Critério de Nyquist

Vilma A. Oliveira

USP São Carlos

Aula 6b

Colaboradores

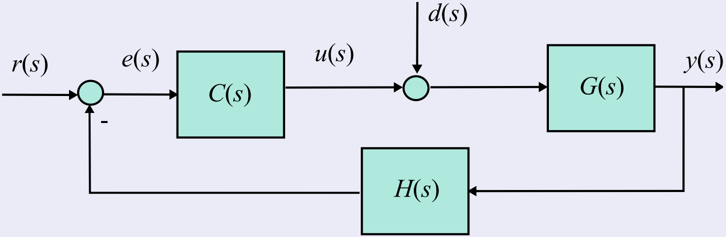
Elmer Alexis Gamboa Peñaloza
Rodolpho Vilela Alves Neves

Introdução

Esta aula deve ser ministrada de forma interativa utilizando um microcomputador com o aplicativo Matlab instalado. Tem por objetivo apresentar aos alunos os conceitos e funções Matlab básicos em análise de estabilidade via diagrama de Nyquist tratados no Capítulo 6. No final da apresentação será proposta uma tarefa extraclasse a ser iniciada na sala de aula. Pode ser atribuída nota à tarefa realizada desde que a sua solução seja encaminhada e a aluna ou aluno tenha participado da aula. A solução pode ser enviada à professora ou professor via a plataforma Moodle de disciplinas, por exemplo.

Sistema realimentado

O sistema realimentado pode ser representado como na figura com o controlador, planta e sensor, representados por funções de transferência.



Função de transferência

$$T(s) = \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)H(s)}$$

$$y(s) = \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)} r + \frac{G}{1 + G(s)C(s)} d(s)$$

Equação característica

Seja o ganho de malha aberta $L(s) = G(s)C(s)$ com realimentação unitária $H(s) = 1$ e escreva:

$$T(s) = \frac{n_L(s)}{d_L(s) + n_L(s)}$$

com $L(s) = \frac{n_L}{d_L}$. A equação característica é $1 + L(s) = 0$ e o polinomio característico $d_T(s) = d_L(s) + n_L(s)$. Assim, $n_L(s) = n_T(s)$, indicando que os zeros da malha aberta são os zeros da malha fechada. O sistema de malha fechada é estável se todas as raízes de $d_T(s)$ tiverem parte real negativa, ou seja, $d_T(s)$ for Hurwitz.

Critério de Nyquist

O critério de Nyquist foi proposto por H. Nyquist na década de 1930 como um método para determinar a estabilidade com base na resposta em frequência. É baseado no princípio do argumento de Cauchy (variáveis complexas).

Aplicação

Pode ser utilizado não só para verificar se sistema é estável, mas para calcular as margens de estabilidade.

Relaciona a resposta em frequência com o número de polos no semiplano lateral direito (SPLD) do plano s.

Aplica-se a sistemas de fase mínima, classe de sistemas com atraso de tempo e sistemas multivariáveis.

Princípio do argumento

Sejam um contorno no plano s denotado Γ e $s*$ um ponto neste contorno. Seja um mapeamento de uma função complexa $F(s)$ em $s = s*$ denotado Γ_F. Sejam Z e P o número de zeros e polos dentro do contorno Γ. O mapeamento de $F(s)$ em $s = s^*$ envolve a origem $Z - P$ vezes no sentido horário.

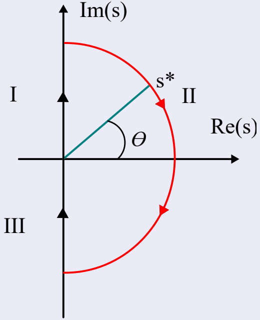
O princípio do argumento pode ser verificado facilmente usando o seguinte fato:

$$\angle F(s^*) = \sum_{i=1}^{Z} \angle F(s^* - z_i) - \sum_{j=1}^{P} \angle F(s^* - p_j)$$

em que z_i e p_j denotam os zeros e polos de F(s), respectivamente, dentro do contorno Γ.

O contorno no plano s deve ser o semiplano lateral direito denotado contorno de Nyquist

Contorno de Nyquist



Contorno de Nyquist para estudo da estabilidade do sistema realimentado com $s^* = Re^{j\theta}$. No trecho I tem-se $s^* = j\omega$, no trecho II $s^* = Re^{j\theta}, R \to \infty$, $\theta \in (\pi/2, -\pi/2)$ e no trecho III, $s^* = -j\omega$

Aplicando o princípio do argumento

Seja $F(s) = 1 + L(s)$
O mapeamento de $1 + L(s)$ em $s = s^*$ com s^* percorrendo o contorno de Nyquist no sentido horário, envolve a origem N vezes com

$$N = P_f^+ - P_a^+ \tag{1}$$

P_f^+: número de polos do sistema a malha fechada no SPLD do plano s
P_a^+: número de polos da malha aberta no SPLD do plano s.

O número de envolvimentos da origem por $F(s) = 1 + L(s)$ é o mesmo que o envolvimento do ponto $-1 + j0$ por $F(s) = L(s)$ e assim o critério de Nyquist segue.

Teorema de Nyquist

O número de polos no SPLD do plano s do sistema a malha fechada é dado por:

$$P_f^+ = N + P_a^+ \tag{2}$$

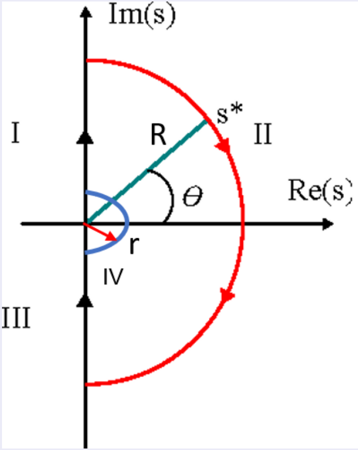
em que N o número de envolvimentos do ponto $-1 + j0$ do plano s. Para estabilidade $P_f^+ = 0$ e tem-se que

$$N = -P_a^+ \tag{3}$$

com o sinal menos denotando o sentido anti-horário.

O contorno não pode conter polos ou zeros. Assim, o contorno de Nyquist é alterado como segue para o caso de L(s) conter polos na origem

Contorno de Nyquist



Contorno de Nyquist caso em que $L(s)$ contém polos na origem. Adicionado o trecho IV com $s^* = re^{j\theta}, r \to 0, \ \theta \in (\pi/2, -\pi/2)$ uma vez que o contorno não pode conter polos nem zeros.

Construindo o diagrama de Nyquist

Mapeamento $s*$ percorrendo o contorno de Nyquist

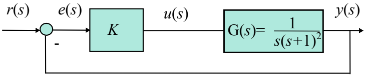
O diagrama de Nyquist é um gráfico no plano L(s) (parte real de L(s) versus parte imaginária de L(s)) e é construído a partir do mapeamento da variável de Laplace s^* quando percorre os trechos I a IV no contorno de Nyquist no plano s.

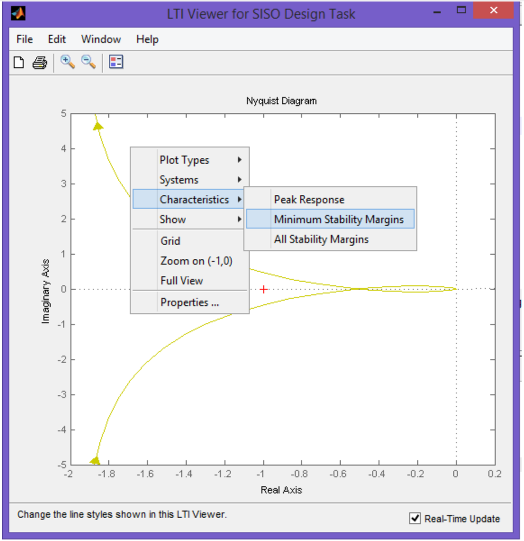
L(s) contém polos imaginários puros

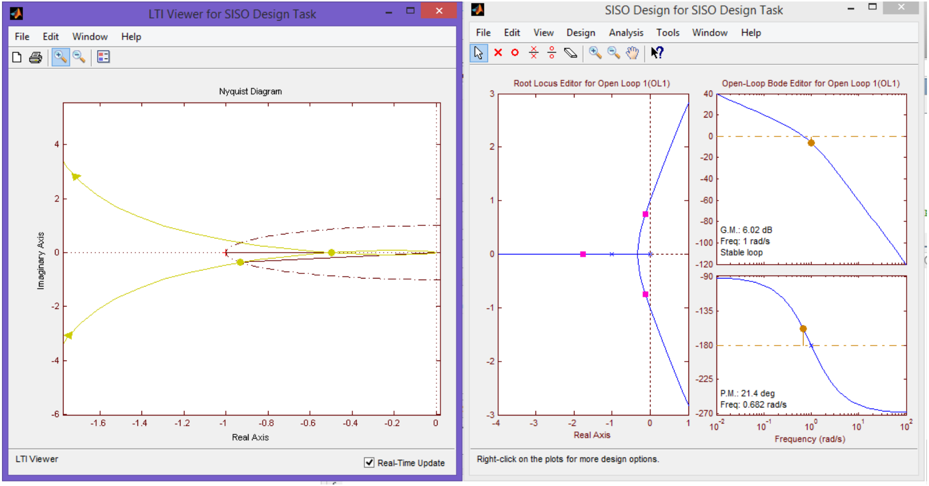
Caso L(s) contenha polos imaginários puros, polos conjugados, proceder de maneira similar ao caso de polos na origem e adicionar contornos no semi plano lateral direito ao redor dos polos conjugados com $s = re^{j\theta}$ e fazer $r \to 0$.

Exemplo 1

Usar a função nyqlog.m para fechar o diagrama de Nyquist
L1=K/(s*(s+1)^2)
Escolher valor para
K=;
sisotool(L1)





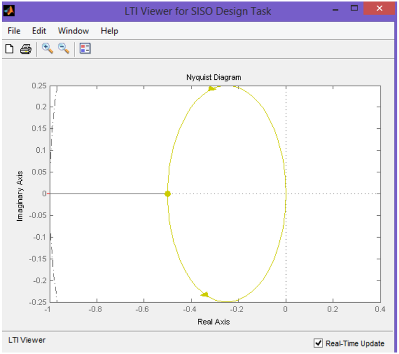


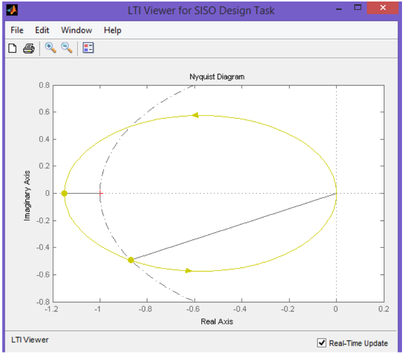
Sistema estável

$N = 0; P_a^+ = 0 -> P_f^+ = 0$

Usar nyqlog(L1) para confirmar como o diagrama fecha

Exemplo 2

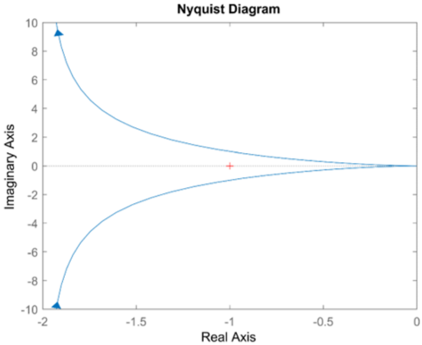


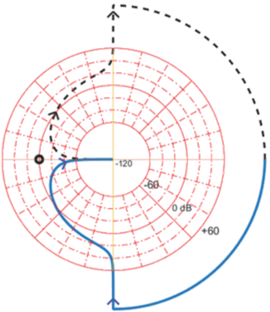


Instável:
N=0, Pma+=1, Pmf+=1
s=tf('s'); L2=0.5/(s-1);
nyquist(L2)

Estável
N=-1, Pmf+=0
L3=2.3/(s-1)
nyquist(L3)

Exemplo 3

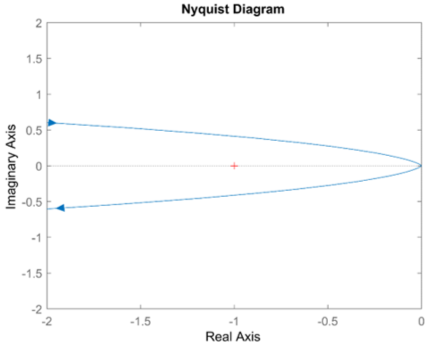


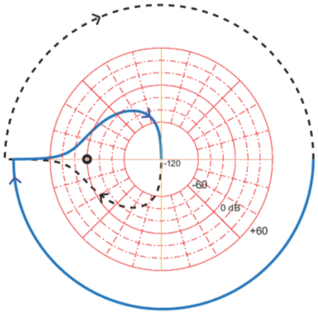


Estável:
N=0, Pma+=0, Pmf+=0
s=tf('s'); L3=200/(s(s+10));
nyquist(L3)

Diagrama via função nyqlog(L4)
Completando com o trecho IV
$s^* = re^{j\theta}, r \to 0, \ \theta$: -90 a 90
$L3 = 200r^{-j\theta}, \ \theta$: 90 a -90

Exemplo 4





Instável:
N=2, Pma+=0, Pmf+=2
s=tf('s'); $L3 = 200/(s^2(s+10))$;
nyquist(L3)

Diagrama via função nyqlog(L4)
Completando com o trecho IV
$s^* = re^{j\theta}, r \to 0,\ \ \theta$: -90 a 90
$L3 = 200r^{-j2\theta}$, θ: 180 a -180

Condição crítica de estabilidade: os polos cruzam o eixo imaginário

$$|L(j\omega)| = 1 \text{ ou } 20\log G(j\omega) = 0dB \quad (4)$$

$$\angle L(j\omega) = -180. \quad (5)$$

A partir da condição crítica acima, define-se, ω_g como a frequência de cruzamento de ganho ($0dB$), e ω_ϕ como a frequência de cruzamento de fase (-180°).

Margem de fase

A margem de fase é definida como o atraso de fase adicional na frequência de cruzamento do ganho, denotada ω_g, necessário para levar o sistema ao limiar da instabilidade. A frequência de cruzamento do ganho é a frequência na qual $|G(j\omega)|$, o módulo da função de transferência de malha aberta, é unitário ou 0 dB. A margem de fase denotada θ_m pode ser obtida como segue:

$$\theta_m = \angle L(j\omega_g) - 180^o. \tag{6}$$

Margem de ganho

A margem de ganho é definida como o inverso do módulo $|L(j\omega)|$ na frequência de cruzamento da fase denotada ω_ϕ com $L = GC$. A frequência de cruzamento da fase é a frequência na qual $\angle L(j\omega_g)$, o ângulo de fase da função de transferência de malha aberta, é igual a 180°. A margem de ganho denotada θ_m pode ser obtida da seguinte forma:

$$A_m = -20\log|L(j\omega_\phi| \qquad (7)$$

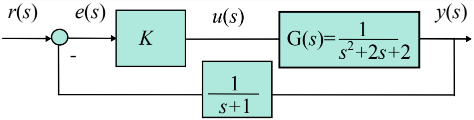
Portanto, calcula-se a margem de ganho na frequência de cruzamento de fase (-180°) e a margem de fase na frequência de cruzamento de ganho (0 dB). No Matlab pode-se obter as margens de estabilidade com o comando:
margin (L) ou allmargin (L)
L na forma de função de transferência ou espaço de estado.

Tarefa para nota

A solução da tarefa deve conter o que foi estudado, o que foi feito e analisado.

Tarefa

Considere o sistema realimentado abaixo:



1. Obtenha o diagrama de Nyquist para o sistema para K=1;
2. Usando o critério de estabilidade de Nyquist, via margem de ganho, determine o intervalo de K para o qual o sistema é estável (considere valores positivos de K);
3. Para K=4, obter as margens de ganho e fase.

Referências

[1] Matlab Product Help.
[2] Matlab Demystified. A Self-Teaching Guide, David McMahon, McGraw Hill.