Resposta em frequência

S=jw

Seja $u = A sen\omega t$

$$y(s) = \frac{k_1}{s+p_1} + \frac{k_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{k_n}{s+p_n} + \frac{k_0}{s+j\omega} + \frac{k_0^*}{s-j\omega}$$

com $p_i, i = 1, \cdots, n$ polos de $G(s)$. Aplicando a transformada inversa tem-se:

$$y(t) = k_1 e^{-p_1 t} + k_2 e^{-p_2 t} + \cdots + k_n e^{-p_n t} + k_0 e^{-j\omega t} + k_0^* e^{j\omega t}, t \geq 0.$$

Em regime permanente

$$y(t) = k_0 e^{-j\omega t} + k_0^* e^{-j\omega t}$$

$$k_0 = A\frac{G(-j\omega)}{-2j} \text{ e } k_0^* = A\frac{G(j\omega)}{2j}$$

Usando a identidade de Euler

$$\begin{aligned} y(t) &= A|G(j\omega)| sen(\omega t + \phi(\omega)) \\ \phi(\omega) &= \tan^{-1}\frac{Im(G(j\omega))}{Re(G(j\omega))} \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= \tan^{-1}\frac{Im(G(j\omega))}{Re(G(j\omega))} \\ G(j\omega) &= \frac{y(j\omega)}{u(j\omega)} = |G(j\omega)|\, e^{j\phi(\omega)} \end{aligned}$$

com $\phi(\omega)$ a defasagem entre $u(t)$ e $y(t)$.

A resposta consiste então da magnitude e fase de $G(j\omega)$ $-Diagrama\ de\ Bode$

Diagrama de Bode

Sistema de primeira ordem

$$G(j\omega) = \frac{K(1+T_1 j\omega)}{(1+T_2 j\omega)}$$

Fator $(1+T_2 j\omega)^{-1}$

Equação de módulo

$$20\log\left|\frac{1}{1+T_2 j\omega}\right| = -20\log\sqrt{1+\omega^2T_2^2}\ dB.$$

Equação de fase

$$\phi(G(j\omega)) = -\tan^{-1}\omega T_2.$$

Fator $(1+T_1 j\omega)$

Equação de módulo

$$20\log|1+T_1 j\omega| = +20\log\sqrt{1+\omega^2T_1^2}\ dB.$$

Equação de fase

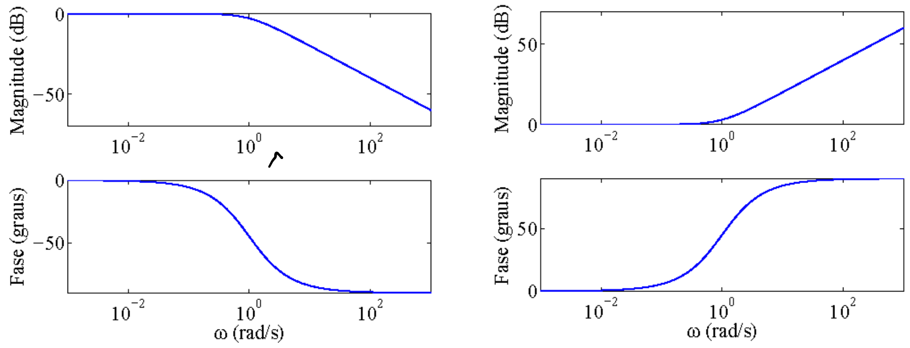
$$\phi(G(j\omega)) = \tan^{-1}\omega T_1.$$

A unidade logarítmica na base 10 usada para a magnitude de Bode é o decibel (dB). O decibel indica uma relação entre duas quantidades definido como um décimo de um bell, unidade logarítmica proposta por Alexander Graham Bell para indicar a relação entre duas potências P_1 e P_2, ou seja, o ganho de potência dado por:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 10\log 10\frac{P_2}{P_1}.$$

O ganho pode ser dado em relação a duas tensões V_1 e V_2 usando $P = \frac{V^2}{R}$:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log 10\frac{V_2}{V_1}.$$



$$T_1 = T_2$$

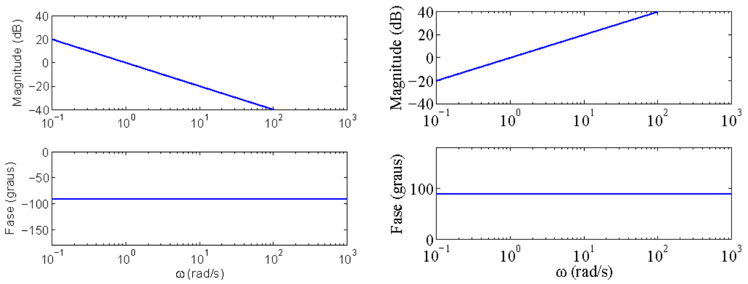
Diagrama de Bode

Polo ou zero na origem

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}.$$

com módulo e fase dados por:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= 20\log\left|\frac{1}{j\omega}\right| = -20\log\omega\ dB \\ \phi(G(j\omega)) &= -90^0. \end{aligned}$$



Se for zero em vez de polo tem-se:

$$G(j\omega) = j\omega.$$

com

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= 20\log|j\omega| = 20\log\omega dB \\ \phi(G(j\omega)) &= 90^\circ. \end{aligned}$$

Diagrama de Bode

Sistema de segunda ordem

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

A magnitude e fase são dadas por:

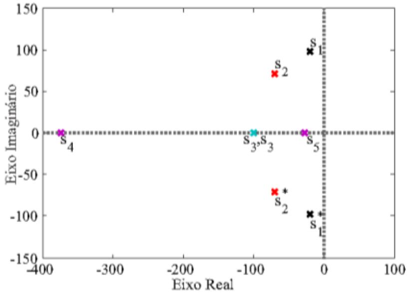
$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}.$$

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1}\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}.$$

Assíntota

$\omega \gg \omega_n$

$$20\log|G(j\omega)| = -40\log\frac{\omega}{\omega_n}.$$



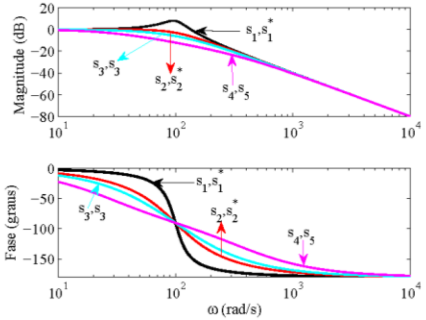
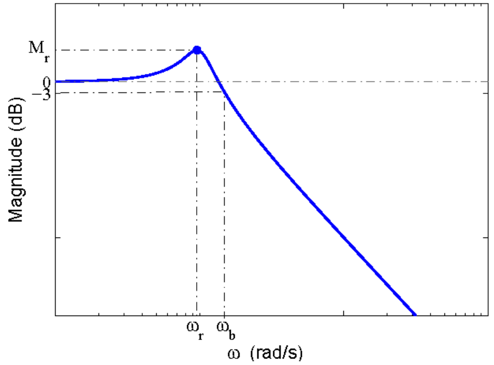


Diagrama de Bode

Sistema de segunda ordem

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$



Índices de desempenho

Pode-se definir vários índices de desempenho no domínio da frequência como segue:

- M_r é a magnitude de pico;
- ω_r é a frequência de pico;
- ω_b é a largura de faixa, medida quando o ganho do sistema cai 3dB em relação à magnitude referente a $w \to 0$.

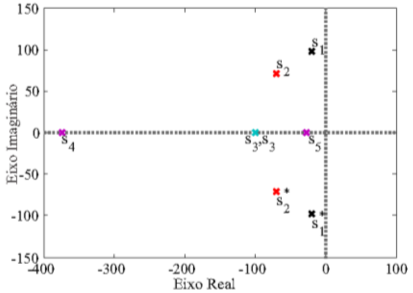
$$M_r = |G(j\omega)|_{máx} = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

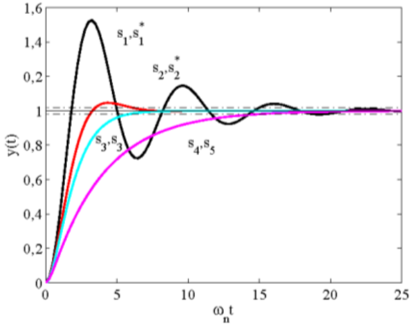
$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \quad (0 < \xi < 0,707)\,.$$

Diagrama de Bode

Índices de desempenho

$$
\begin{aligned}
t_r &= \frac{\pi - \tan^{-1}(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi})}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}};\\
t_r &\cong \frac{1,8}{\omega_n}\ \text{(caso sobreamortecido)}\\
t_s(5\%) &= \frac{3}{\xi\omega_n};\ t_s(2\%) = \frac{4}{\xi w_n}\\
t_p &= \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\\
M_p &= \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)}100\%.
\end{aligned}
$$





Exercícios

Exercício 1

Considere o sistema descrito pela função de transferência $G(s)$ dada por:

$$G(s) = \frac{3 \times 10^5}{(s + 1000)(s + 4000)(s^2 + 20s + 2600)}.$$

(a) Calcular os polos de $G(s)$.

(b) Esboçar o diagrama de Bode para $G(s)$ usando assíntotas.

(c) Obter o diagrama de Bode no Matlab e comparar o diagrama obtido com o diagrama assintótico obtido no item anterior.

(d) Dado que os polos dominantes estão associados com as dinâmicas mais lentas do sistema, como é possível identificar estes polos no diagrama de Bode?

(e) Determinar uma nova função de transferência denotada $G_1(s)$ de 2ª ordem com polos iguais aos polos complexos de $G(s)$. Estes polos são dominantes?

(f) Para $G_1(s)$ calcular a frequência de ressonância denotada ω_r e o pico de ressonância denotado M_r e comparar com os valores obtidos através do diagrama de Bode para $G(s)$. Usar as seguintes expressões para obter ω_r e M_r:

$$\begin{aligned} \omega_r &= \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2} \\ M_r &= \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}. \end{aligned}$$

(g) Verificar se o diagrama de Bode possui frequências de cruzamento de fase. Qual a implicação da existência dessa frequência em caso de implementar uma realimentação unitária negativa para o sistema descrito pela função de transferência $G(s)$?

Exercício 2

A função de transferência de malha aberta de um reator químico é dada por:

$$G(s) = \frac{8e^{-0,2s}}{s(s + 4)(s + 12)}$$

(a) Plotar o diagrama de Bode de $G(s)$. Lembrar que

$$\begin{aligned} |e^{-0,2j\omega}| &= 1 \\ \angle e^{-0,2j\omega} &= -0,2\omega \text{ (rad)}. \end{aligned}$$

Exercícios

Exercício 3

Considere as equações de um pêndulo linearizadas em torno do ponto de equilíbrio estável

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-g}{\ell} & \frac{-b}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

em que $x = [\theta\ \dot{\theta}]^T$ e u uma força denotada F aplicada pelo vento.

(a) Definindo $y = x_1$, obter a função de transferência $G(s)$ entre u e x_1.

(b) Suponha que a força aplicada pelo vento é do tipo $F(t) = Asen(\omega t)$ com ω na faixa de 0,02 e 2 Hz. Para g = 9,8 m/s^2, ℓ = 0,4 m, m = 0,1 kg e b = 0,25 N.m.s, obter o diagrama de Bode na faixa de interesse.

(c) Usando o diagrama de Bode, obter o valor de frequência da força aplicada que produziria a maior amplitude na resposta do ângulo θ. Usando $\theta(t) = A|G(j\omega)|sen(\omega t + \phi)$ com $\phi = \angle(G(j\omega)$ verificar que a amplitude máxima para a força pode ser escrita em termos do θ máximo como $A_{max} = \dfrac{\theta_{max}}{84\%}$.