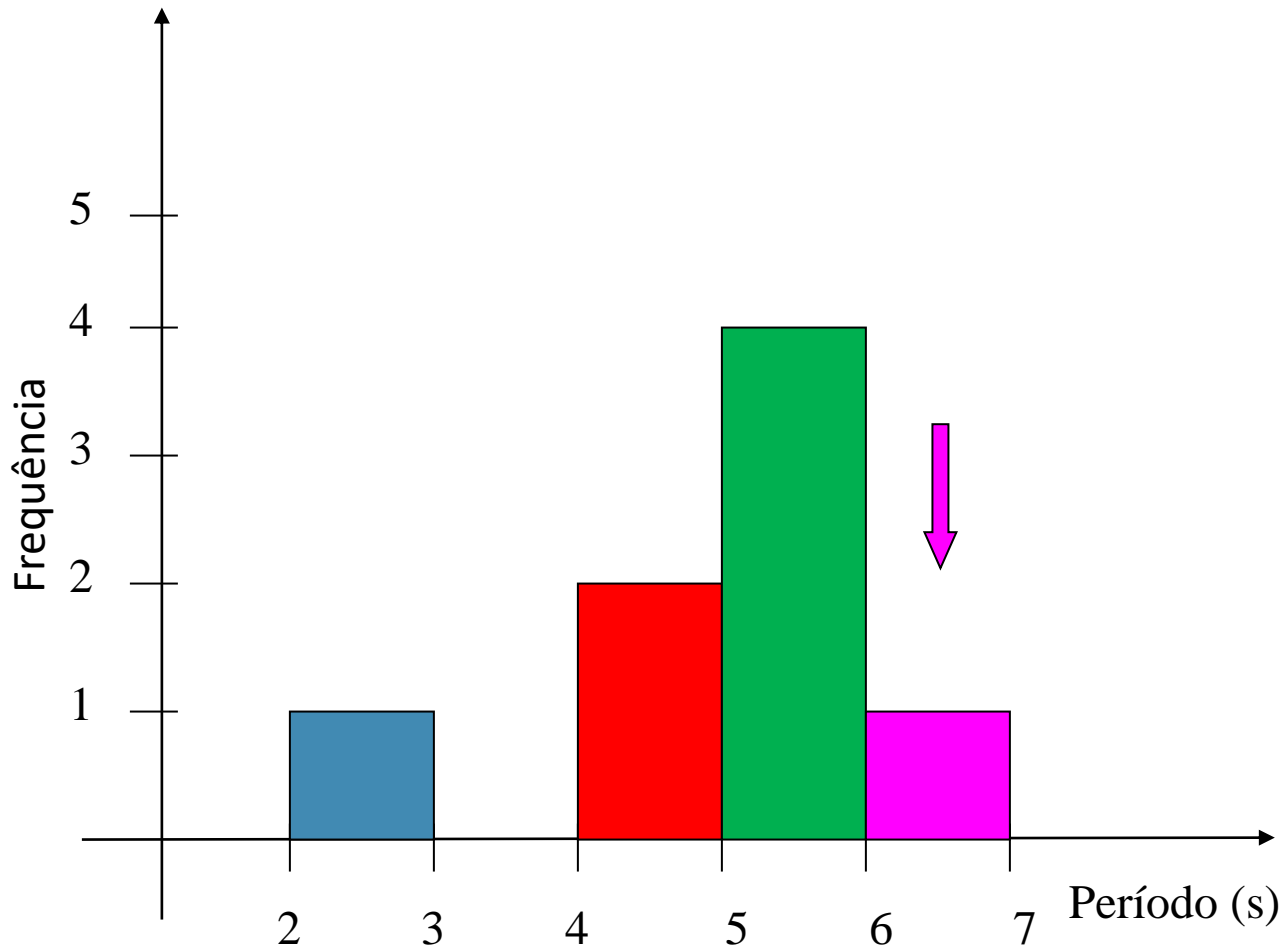
[4,5[ → 2

[5,6[ → 4

[6,7[ → 1

# Como fazer um Histograma

- 3ª etapa : preencher o histograma



medida	período (s)
1	2,4
2	5,3
3	5,8
4	6,1
5	5,5
6	4,7
7	4,1
8	5,2

frequência

[2,3[ → 1

[3,4[ → 0

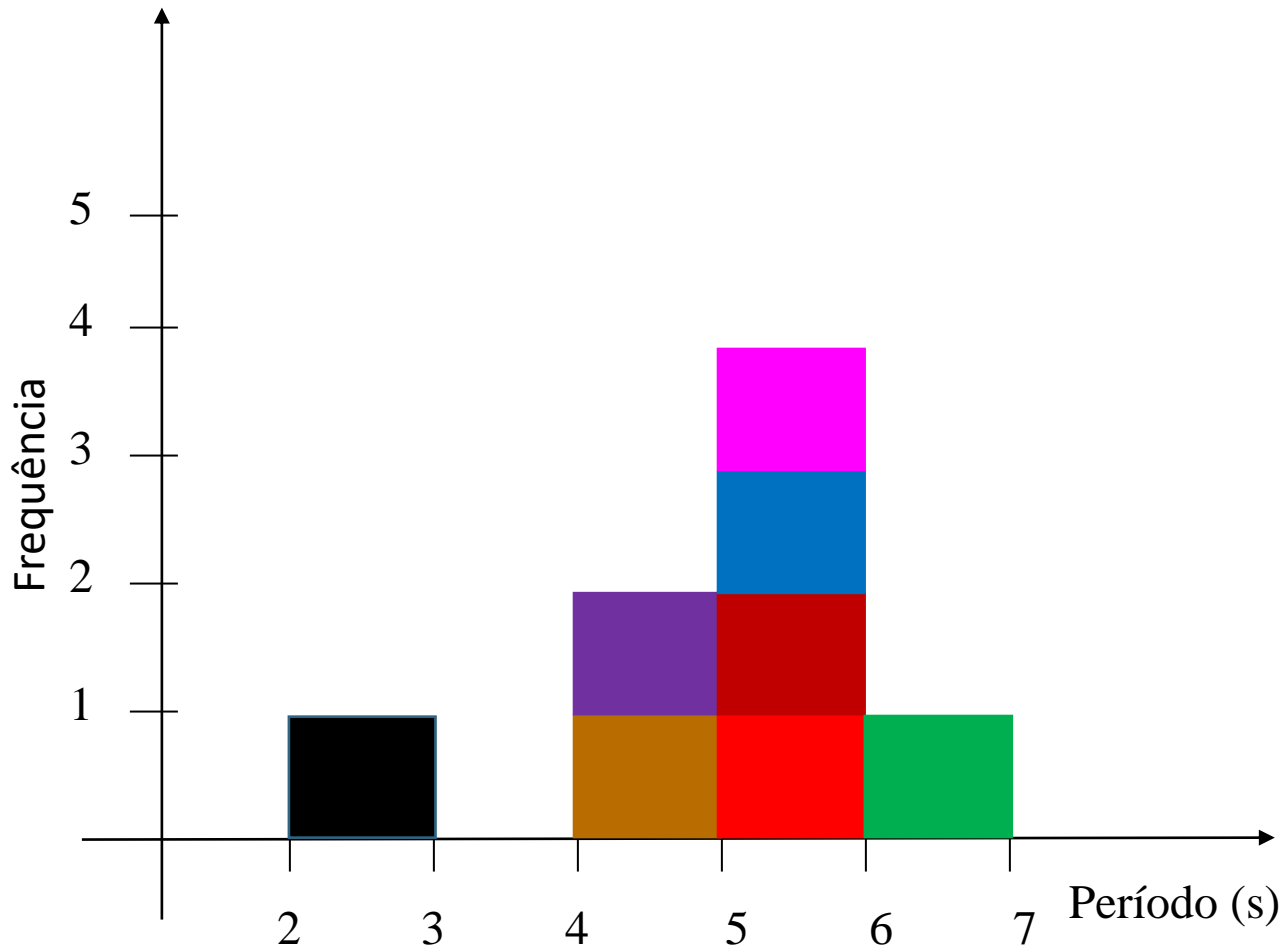
[4,5[ → 2

[5,6[ → 4

[6,7[ → 1

# Como fazer um Histograma

- 3ª etapa : preencher o histograma



medida	período (s)
1	2,4
2	5,3
3	5,8
4	6,1
5	5,5
6	4,7
7	4,1
8	5,2

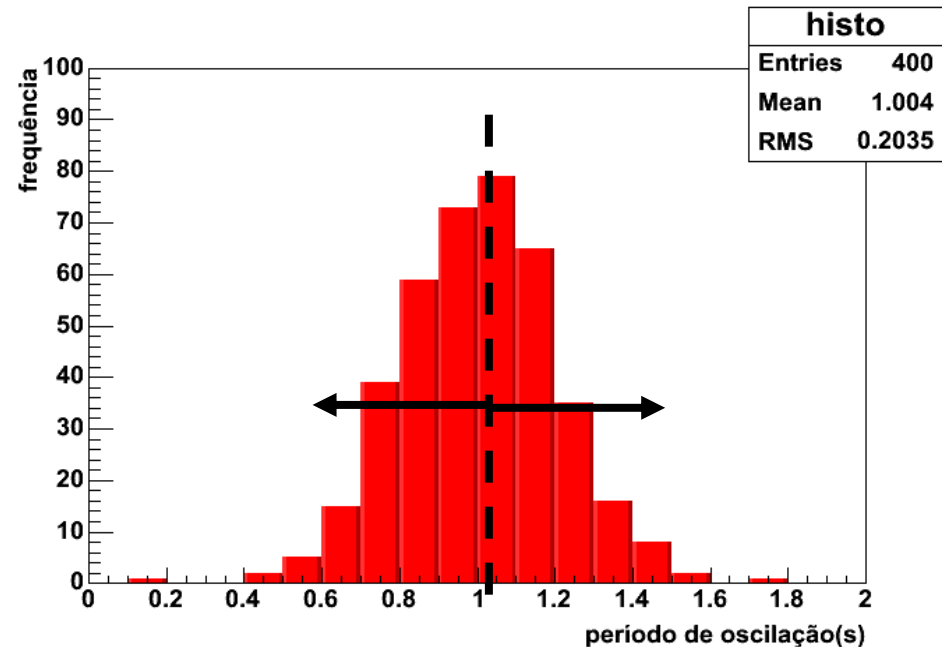
# Erros Estatísticos ou Aleatórios

- Inicialmente, que características devemos esperar para a distribuição dos dados obtidos devido a erros estatísticos?

- **Simétrica** em torno de um certo valor:

Valor médio = valor mais provável

- **Decresce** ao se afastar desse valor.



# Como representar o resultado de um conjunto de medidas

- Quantitativamente:
  - Resultado da medida → Média:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

onde  $N$  medidas  $x_i$  foram realizadas nas mesmas condições e possuem as mesmas incertezas (instrumental + aleatórias)

# Como estimar o valor do erro estatístico

- Quantitativamente:

Flutuação dos dados → Desvio Padrão ( $\sigma$ )

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

onde  $N$  medidas  $x_i$  foram realizadas nas mesmas condições e possuem as mesmas incertezas (instrumental + aleatórias)



# Como representar a incerteza do resultado de um conjunto de medidas

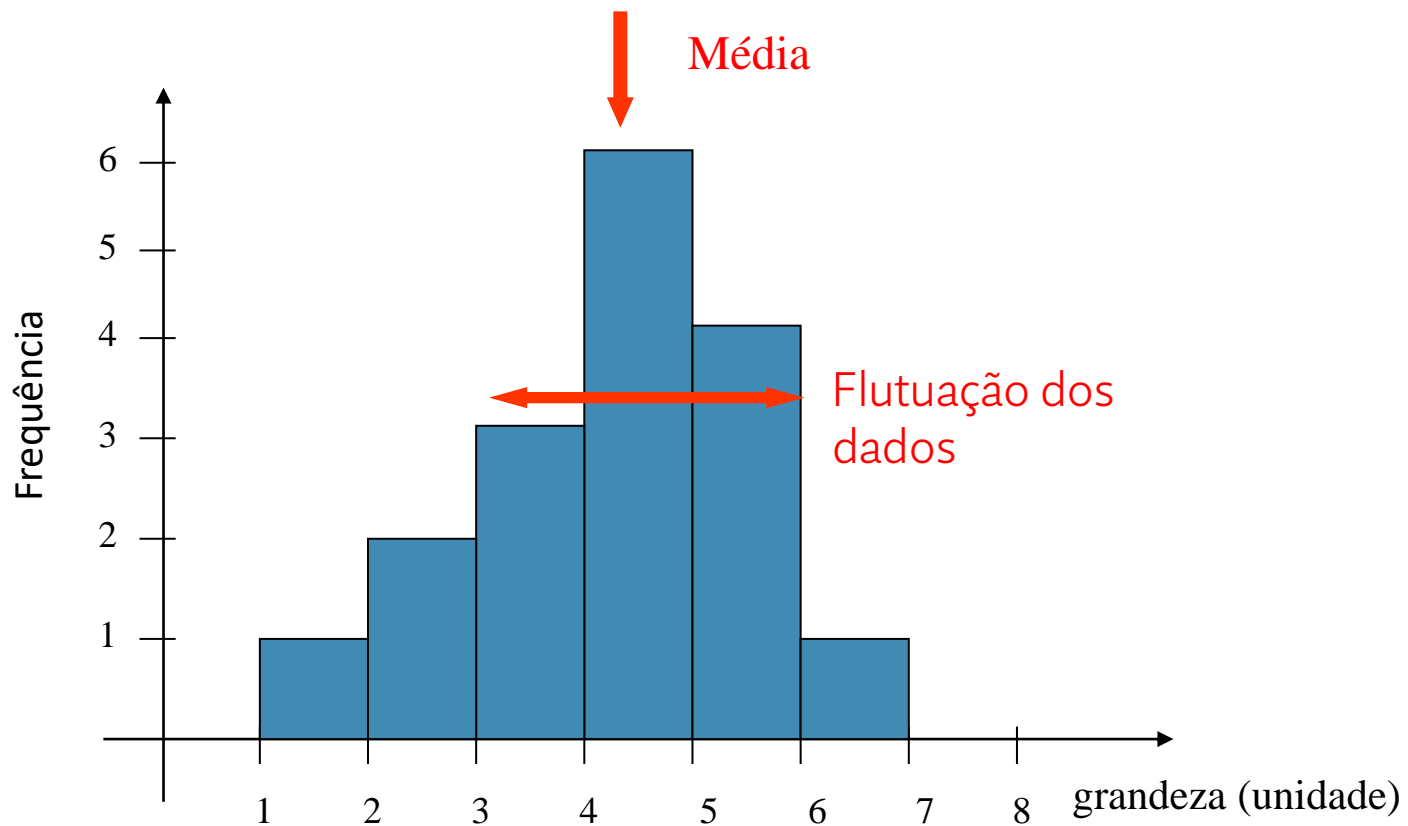
- Mas, ao aumentar o número de medidas, nosso resultado não deveria ser melhor já que diminuimos os erros aleatórios?
- O **desvio padrão da média** é uma estimativa do erro estatístico da média da amostra, representação do nosso resultado:

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

onde  $N$  medidas  $x_i$  foram realizadas nas **mesmas condições** e possuem as **mesmas incertezas** (instrumental + aleatórias)

# Representação de dados

$$x_{final} = \bar{x} \pm \sigma_m \text{ unid}$$



# Exemplo: Medidas de período (T)

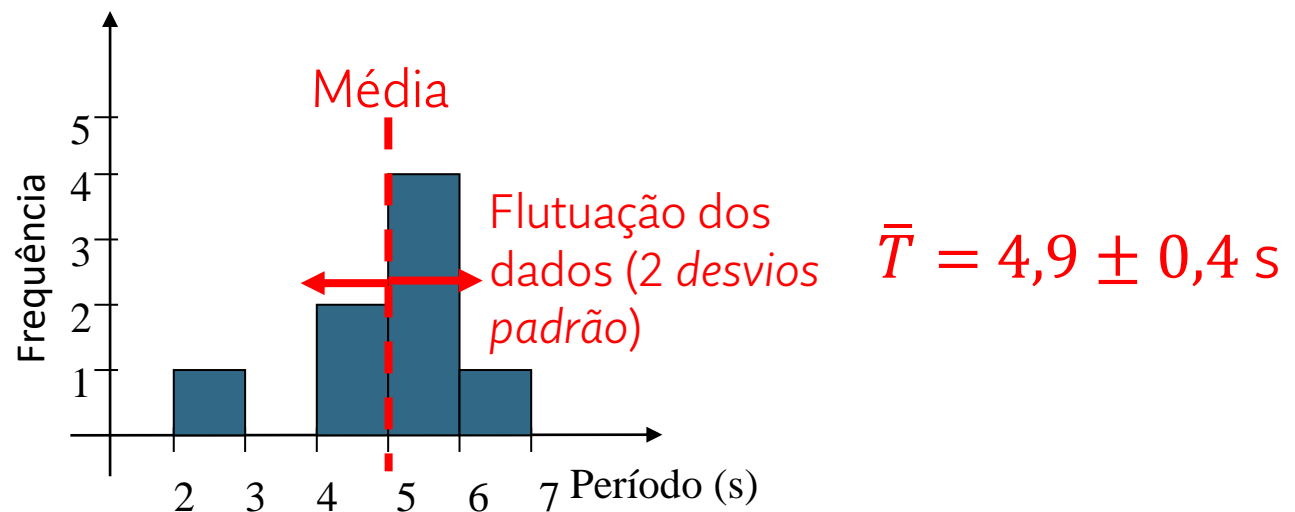
medida	T (s)
1	2,4
2	5,3
3	5,8
4	6,1
5	5,5
6	4,7
7	4,1
8	5,2

**Média:**  $\bar{T} = \frac{\sum_{i=1}^N T_i}{N} = \frac{39,1}{8} = 4,8875 \text{ s}$

**Desvio padrão:**  $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (T_i - \bar{T})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{9,79}{8-1}} = 1,2 \text{ s}$

**Desvio padrão da média:**  $\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{1,2}{\sqrt{8}} = 0,4 \text{ s}$

**Representação final do resultado:**



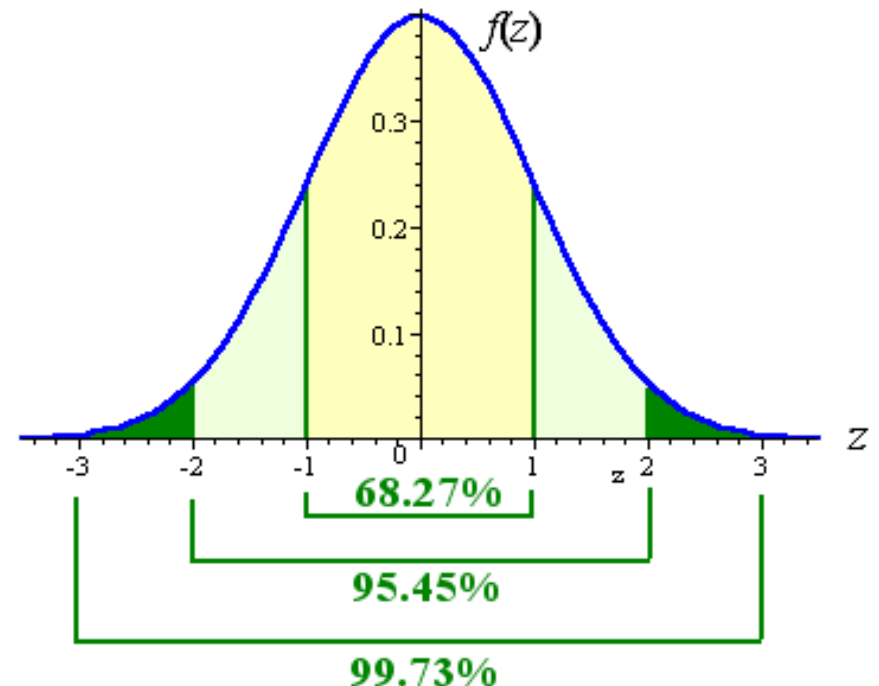
# Interpretação de distribuições de valores - probabilidades

Grandezas físicas sujeitas a erros aleatórios costumam se distribuir de forma simétrica próxima a uma gaussiana (distribuição normal ou de Gauss)

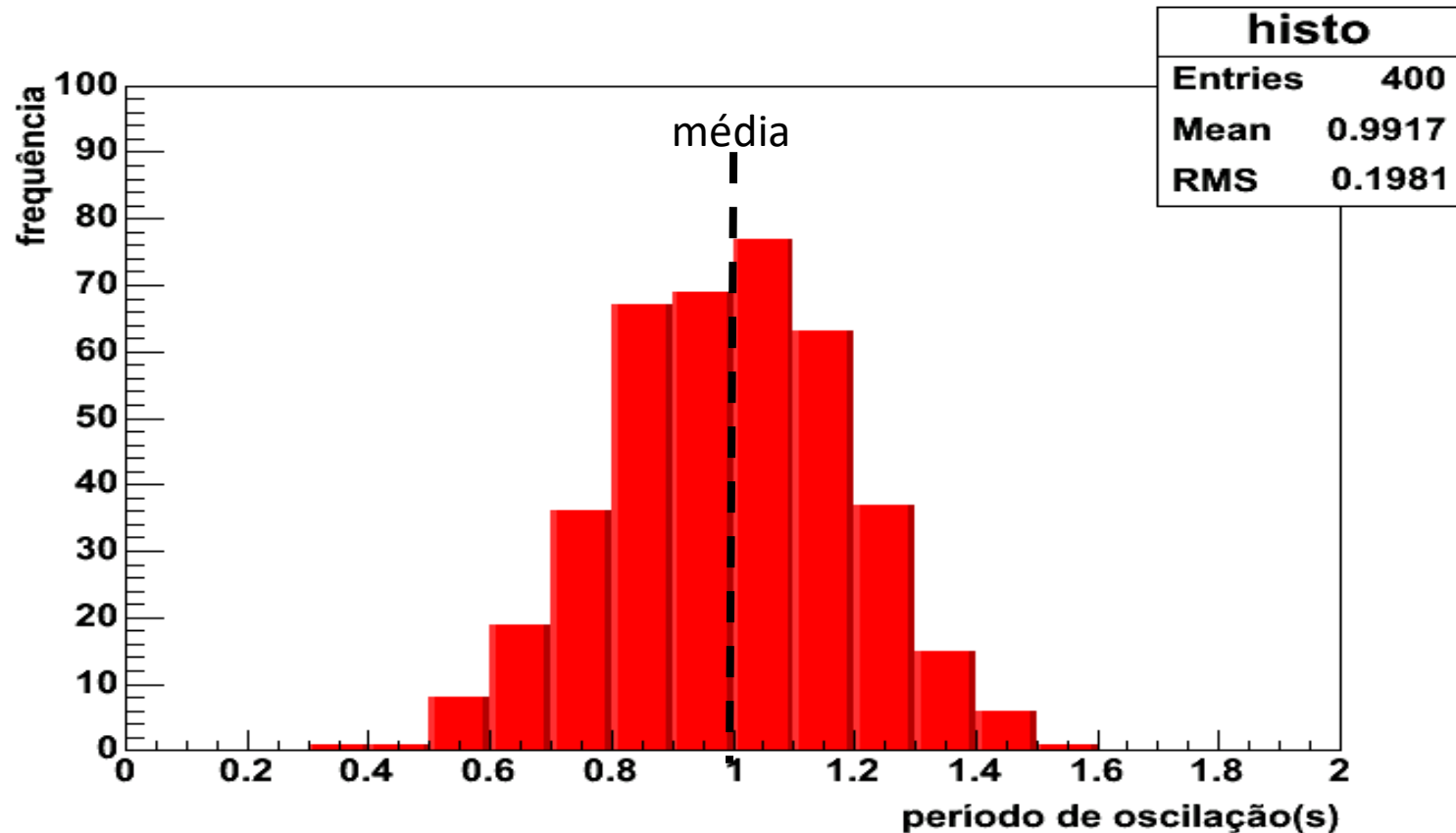
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Distribuição normal –escore z

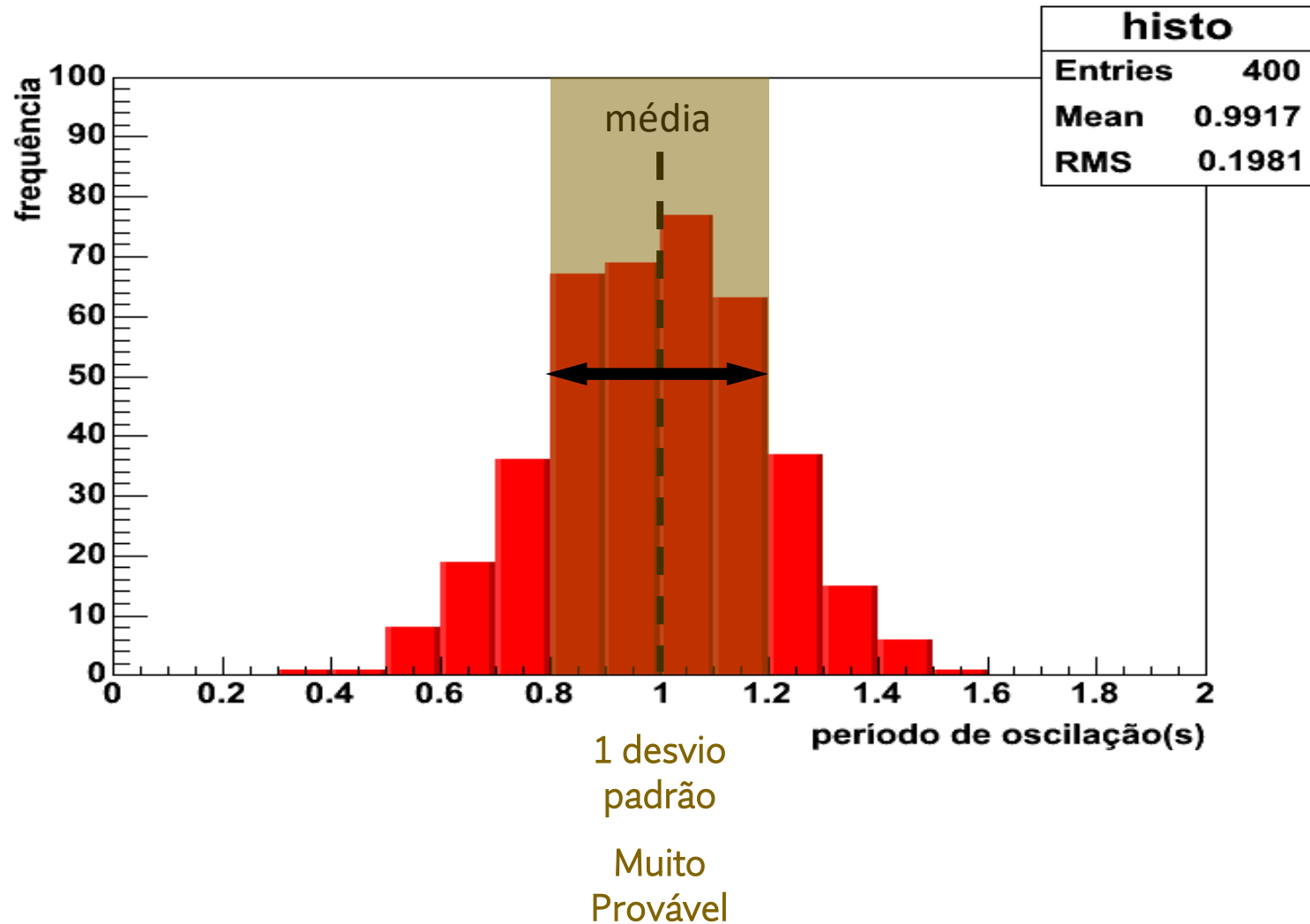
$$z = \frac{(x - \mu)}{\sigma}$$



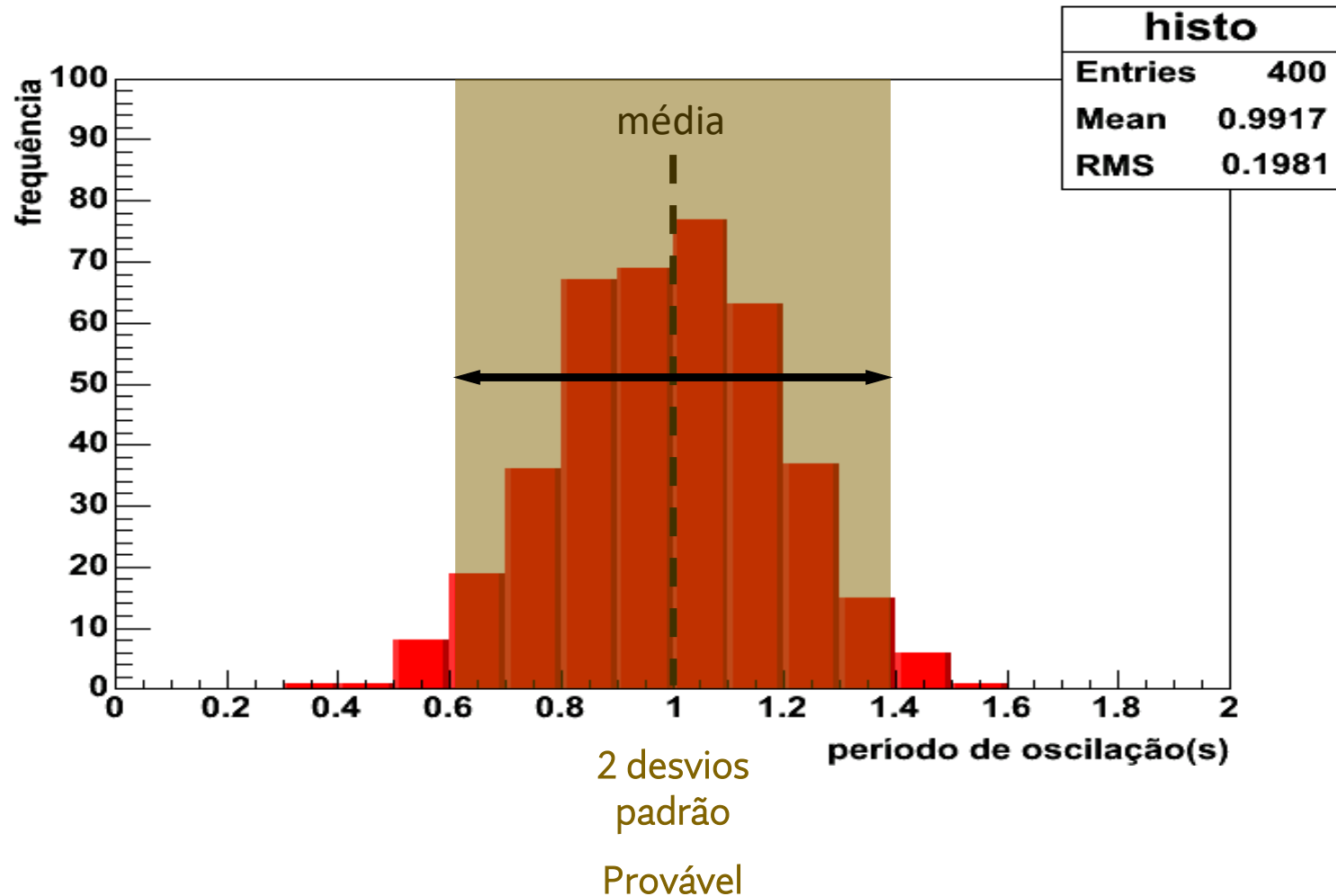
# Interpretação Estatística da Média e Desvio Padrão



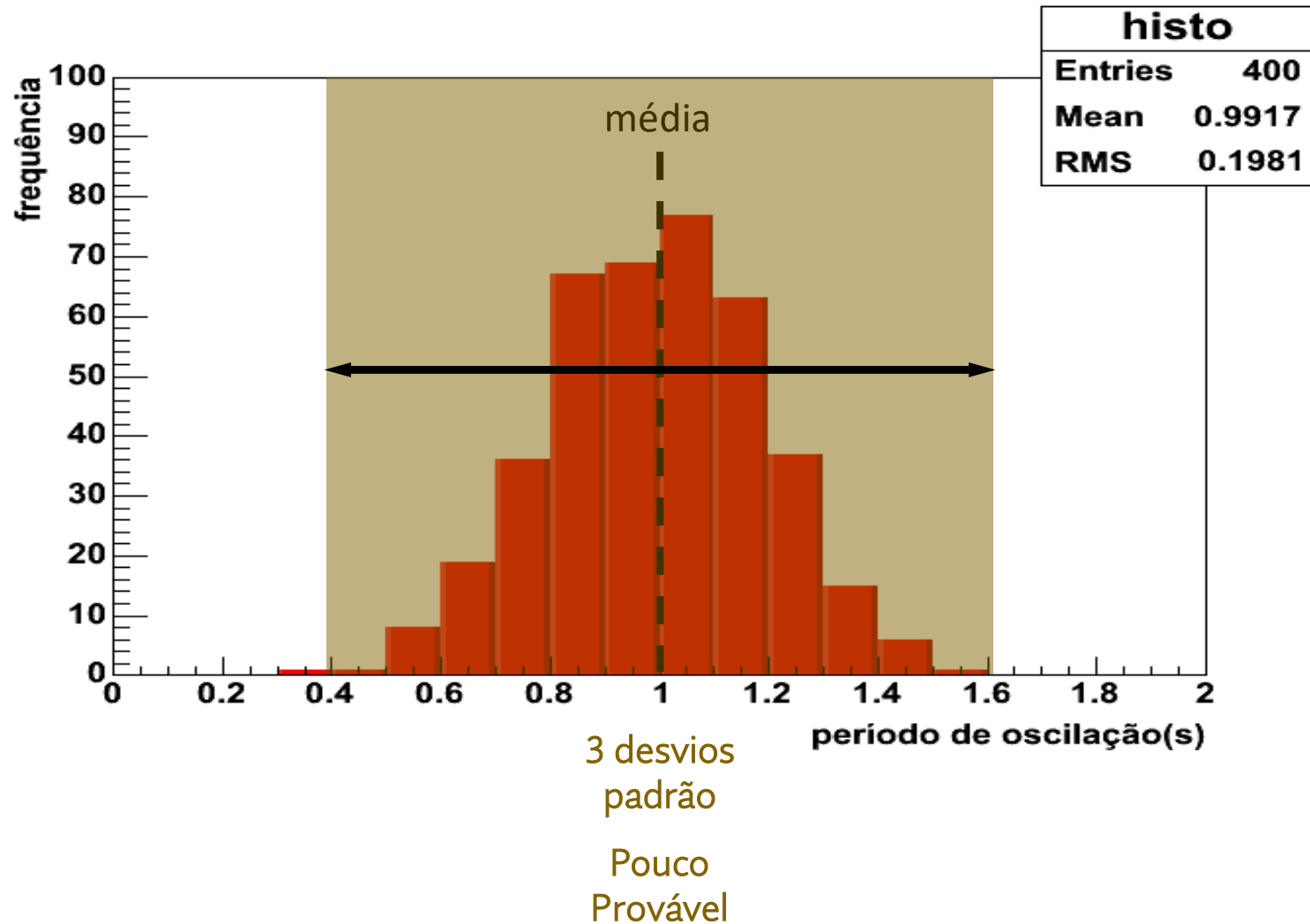
# Interpretação Estatística da Média e Desvio Padrão



# Interpretação Estatística da Média e Desvio Padrão

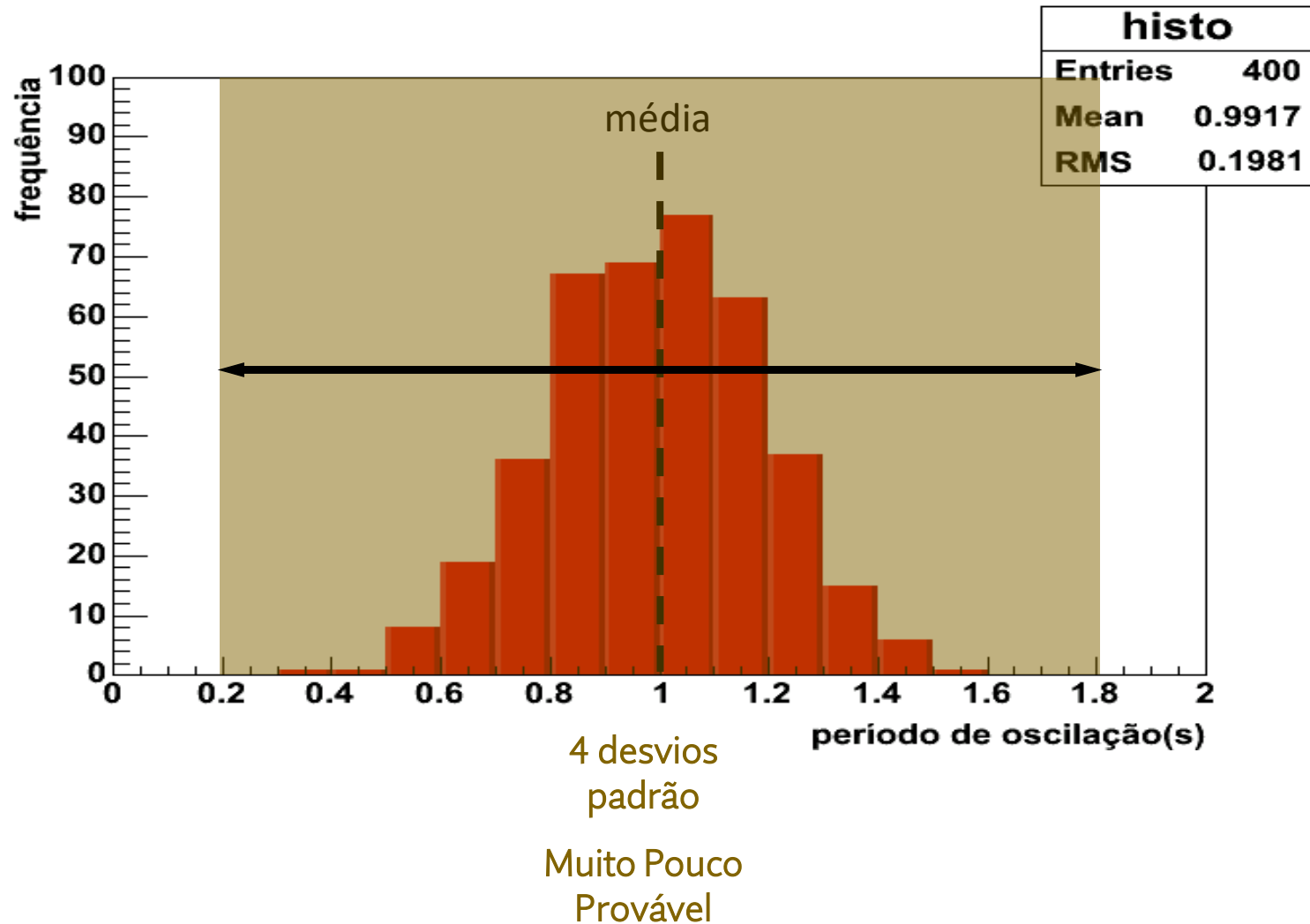


# Interpretação Estatística da Média e Desvio Padrão

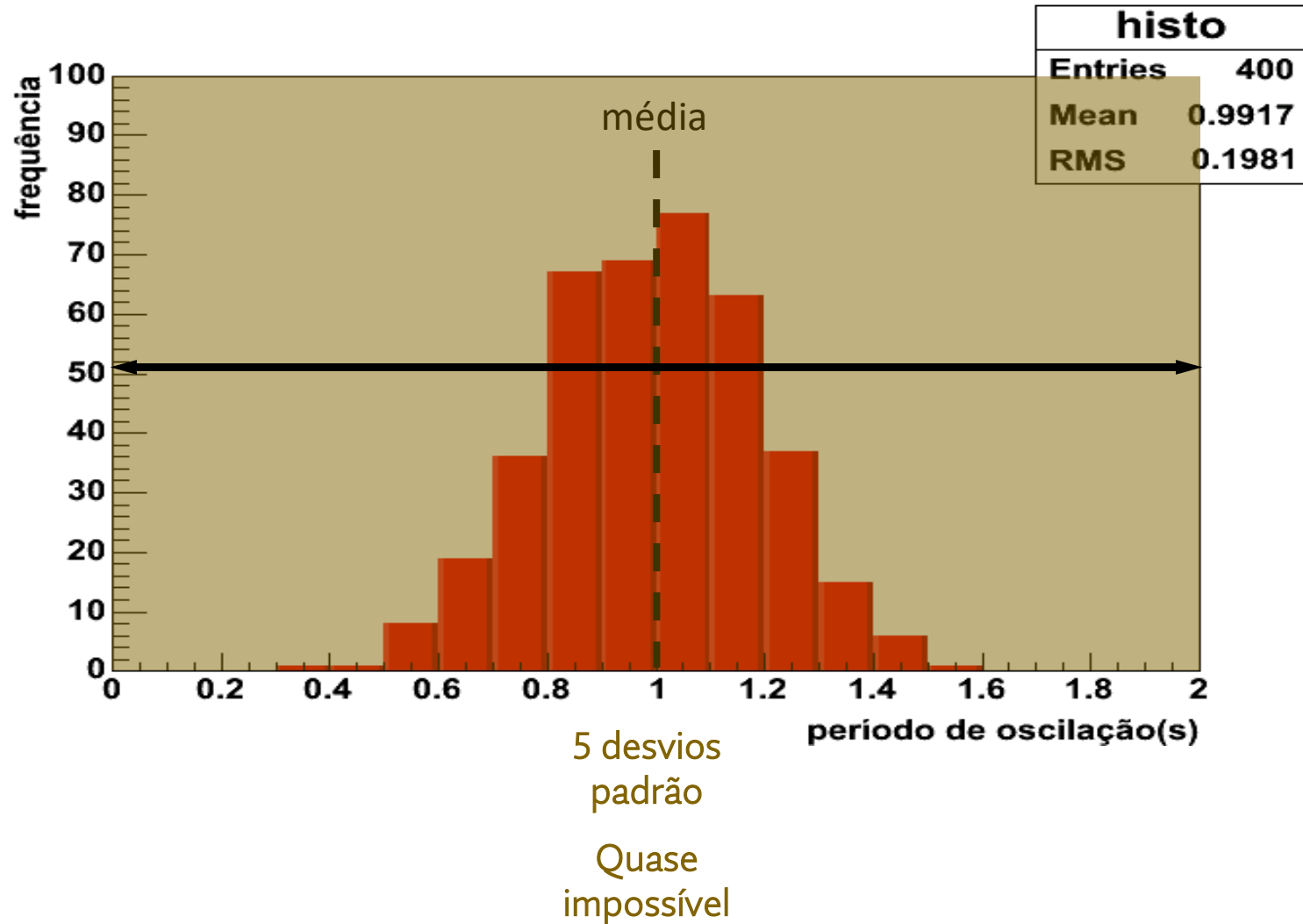




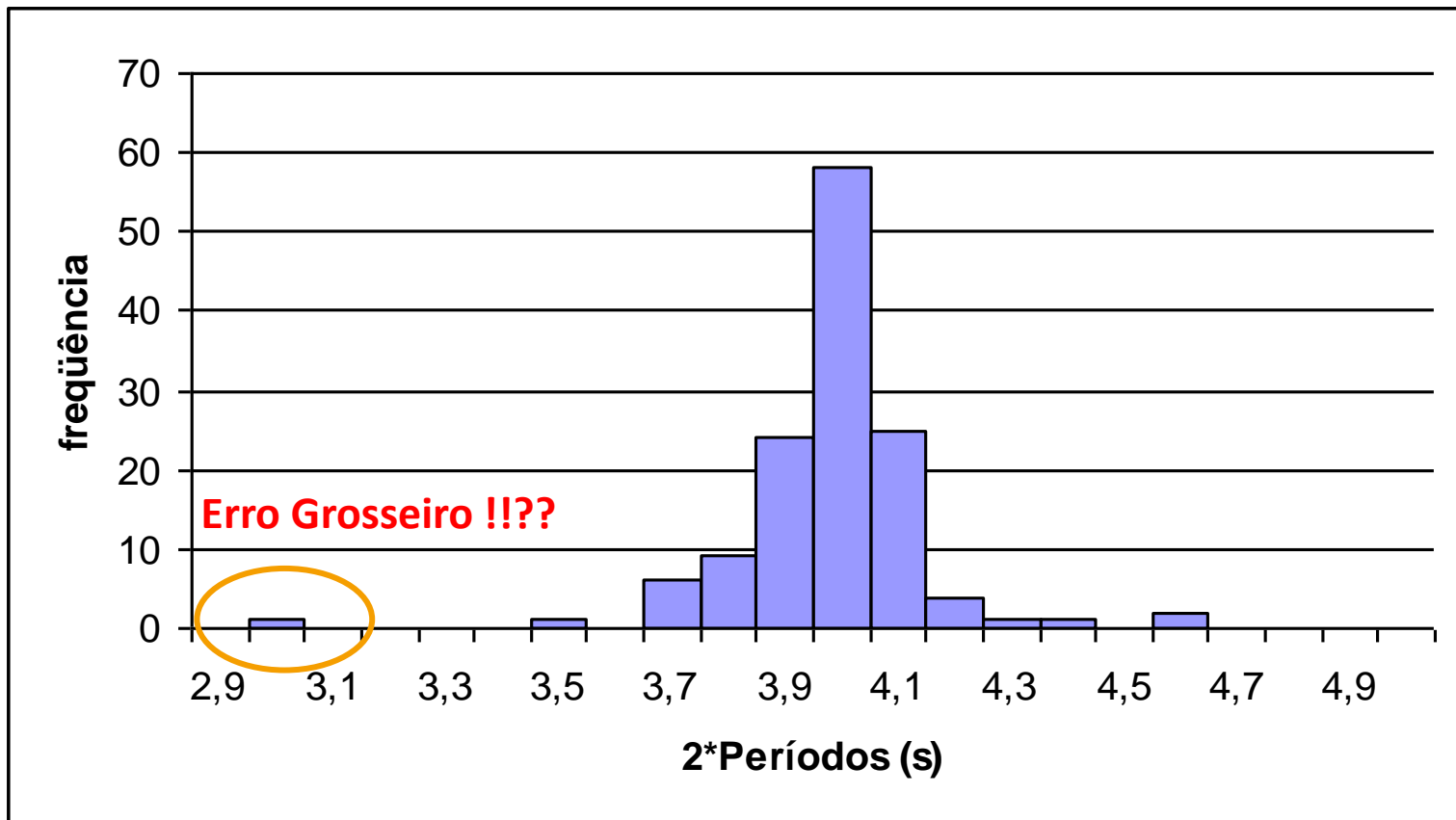
# Interpretação Estatística da Média e Desvio Padrão



# Interpretação Estatística da Média e Desvio Padrão

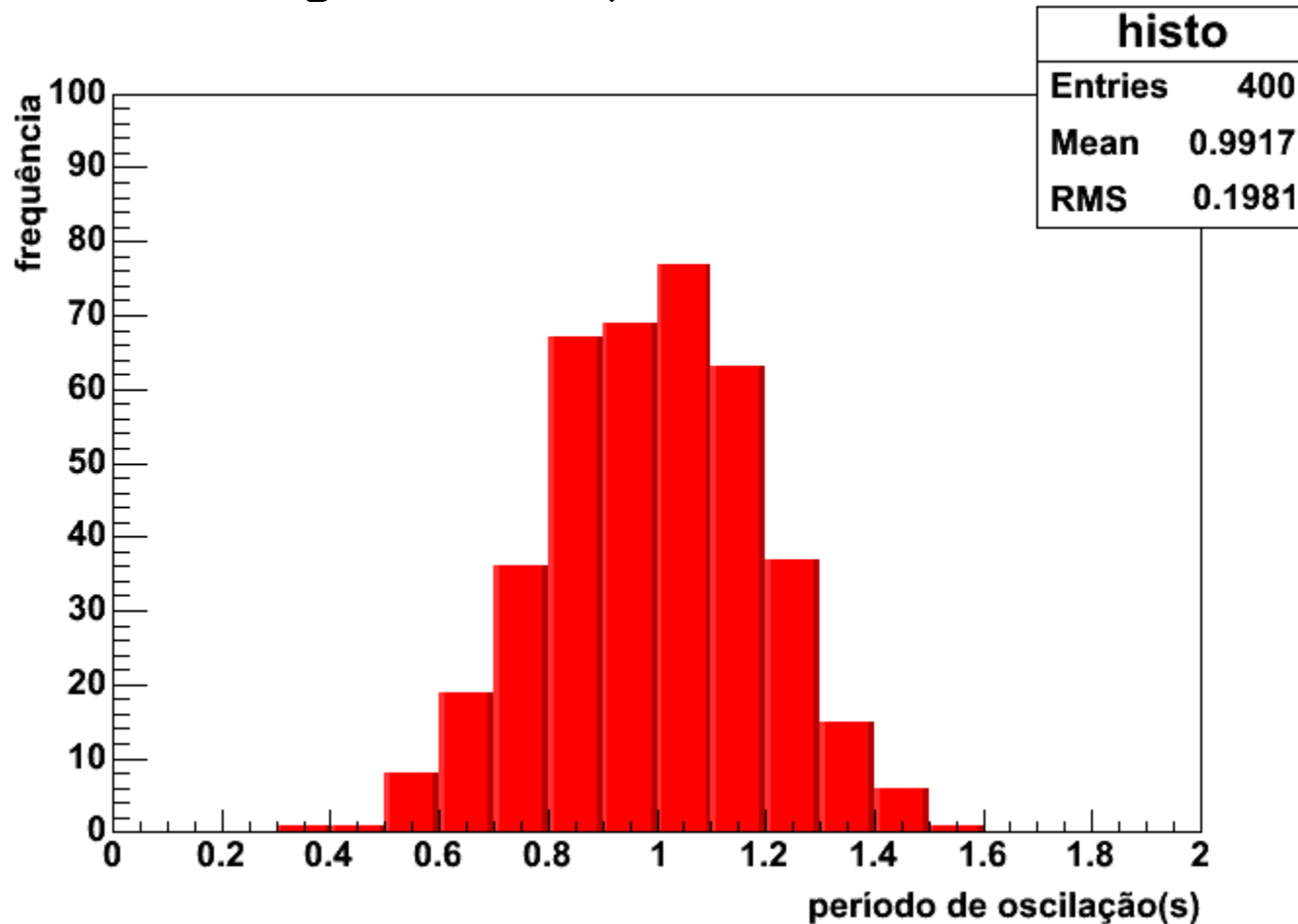


# Checando dados



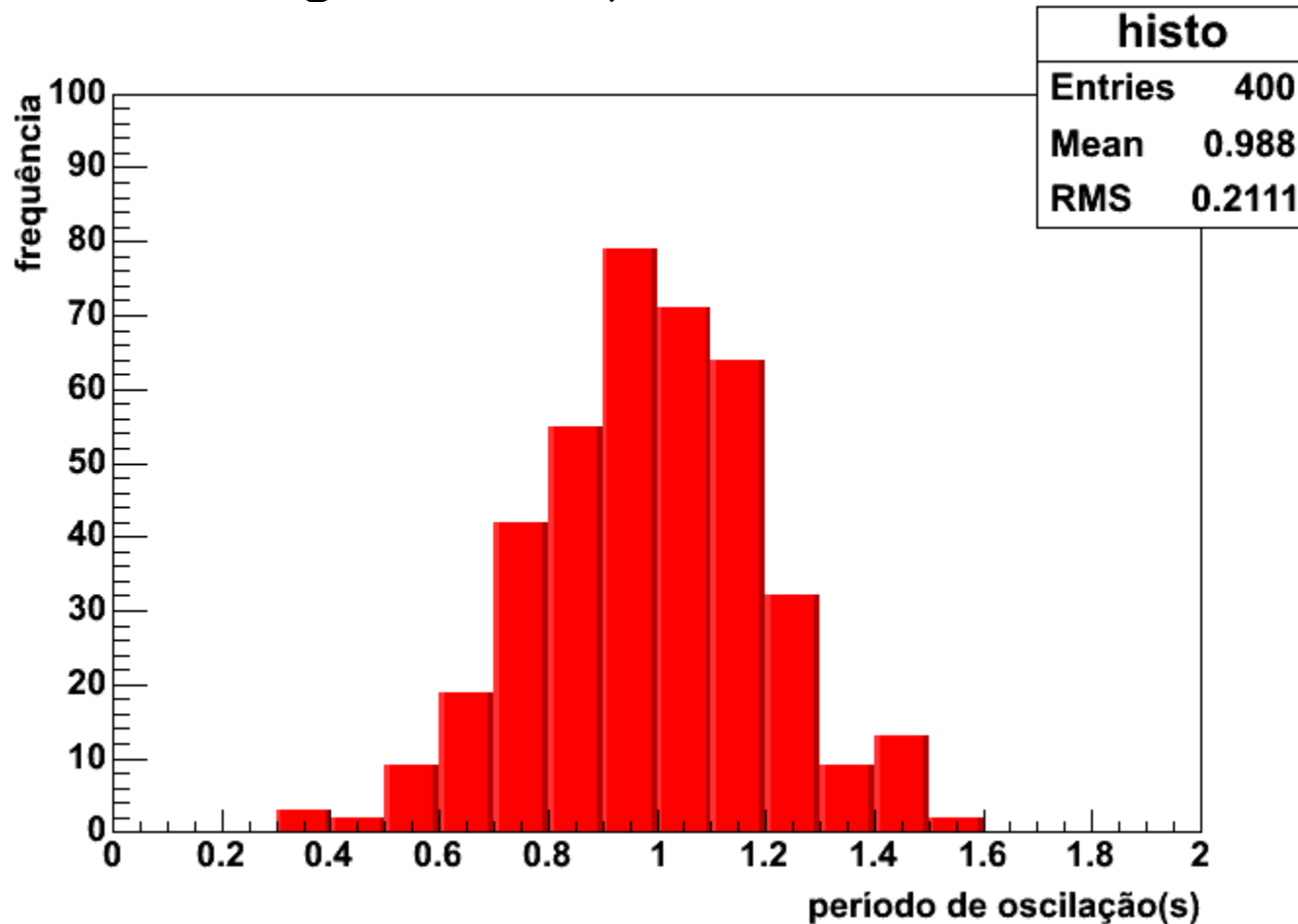
# Média e Desvio Padrão da Média

- A média e o desvio padrão da média são suficientes para descrever e distinguir um conjunto de dados?



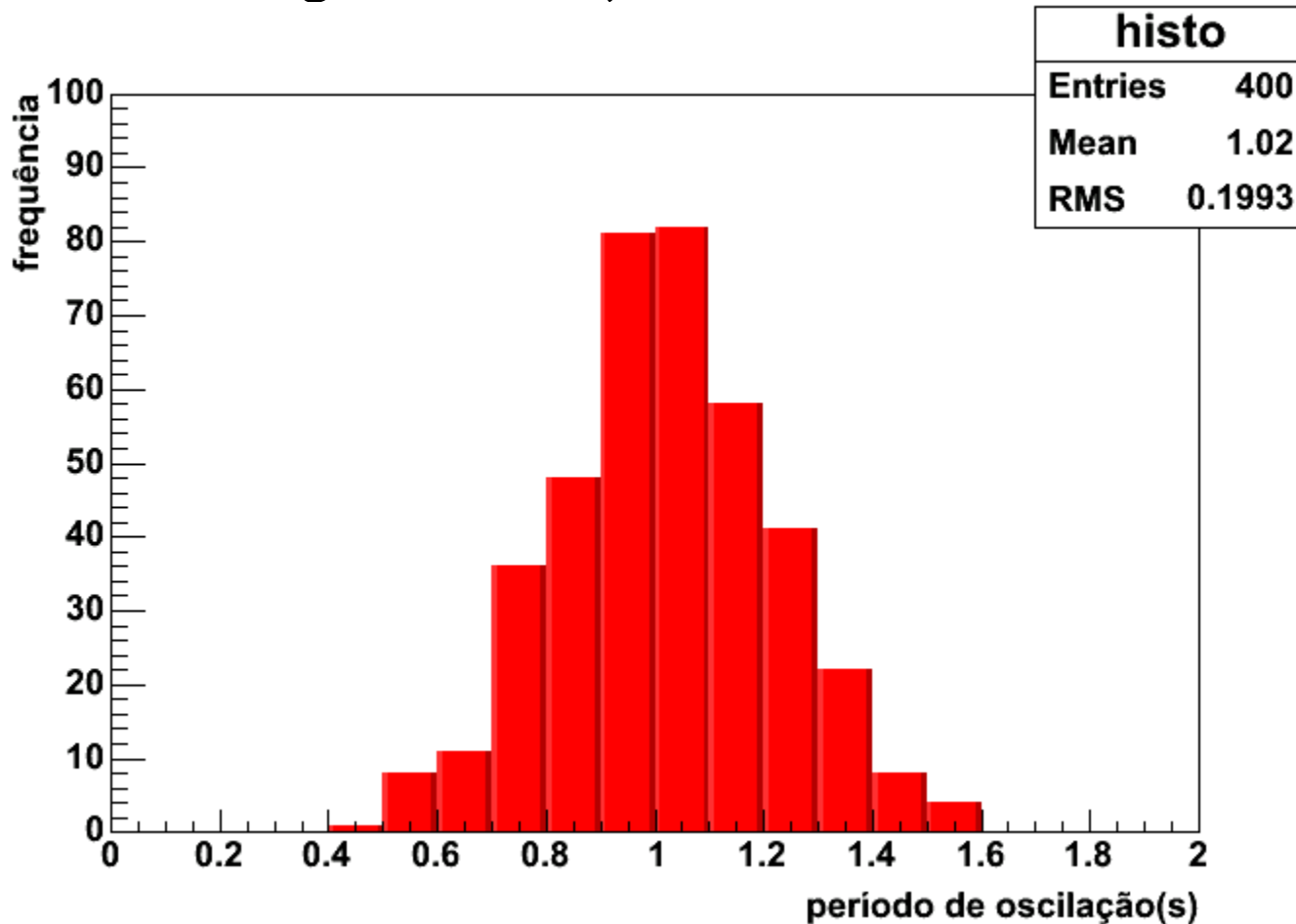
# Média e Desvio Padrão da Média

- A média e o desvio padrão da média são suficientes para descrever e distinguir um conjunto de dados?



# Média e Desvio Padrão da Média

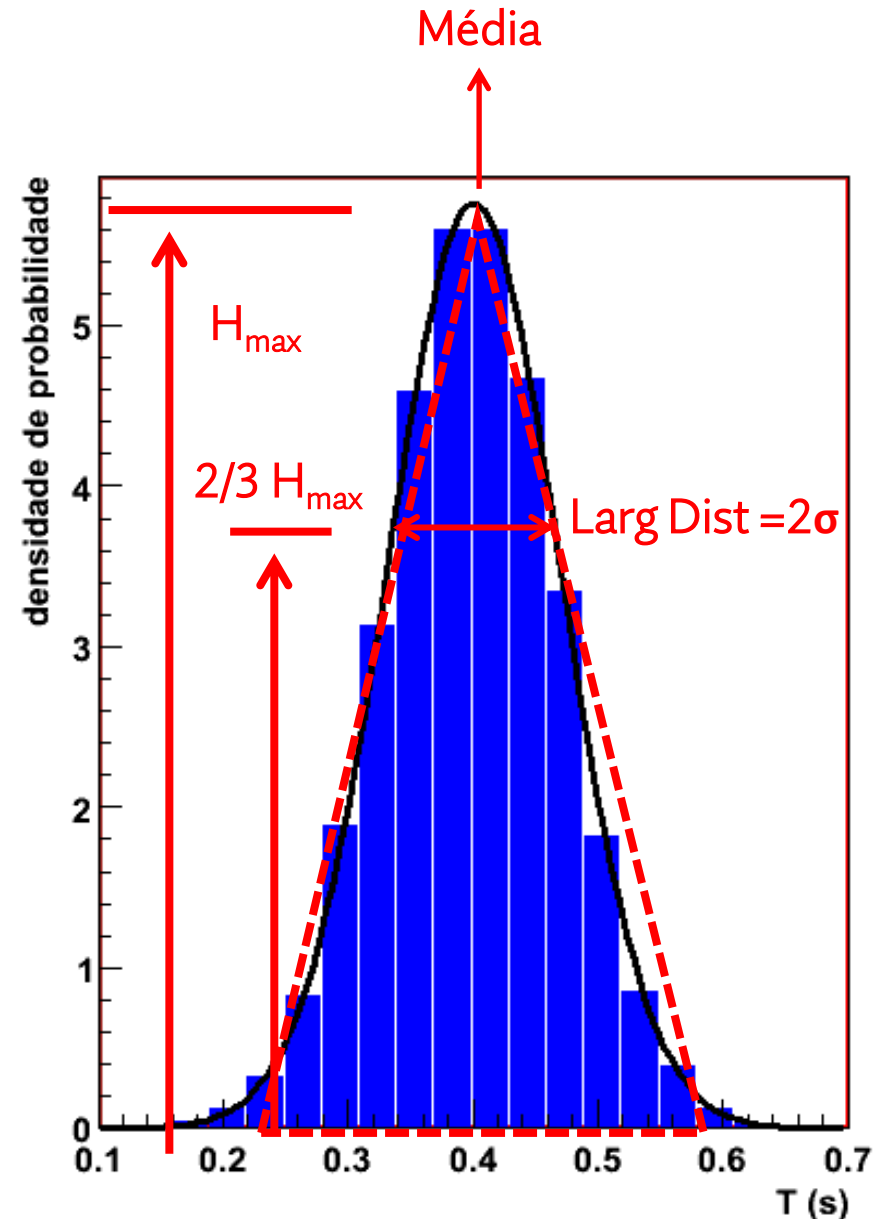
- A média e o desvio padrão da média são suficientes para descrever e distinguir um conjunto de dados?



# Graficamente

- Média:
  - Valor mais provável
- Desvio padrão ( $\sigma$ ):
  - $\frac{1}{2}$  Largura da distribuição medida a  $\frac{2}{3}$  da altura máxima
- Total aproximado de eventos N:
  - Área do triângulo ajustado na distribuição
- Incerteza da média:
  - Incerteza estatística

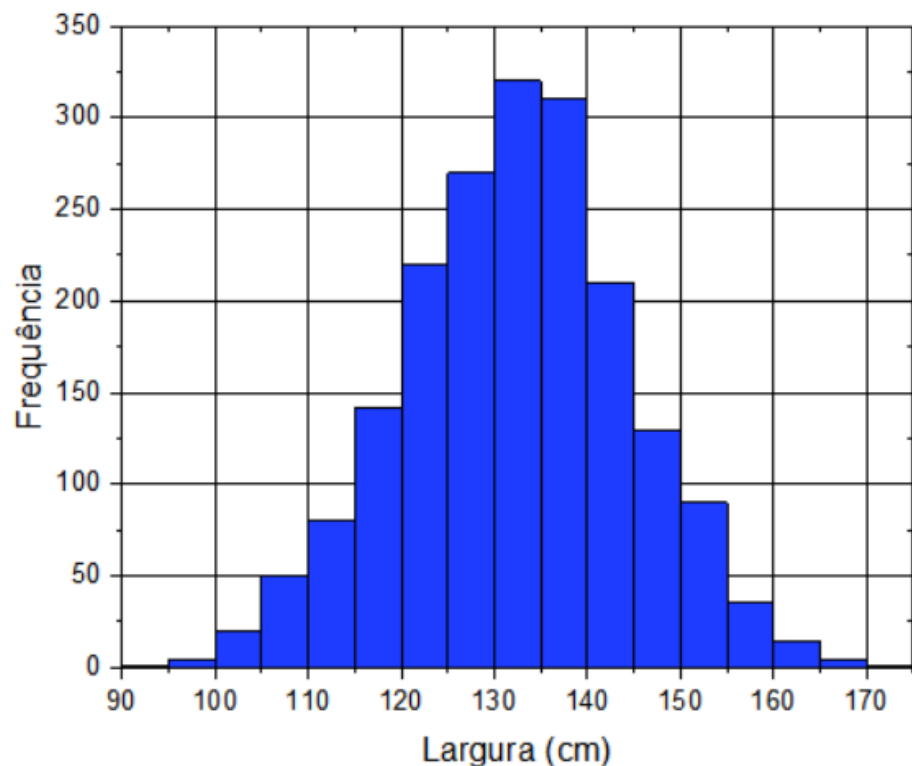
$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$



$$N_{\text{dist}} = (H_{\text{max}} * N_{\text{colunas}}) / 2$$

# Exercício em aula

Foram registradas diversas medidas da largura da lousa (realizada em palmos, mas convertida para centímetro) por diversas turmas de física experimental, e os dados foram organizados no histograma abaixo:



Estime de forma aproximada, usando informações lidas no histograma, os valores solicitados abaixo.

Largura do canal desse histograma:      cm

Média da distribuição:                      cm

Desvio Padrão da distribuição:      cm

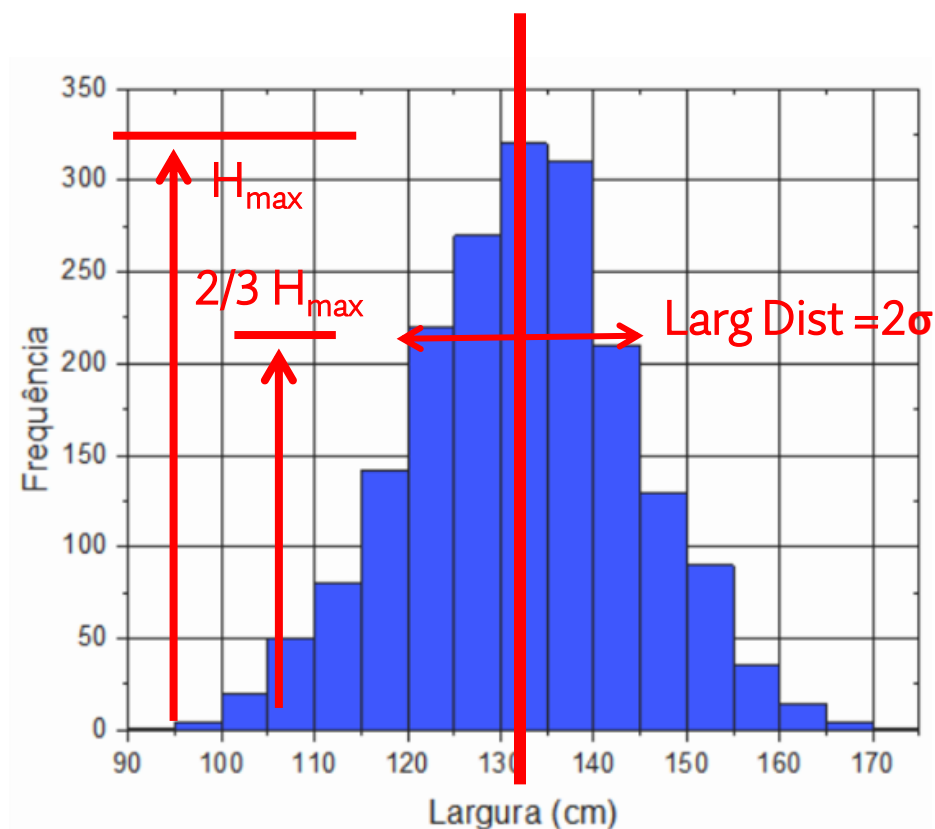
Total aproximado de eventos:

Incerteza da média:      cm



# Exercício em aula

Foram registradas diversas medidas da largura da lousa (realizada em palmos, mas convertida para centímetro) por diversas turmas de física experimental, e os dados foram organizados no histograma abaixo:



Estime de forma aproximada, usando informações lidas no histograma, os valores solicitados abaixo.

Largura do canal desse histograma: 5 cm

Média da distribuição: 133,5 cm

Desvio Padrão da distribuição: 12 cm

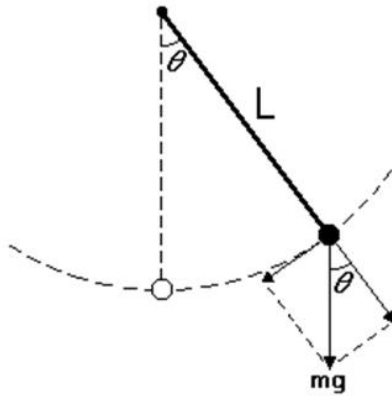
Total aproximado de eventos: 2250

Incerteza da média: 0,3 cm

*Atividade prática*

# O Pêndulo Simples

- Modelo para deduzir a relação entre o período de oscilação ( $T$ ) e o comprimento do fio ( $L$ ):



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$g$  é a aceleração da gravidade

- Hipóteses utilizadas:
  - O pêndulo é constituído por um ponto material suspenso por um fio inextensível e sem massa
  - Apenas as forças peso e tração agem sobre o ponto material
  - Utilizam-se ângulos de abertura pequenos ( $\theta < 15^\circ$ ), tal que seja válida a aproximação  $\sin(\theta) \approx \theta$  (em radianos), onde  $\theta$  é o ângulo entre o fio e a vertical, durante a oscilação.

# Medidas experimentais:

- Medir comprimento do pêndulo.
  - Uma medida por grupo
- Medir o tempo para dez oscilações de um pêndulo simples usando um cronômetro:
  - 1) Situação 1: precisão de 0,01 s
  - 2) Situação 2: precisão de 1 s. **ARREDONDE** o valor do cronômetro na **casa dos segundos**
  - Medida feita **por cada um** dos integrantes do grupo.
  - Quantidade: **5 vezes** por integrante do grupo **PARA CADA SITUAÇÃO**.
  - Anotar as medidas no **guia** e na **planilha de dados**  
([https://drive.google.com/drive/folders/1KJwxSm-eWm0AoQBpjGQO2BpfPpwsc0Ng?usp=share\\_link](https://drive.google.com/drive/folders/1KJwxSm-eWm0AoQBpjGQO2BpfPpwsc0Ng?usp=share_link)).

# Análise dos Dados

- Calcular média e desvio padrão **por grupo** - Uso de Planilhas
- Fazer 2 histogramas (dica de como fazer no excel: <https://youtu.be/ufQbAEixyuE>)
  - 1 para medidas **do grupo**
  - 1 para medidas **da sala**
- Calcule o valor esperado para o período T do pêndulo através da expressão:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

onde  $L$  é o comprimento do fio  $g$  é a aceleração da gravidade.

- Não esqueça de expressar a medida com o número correto de algarismos significativos

# Discussão dos dados: Comparação com o modelo

- O valor medido experimentalmente e o valor obtido através da expressão matemática são iguais?
- Como é possível compará-los?
- A medida do comprimento tem incerteza?
- Como você acha que isso vai afetar o valor do período obtido pela expressão matemática?

# Resumo da aula de hoje:

- Pode-se afirmar que toda medida experimental apresenta um **erro**, que precisa ser estimado e compreendido:
  - **Erros sistemáticos**: afetam igualmente todos os dados medidos, **independe** de quantos dados tenham sido tomados.
  - **Erros aleatórios**: afetam de maneira diferente cada um dos dados medidos, causando variações dos valores obtidos em medições repetidas
- Representação e interpretação dos dados para verificação dos erros aleatórios:
  - Histogramas
  - Média, desvio padrão e desvio padrão da média

# Para a próxima aula (31/03):

- Entrega do Guia 1.2 (um por grupo)
- No moodle (aba Experimento # 1 - Pêndulo simples):
  - Exercício individual (até dia 31/03).
- Texto: Apostila do curso (página principal do moodle):
  - Experiência II (Aulas 03 e 04) Densidade de Sólidos.