LABORATÓRIO DE CIRCUITOS ELÉTRICOS

Experimento 8

Redes de 2ª Ordem

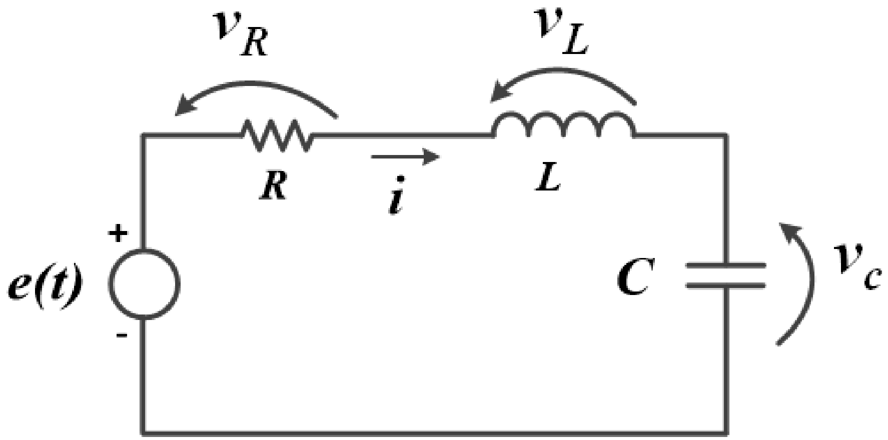
Prof. Leopoldo R. Yoshioka e Prof. João F. Justo

21 / junho / 2021

Objetivo da Experiência 8

Analisar o comportamento de uma rede de 2ª ordem, em especial um circuito RLC série.

Circuito RLC série



Como será o comportamento deste circuito?

Análise de Comportamento Circuito RLC

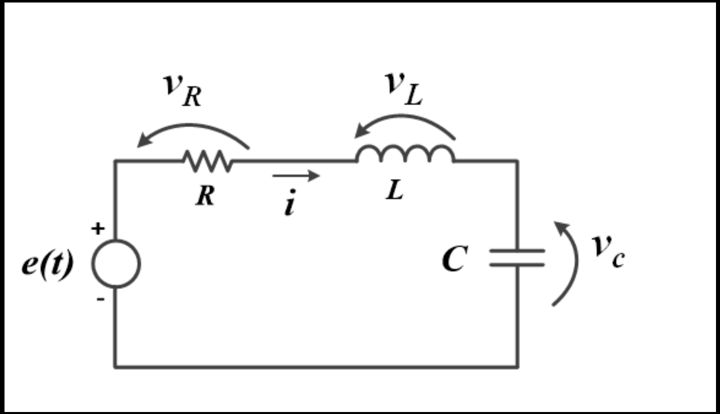
Pode ser feita

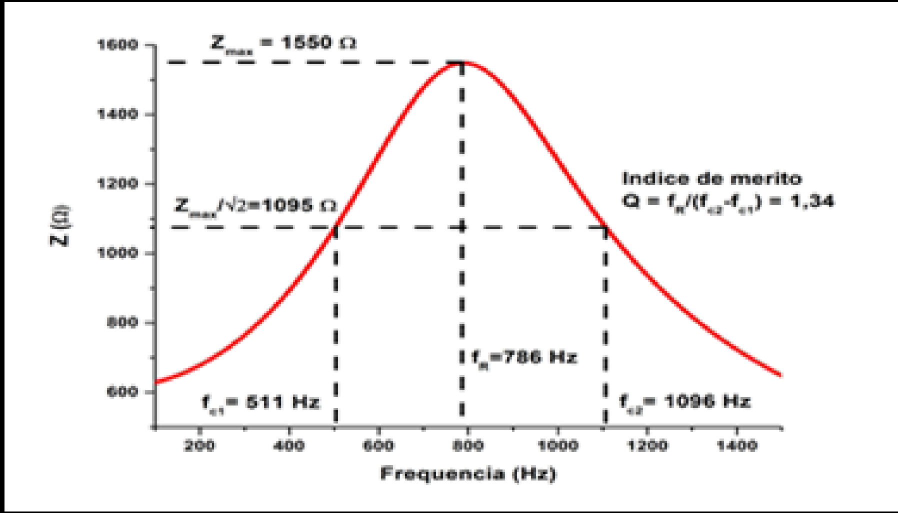
1. Domínio da Frequência
(regime permanente senoidal)

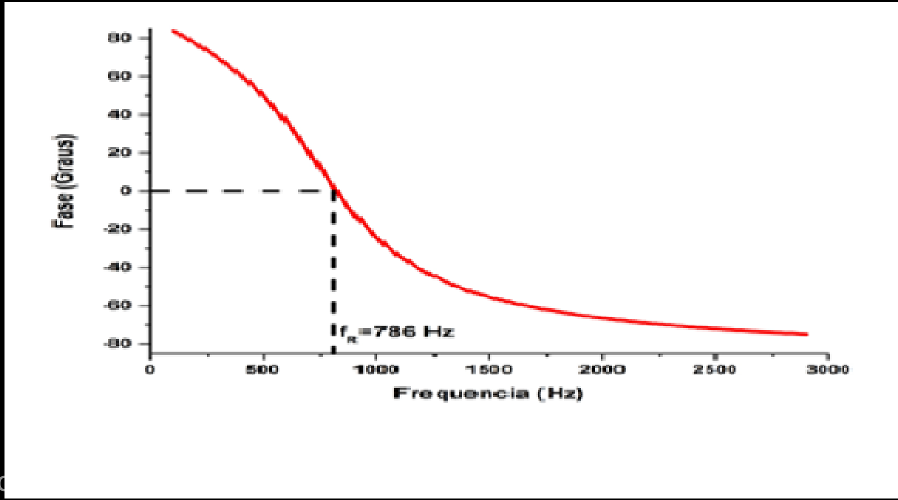
2. Domínio de Laplace
(frequências complexas)

3. Domínio do tempo

Comportamento do circuito RLC



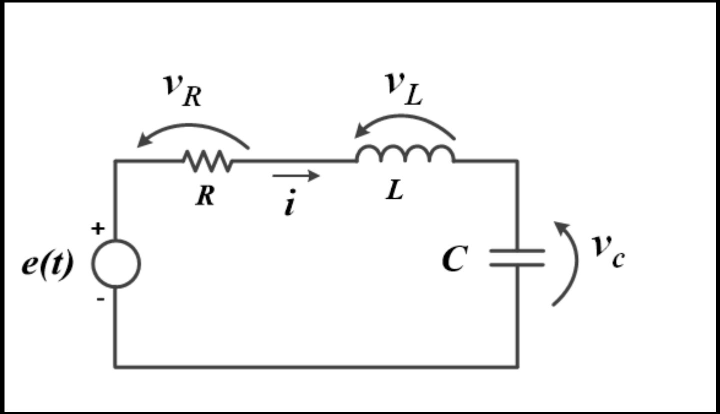




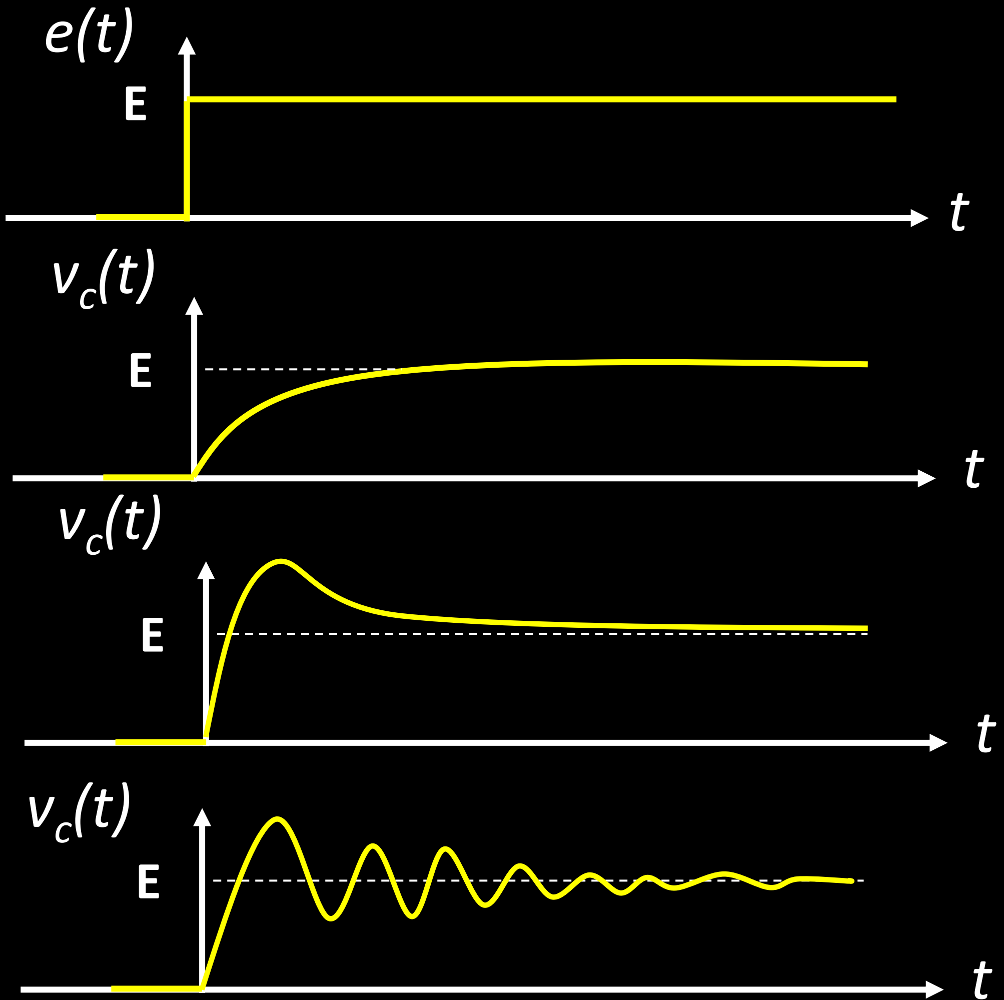
1. Domínio da Frequência
(RPS, fasores)

(Experiência 5 – Resposta em Frequência)

Comportamento do circuito RLC



3. Domínio do tempo
(Resposta a entrada “Degrau”)



Roteiro da Análise no Tempo

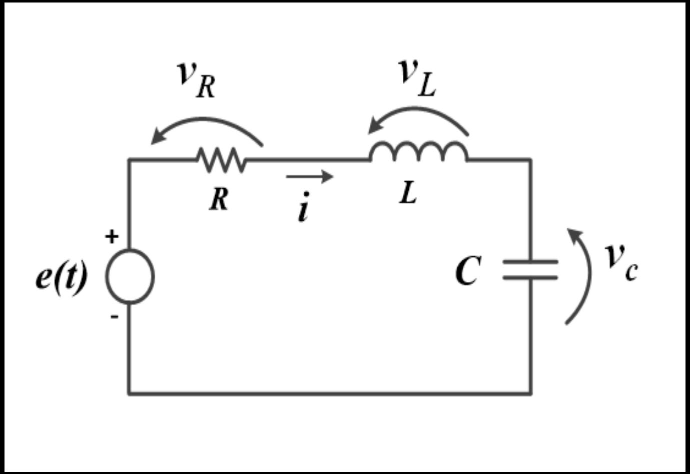


Figura – Esquema elétrico

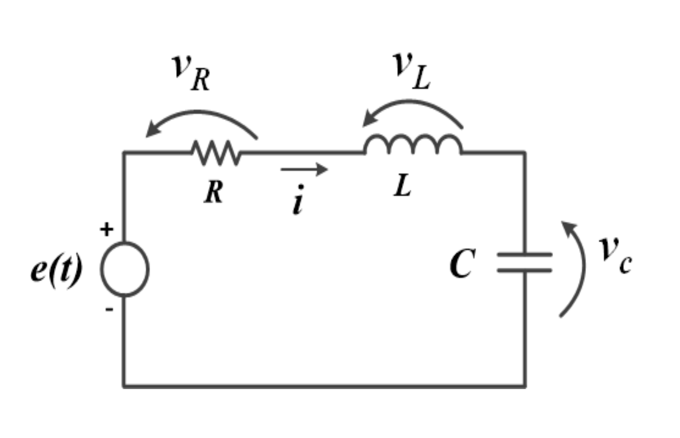
1. Equação de malha (2ª Lei de Kirchhoff)

2. Relações constitutivas de L e C

3. Equação diferencial de 2ª ordem

4. Examinar comportamento livre

Etapas 1 e 2



1. **Equação de malha (2ª LK):**

$$v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = e(t)$$

2. **Relações constitutivas de R, L e C:**

$$v_{R(t)} = R.\,i(t)$$

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} \qquad v_C\,(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\lambda)d\lambda + v_0$$

Equação Integro-diferencial

$$L\frac{di(t)}{dt} + R.i(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\lambda)d\lambda + v_0 = e(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC}i(t) = \frac{1}{L}\frac{de(t)}{dt}$$

Equação diferencial

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + 2\alpha\frac{di(t)}{dt} + {\omega_0}^2\, i(t) = \frac{1}{L}\frac{de(t)}{dt}$$

onde:

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$${\omega_0}^2 = \frac{1}{LC}$$

α é o fator de amortecimento e

ω_0 é a frequência natural

Equação Diferencial Homogênea

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + 2\alpha\frac{di(t)}{dt} + {\omega_0}^2\, i(t) = 0$$

Equação Diferencial Homogênea (E.D.H.)

Vamos considerar $i(t) = Ie^{st}$ como solução tentativa

- **I é uma constante real não nula e**
- **s uma constante complexa**

$$Is^2e^{st} + 2I\alpha se^{st} + I{\omega_0}^2e^{st} = 0$$

$$\underbrace{Ie^{st}}_{\neq 0}\underbrace{(s^2 + 2\alpha s + {\omega_0}^2)}_{= 0} = 0$$

$$\boxed{s^2 + 2\,\alpha s + {\omega_0}^2 = 0}$$

equação característica da E.D.H.

Equação Característica

$$\boxed{s^2 + 2\,\alpha s + {\omega_0}^2 = 0}$$

Equação Algébrica do 2º grau

- **Para que a função $i(t) = Ie^{st}$ satisfaça a E.D.H. é necessário que s seja raiz da equação característica.**
- **A equação característica terá duas raízes s_1 e s_2:**
  - $s_{1,\,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - {\omega_0}^2}$
  - $s_1 \neq s_2$ **ou** $s_1 = s_2$ **(reais)**
  - $s_1 = {s_2}^*$ **(complexas e conjugadas)**

Solução geral da homogênea

- **A solução geral da equação homogênea será da forma:**

$$\boldsymbol{i(t) = I_1 e^{s_1 t} + I_2 e^{s_2 t}}$$

- I_1 **e** I_2 **são determinados a partir das condições iniciais:**

$$\boxed{\begin{aligned} &v_C(0) = v_0 \;;\quad i(0) = i_0 \\ &\left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0} = \; ? \end{aligned}}$$

Condição inicial da derivada

- **Voltando para a Equação íntegro-diferencial (item 2.3)**

$$L\frac{di(t)}{dt} + R.i(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\lambda)d\lambda + v_0 = e(t)$$

$$(\ t = t_0 = 0 \ \ ; \ \ i(0) = i_0 \ )$$

$$L\left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0} + R.i_0 + v_0 = 0 \ \Rightarrow \ \boxed{\left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0} = -\frac{R}{L}i_0 - \frac{1}{L}v_0}$$

2.9 Cálculo das constantes I_1 e I_2

$$i_h(t) = I_1 e^{s_1 t} + I_2 e^{s_2 t}$$

$(t = 0 \;\; ; \;\; i(0) = i_0 \;)$

Sistema de equações

$$I_1 + I_2 = i_0$$

$$\left.\frac{di_h(t)}{dt}\right|_{t=0} = s_1 I_1 + s_2 I_2 = -\frac{R}{L}\, i_0 - \frac{1}{L} v_0$$

Cálculo das constantes I_1 e I_2

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = i_0 \\ s_1 I_1 + s_2 I_2 = -\dfrac{R}{L}\, i_0 - \dfrac{1}{L} v_0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_0 \\ -\frac{R}{L} i_0 - \frac{1}{L} v_0 \end{bmatrix}$$

Tipos de Comportamentos

O comportamento do circuito dependerá dos valores dos parâmetros do circuito $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\omega_0}$ e, portanto, dos valores de R, L e C.

$$s^2 + 2\,\alpha s + \omega_0{}^2 = 0$$

Raízes da Equação:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0{}^2}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} \qquad \omega_0{}^2 = \frac{1}{LC}$$

#1 $\alpha^2 > \omega_0{}^2$

#2 $\alpha^2 < \omega_0{}^2$

#3 $\alpha^2 = \omega_0{}^2$

#1 $\alpha^2 > \omega_0^2$ ➡ **Superamortecido**

#2 $\alpha^2 < \omega_0^2$ ➡ **Subamortecido (Oscilatório)**

#3 $\alpha^2 = \omega_0^2$ ➡ **Amortecido crítico**

Superamortecido

$$\alpha^2 > \omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad R > 2\sqrt{L/C}$$

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{R}{2L}}$$

$$\boldsymbol{\omega_0^2 = \frac{1}{LC}}$$

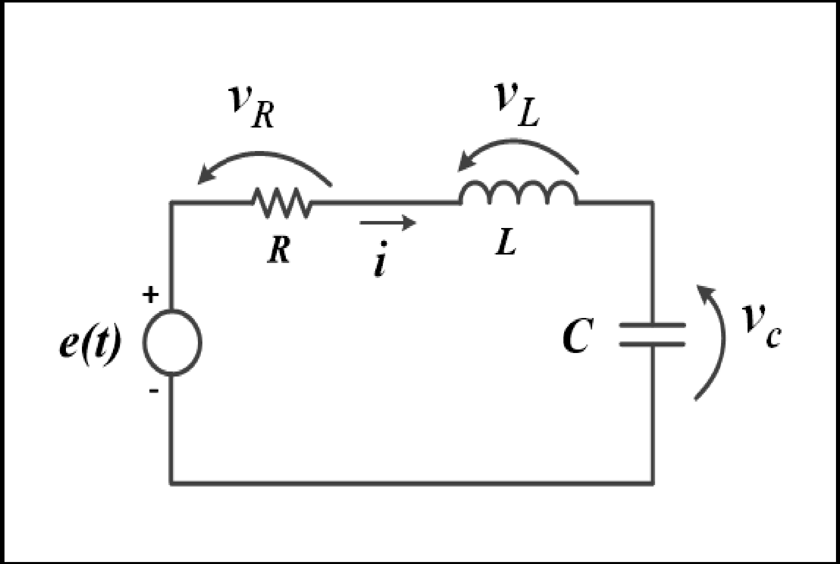
$$\boldsymbol{\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}$$

Chegamos a resposta:

$$i(t) = \frac{v_0}{2\beta L} e^{-\alpha t}\left(e^{\beta t} - e^{-\beta t}\right) \qquad t \geq 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{i(t) = e^{-\alpha t}\left(i_o\left(\cosh(\beta t) - \frac{\alpha}{\beta} senh(\beta t)\right) - \frac{v_0}{\beta L} senh(\beta t)\right)}}$$

Superamortecido – Exemplo

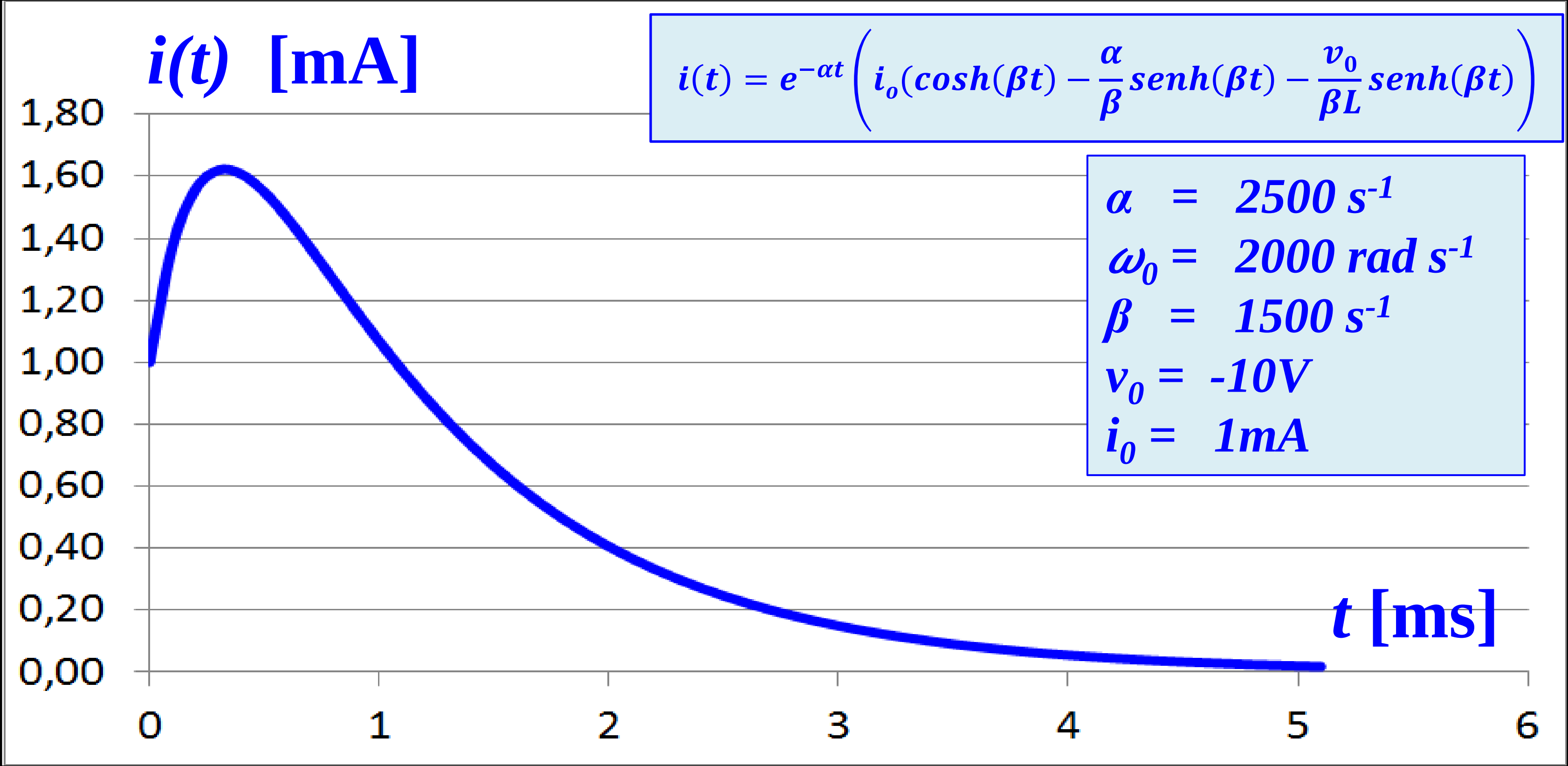


$L = 1H$
$C = 0{,}25\ \mu F$
$R = 5\ k\Omega$
$v_0 = -10V$
$I_0 = 1mA$

$\alpha = 2500\ s^{-1}$
$\omega_0 = 2000\ rad\ s^{-1}$

$$\alpha = \frac{R}{2L} \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Superamortecido – Gráfico



$$i(t) = e^{-\alpha t}\left(i_o\left(\cosh(\beta t) - \frac{\alpha}{\beta}\operatorname{senh}(\beta t) - \frac{v_0}{\beta L}\operatorname{senh}(\beta t)\right)\right)$$

$\alpha = 2500\ s^{-1}$

$\omega_0 = 2000\ rad\ s^{-1}$

$\beta = 1500\ s^{-1}$

$v_0 = -10V$

$i_0 = 1mA$

#1 $\alpha^2 > \boldsymbol{\omega_0}^2$ ⇨ **Superamortecido**

#2 $\alpha^2 < \boldsymbol{\omega_0}^2$ ⇨ **Subamortecido (Oscilatório)**

#3 $\alpha^2 = \boldsymbol{\omega_0}^2$ ⇨ **Amortecido crítico**

Subamortecida (oscilatório)

$$\alpha^2 < {\omega_0}^2 \quad \Rightarrow \quad R < 2\sqrt{L/C}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$${\omega_0}^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\Downarrow$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{{\omega_0}^2 - \alpha^2}$$ **raízes complexas e conjugadas**

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$$ **frequências complexas próprias**

$$\omega_d = \sqrt{{\omega_0}^2 - \alpha^2}$$ **frequência própria amortecida**

Resposta subamortecida

$$i(t) = I_1 e^{s_1 t} + I_2 e^{s_2 t}$$

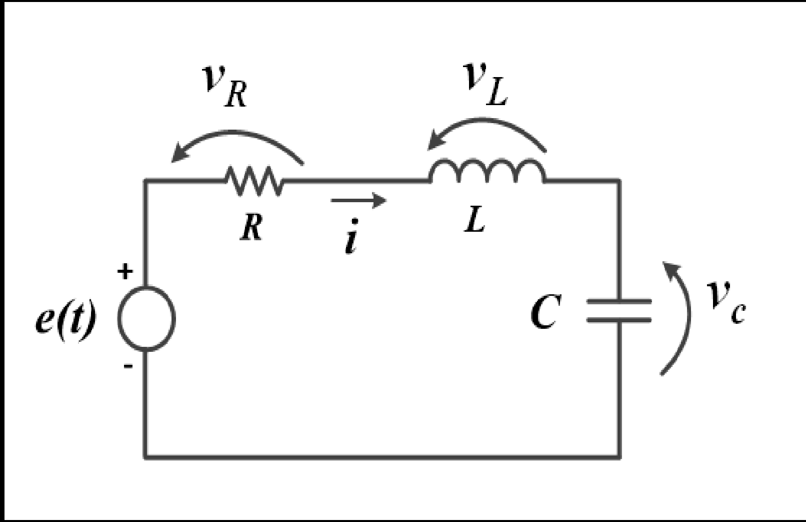
$$s_{1,\,2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

$$i(t) = \; I_1 e^{(-\alpha + j\omega_d)t} + I_2 e^{(-\alpha - j\omega_d)t}$$

$$\boxed{i(t) = \; I_m e^{-\alpha t} cos(\omega_d t + \varphi) \qquad t \geq 0}$$

amortecimento **oscilação**

Exemplo de Resposta Subamortecida

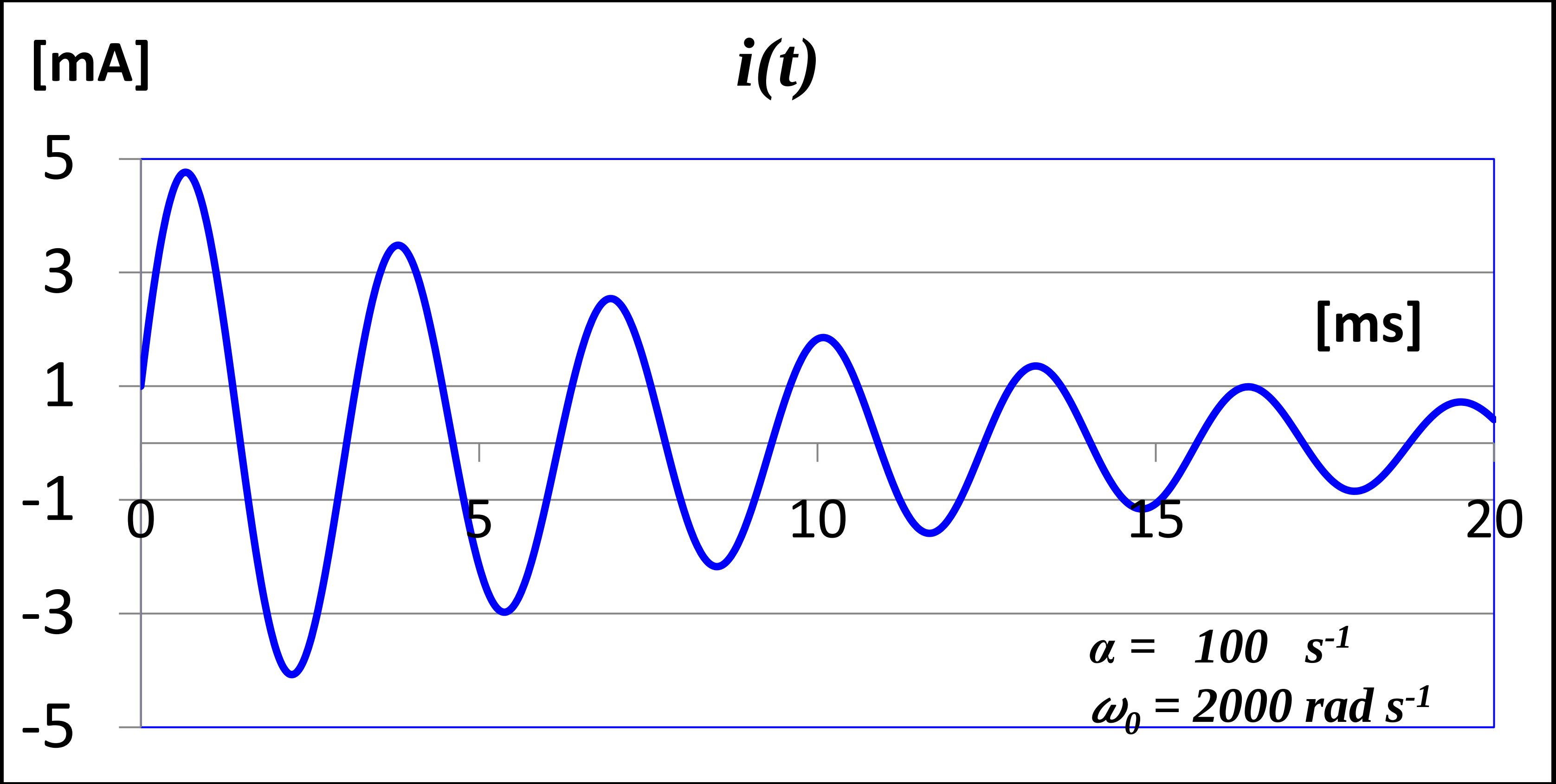


$L = 1H$
$C = 0{,}25\ \mu F$
$R = 0{,}2\ k\Omega$
$v_0 = -10V$
$I_0 = 1mA$

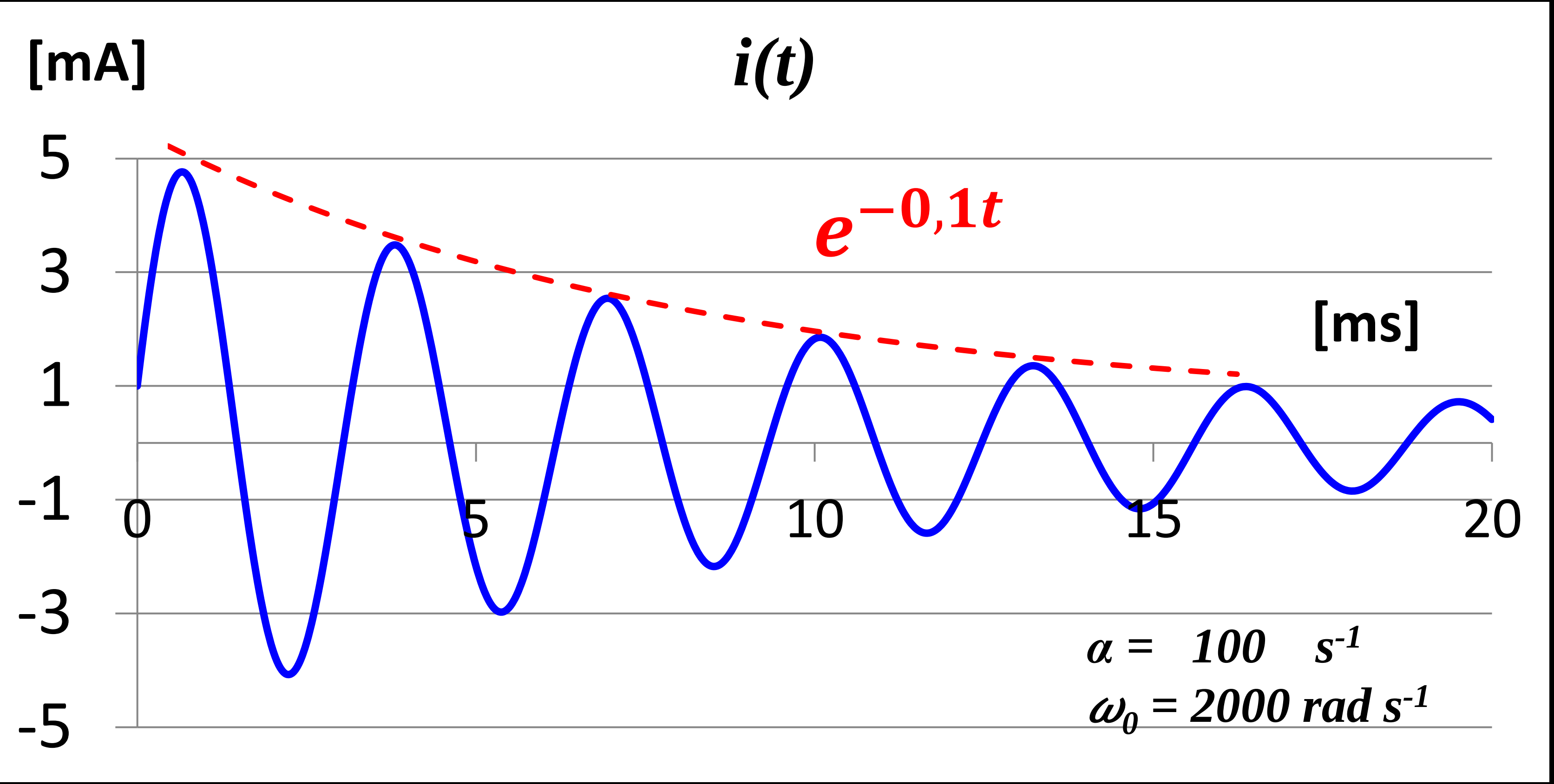
$\alpha = 100\ s^{-1}$
$\omega_0 = 2000\ rad\ s^{-1}$

$$i(t) = I_m e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \varphi) \qquad t \geq 0$$

Subamortecida – Gráfico



Subamortecida – Gráfico



Parte Experimental