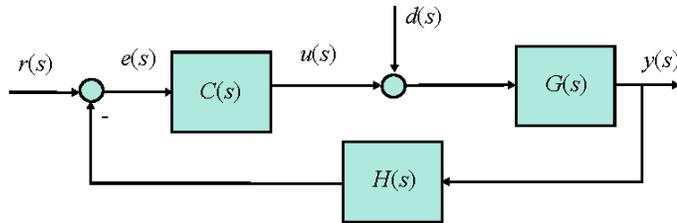


Função sensibilidade e erros de regime permanente

Livro texto Oliveira et al., Capítulo 5

Função sensibilidade



$H = 1$, a saída é da forma:

$$y(s) = \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)}r + \frac{G}{1 + G(s)C(s)}d(s)$$

em que a função de transferência a malha fechada é dada por:

$$T(s) = \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)}$$

Sensibilidade do sistema em relação a variações em G

$$S = \frac{\partial T/T}{\partial G/G}, \quad S = \frac{\partial T(s)}{\partial G(s)} \frac{G(s)}{T(s)}$$

Calculando a derivada parcial, tem-se

$$\frac{\partial T(s)}{\partial G(s)} = \frac{C(s)}{(1 + G(s)C(s))^2}$$

$$S = \frac{1}{(1 + G(s)C(s))^2} \frac{G(s)}{G(s)/(1 + G(s)C(s))} = \frac{1}{1 + G(s)C(s)}$$

Sensibilidade do sistema em relação a variações em H

$$S_H = \frac{\partial T(s)/T(s)}{\partial H(s)/H(s)} = \frac{\partial T(s)}{\partial H(s)} \frac{T(s)}{H(s)}$$

Substituindo,

$$\frac{\partial T(s)}{\partial H(s)} = \frac{-G(s)^2}{(1 + C(s)G(s)H(s))^2}$$

$$S_H = \frac{-G^2(s)}{(1 + G(s)C(s)H(s))^2} \frac{H(s)}{G(s)/(1 + G(s)C(s)H(s))} = \frac{-G(s)C(s)H(s)}{1 + G(s)C(s)H(s)}$$

Para $|G| \gg 1 \rightarrow S_H = -1$

Função sensibilidade

Exemplo 5.1 Considere o circuito amplificador da Figura 5.3. Pede-se obter o ganho entre v_e e v_s , a representação do circuito na forma de diagrama de blocos e analisar a sensibilidade para $A_v = 100000$.

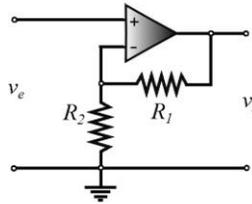


Fig. 5.3: Circuito amplificador não inversor.

Supondo o ganho do amplificador é A_v , a saída v_s é dada por:

$$v_s = A_v(v^+ - v^-), \quad v^+ = v_e$$

e a entrada v^- é dada por:

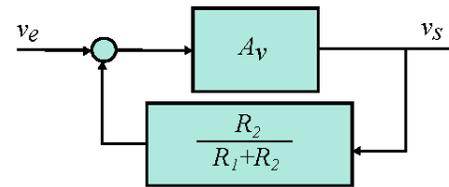
$$\begin{aligned} v^- &= R_2 \frac{v_s}{R_1 + R_2} \\ &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_s. \end{aligned}$$

Obtém-se, portanto:

$$v_s = A_v \left(v_e - \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_s \right)$$

Fazendo $A_v \rightarrow \infty$, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{v_s}{v_e} &= \frac{A_v}{1 + A_v \frac{R_2}{R_1 + R_2}} \\ &= \frac{R_1 + R_2}{R_2}. \end{aligned}$$



Para $\alpha = \frac{v_s}{v_e}$, $G = A_v$ tem-se
para $A_v = 100000$ e $\alpha = 0,01$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1 + G \frac{1}{\alpha}} \\ &= \frac{1}{1001} \end{aligned}$$

o que explica a boa sensibilidade do amplificador operacional com realimentação.

Erros de regime

Sejam $d=0$ e $H=1$

$$\begin{aligned} e(s) &= \frac{1}{1 + G(s)C(s)} r(s) \\ &= \frac{1}{S(s)} r(s) \end{aligned}$$

O erro de regime permanente pode ser obtido usando o teorema do valor final

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s)$$

fornecendo:

$$\begin{aligned} e(s) &= \frac{d_G(s)d_C(s)}{d_G(s)d_C(s) + n_G(s)n_C(s)} \\ &= \frac{d_G(s)d_C(s)}{d_T(s)} r(s) \end{aligned}$$

definindo

$$T(s) = \frac{n_T}{d_T} \quad G(s) = \frac{n_G}{d_G} \quad C(s) = \frac{n_C}{d_C}$$

d_T : polinômio denominador de $e(s)$

Entrada r degrau

$$r(s) = \frac{r_0}{s}$$

$$e(s) = \frac{d_G(s)d_C(s)}{d_T(s)} \frac{r_0}{s}$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ se

$$d_C(0) = 0$$

Assim, um controlador com um polo na origem faz o erro de regime ser nulo

Suponha d_T Hurwitz estável

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{d_G(0)d_C(0)}{d_T(0)} r_0.$$

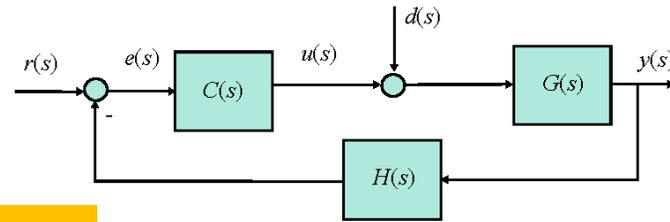
Na literatura: Tipos de sistemas para entrada constante

Sistema tipo "0": limite constante

Sistema tipo "1": limite zero (1 integrador na malha aberta) Porque?

Ver referência Franklin et al. Section 4.2, 6th edition, 1994

Erros de regime



Seja $r(t) = r_0 t + r_1$

$$r(s) = \frac{r_0 + r_1 s}{s^2}$$

$$e(s) = \frac{d_G(s) d_C(s)}{d_T(s)} \frac{r_0 + r_1 s}{s^2}$$

Erro de regime nulo para
entradas degrau e rampa

se o termo s^2 for um fator
de $d_G(s) d_C(s)$

Seja $r(t) = r_0 \text{sen}(\omega_0 t)$

$$r(s) = \frac{r_0 \omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

Erro de regime nulo para
entrada senoidal

se o termo $s^2 + \omega_0^2$ for
um fator de $d_G(s) d_C(s)$

$$C(s) = \frac{\alpha(s)}{(s^2 + \omega_0^2)\beta(s)}$$

Entendendo a ação integral

A ação integral



$$u(t) = k_i \left(\int_0^t e(\tau) d\tau + e(0) \right)$$

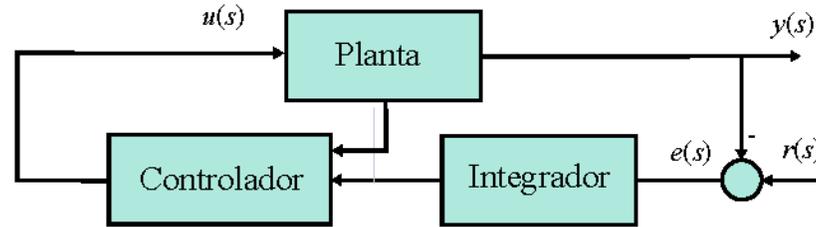
$$\frac{du}{dt} = k_i e$$

Analise

Para $e(t)=0$ $u(t)$ deve ser constante e se $u(t)$ for constante $y(t)$ será constante se o sistema a malha fechada for estável

Para $r(t)$ degrau

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s S(s) r(s) = 0.$$



Rejeição de perturbação

$$y = G(s)C(s)(r - H(s)y) + G(s)d(s)$$

e então, solucionando para $y(s)$ tem-se

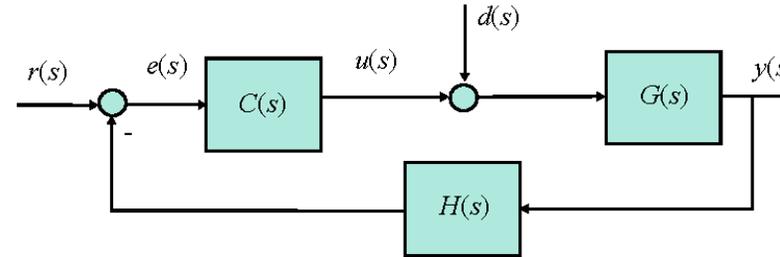
$$\begin{aligned} y &= T(s) r + S(s) G(s) d(s), H(s) \neq 0 \\ &= y_r + y_d. \end{aligned}$$

$$H(s)=1$$

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{n_G(s)n_C(s)}{d_G(s)d_C(s) + n_G(s)n_C(s)} r(s) + \frac{n_G(s)d_C(s)}{d_G(s)d_C(s) + n_G(s)n_C(s)} d(s) \\ &= \frac{d_G(s)d_C(s)}{d_T(s)} r(s) + \frac{n_G(s)d_C(s)}{d_T(s)} d(s) \end{aligned}$$

$$\text{Defina } d(s) = \frac{n_d(s)}{d_d(s)}$$

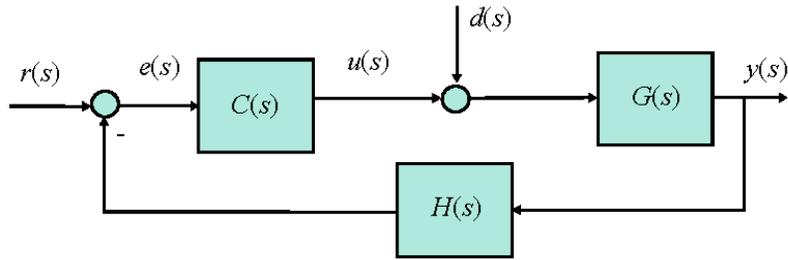
Para anular o termo do erro de perturbação, $d_d(s)$ deve ser divisor de $n_G(s) d_c(s)$ ou seja $n_G(s) d_c(s) / d_d(s)$ resulta em um polinômio



Para seguir um degrau e rejeitar uma perturbação também degrau, o controlador deve ter um integrador e estabilizar o sistema com $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ escolhidos para garantir a estabilidade do sistema a malha fechada:

$$C(s) = \frac{\alpha(s)}{s\beta(s)}$$

Posicionamento de polos



Considerar o problema de seguir uma entrada degrau e rejeitar uma perturbação degrau

O controlador $C(s)$ deve ser próprio e possuir um integrador:

$$C(s) = \frac{\alpha(s)}{s\beta(s)}$$

Para o caso geral, o controlador $C(s)$ deve ser próprio e ser do tipo:

$$C(s) = \frac{\alpha(s)}{m(s)\beta(s)}$$

em que $m(s)$ é um polinômio de menor grau tal que $m(D)r(t) = 0$ e também de $m(D)d(t) = 0$

em que D é o operador diferencial

Posicionamento de polos

$$C(s) = \frac{\alpha(s)}{m(s)\beta(s)}$$

Teorema (SP Bhattacharyya)

O problema de servomecanismo onde $r(t)$ é para ser seguido e $d(t)$ rejeitado com erro nulo de regime para uma classe de entradas pode ser solucionado para uma planta $G(s)$ de ordem n e $d_G m(s)$ e $n_G(s)$ primos (não possuem raízes comuns) com um controlador $C(s)$

próprio $C(s) = \frac{\alpha(s)}{m(s)\beta(s)}$. Se o grau de $\beta(s)$ for escolhido igual a $n - 1$ e o grau de $m(s) = m$, então $m + 2n - 1$ raízes do polinômio característico $d_T(s)$ podem ser arbitrariamente atribuídas escolhendo

$$\text{grau } \alpha(s) \leq \text{grau } \beta(s) + m$$

Exemplo 5.2 *Seja a resposta de uma sistema sem realimentação com a perturbação na entrada da planta dada por:*

$$y(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+4)}r(s) + \frac{2}{(s+2)(s+4)}d(s)$$

Pede-se encontrar um controlador para estabilizar, seguir uma entrada degrau sem erro e rejeitar uma perturbação degrau.

O controlador deve ter um integrador e estabilizar o sistema com $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ escolhidos para garantir a estabilidade do sistema a malha fechada:

$$C(s) = \frac{\alpha(s)}{s\beta(s)} \quad \begin{array}{l} n = 2, m = 1, d_G m(s) = (s+2)(s+4)s, \\ n_G = s - 1 \end{array}$$

Posicionamento de polos

Assim, $\beta(s) = \beta_0 + \beta_1 s$

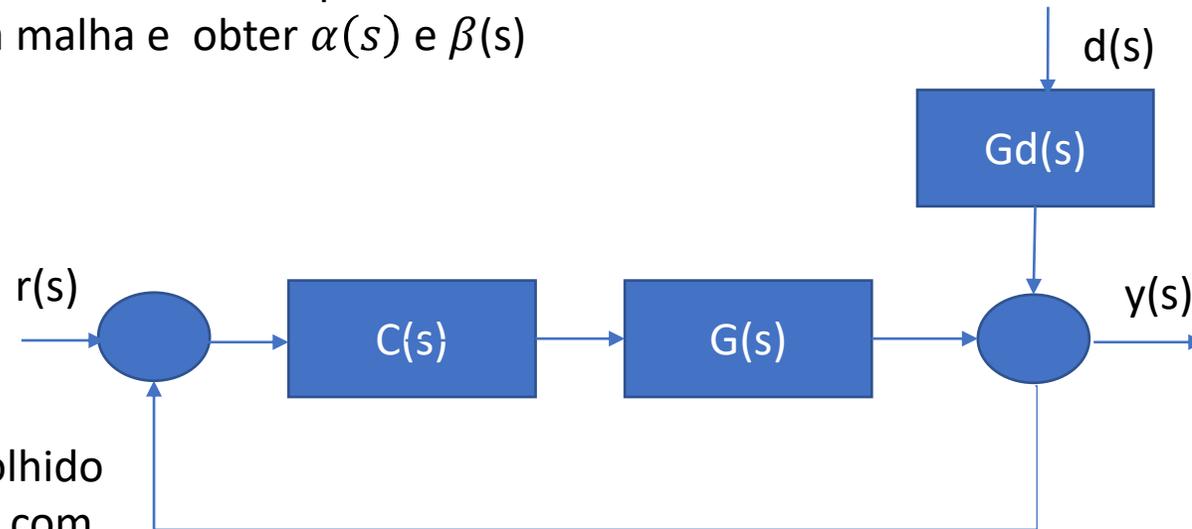
$\alpha(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2$

Escolher os polos fechada para dominância de um polo complexo conjugado escolhido da malha e obter $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ igualando ao polinômio $d_T(s)$:

$$d_T(s) = d_G d_C + n_G n_C$$

Pede-se:

1. Obter os coeficientes de $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ para o polinômio escolhido
2. Simular o sistema realimentado com o controlador projetado $C(s)$ para entrada $r(t)$ e $d(t)$ do tipo degrau.
3. Plotar o erro de regime e resposta a $d(t)$.



Escolher a função de transferência de malha fechada desejada a partir das especificações de desempenho no tempo

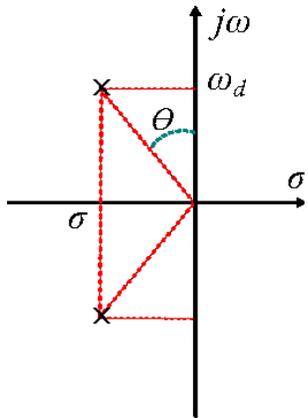
Sistema típico de segunda ordem

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\delta(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2.$$

$$s_{1,2} = -\sigma \pm j \omega_d$$

$$\sigma = -\xi\omega_n. \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$



Escolher a região desejada para os polos dominantes e completar a ordem do polinômio de acordo a ordem da planta e controlador com polos distantes à esquerda

Exemplo 4.8 A região do plano-s que reflete as seguintes especificações: $M_p \geq 11\%$, $t_p \leq 2,3$ pode ser obtida para um sistema de 2ª ordem dominante.

Usando as fórmulas para tempo de pico e percentagem de sobrepassagem tem-se:

$$\frac{\pi}{\omega_d} \leq 2,3, \quad \text{sen } \theta \geq 0,55.$$

A região encontrada é mostrada na Figura 4.21. O valor do par de polos para a região com $\omega_d = 2,3$ e $\theta = 0,55$ é $p_{1,2} = -0,55 + j1,36$.

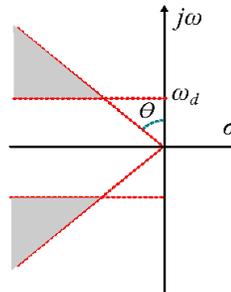
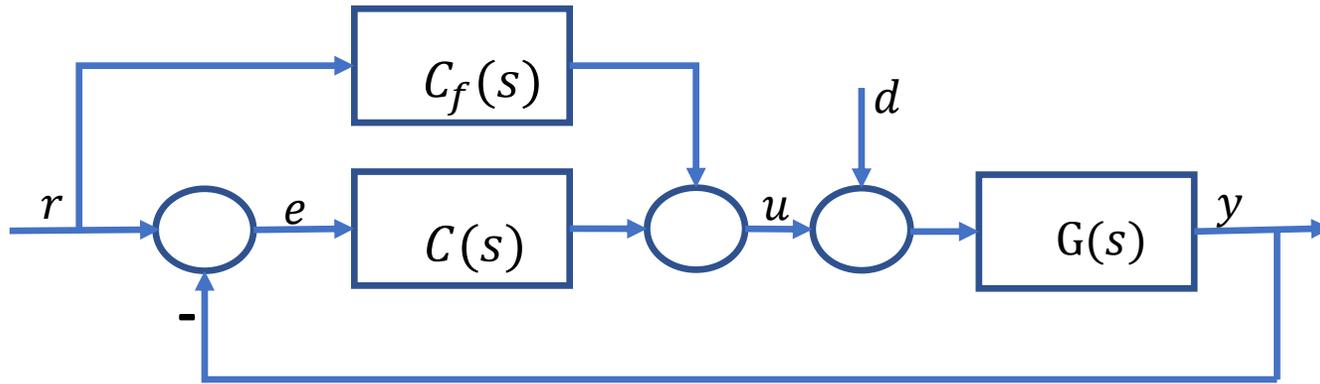


Fig. 4.21: Região do plano-s satisfazendo especificações.

Cancelamento de zeros à esquerda com o controlador feedforward



$$u = C_f(s)r + C(r - y) = (C_f(s) + C)r - Cy$$

$$y = G(s)(C_f(s) + C)r - G(s)C(s)y$$

$$\frac{y}{r} = \frac{G(s)(C_f(s) + C(s))}{1 + G(s)C(s)} \longrightarrow T_d(s) \text{ desejado}$$

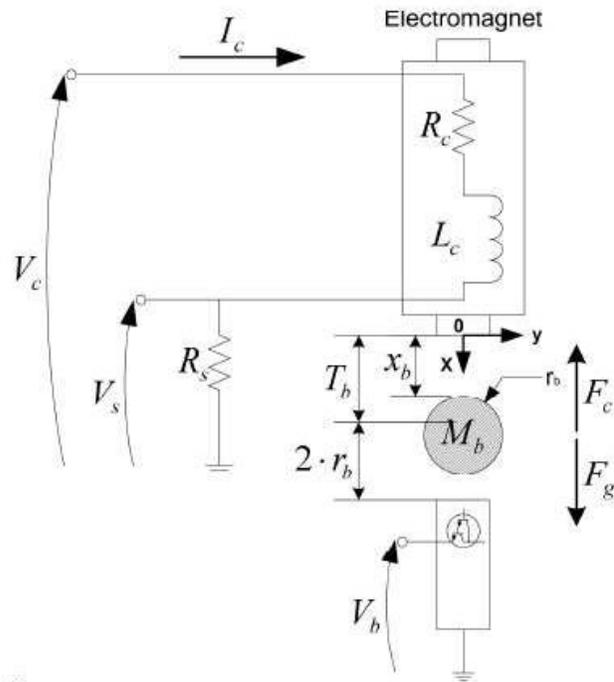
Escolher os polos da função de transferência de malha fechada $T_d(s)$ conforme as especificações de projeto

$$C_f(s) = \frac{T_d(s)(1 + G(s)C(s)) - G(s)C(s)}{G(s)}$$

$C_f(s)$ deve ser própria

$$C_f(s) = \frac{d_G n_T (d_G d_C + n_G n_C) - n_G n_C}{d_T n_G d_G d_C}$$

Exemplo: controle de corrente Maglev



Manual kit Maglev Quanser

$$G_c(s) = \frac{I_c(s)}{V_c(s)}$$

$$V_c(s) = (R_c + R_s)I_c(s) + L_c s I_c(s)$$

$$I_c(s) = \frac{V_s(s)}{R_s}$$

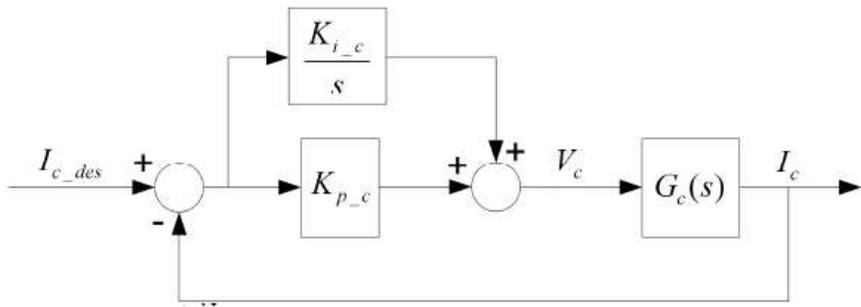
$$G_c(s) = \frac{K}{\tau_c s + 1}$$

$$K = \frac{1}{R_c + R_s}$$

$$\tau_c = \frac{L_c}{R_c + R_s}$$

Exemplo: controle de corrente Maglev

Controlador PI



$$\begin{aligned} I_{cmax} &= 3A \\ L_c &= 412,5 \text{ mH} \\ R_c &= 10 \Omega \\ R_s &= 1 \Omega \end{aligned}$$

$$T_c(s) = \frac{I_c(s)}{I_{c_des}}$$

$$T_c(s) = \frac{K_{p-c}s + K_{i-c}}{L_c s^2 + (R_c + R_s + K_{p-c})s + K_{i-c}}$$

Pede-se

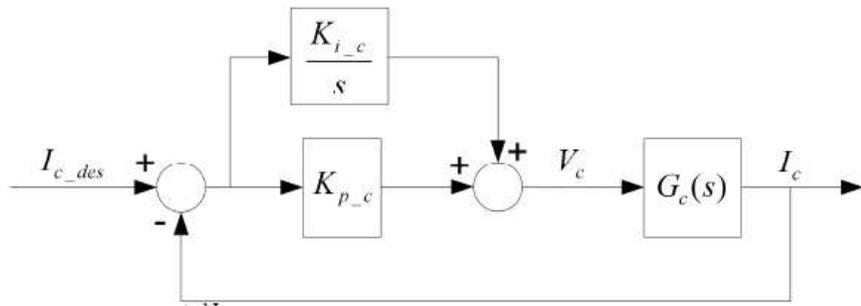
- 1) Obter a equação característica
- 2) Escrever a equação característica em termos dos polos desejados
- 3) Determinar K_{i-c} e K_{p-c} para obter as seguintes especificações

$$t_r \leq 0,035 \text{ [s]}, t_r \approx \frac{1,8}{\omega_n}$$

Saída de corrente sem sobressinal e sem erro de regime

Exemplo: controle de corrente Maglev

Controlador PI



$$T_c(s) = \frac{I_c(s)}{I_{c_{des}}(s)}$$

$$\delta(s) = s^2 + (-p_1 - p_2)s + p_1 p_2$$

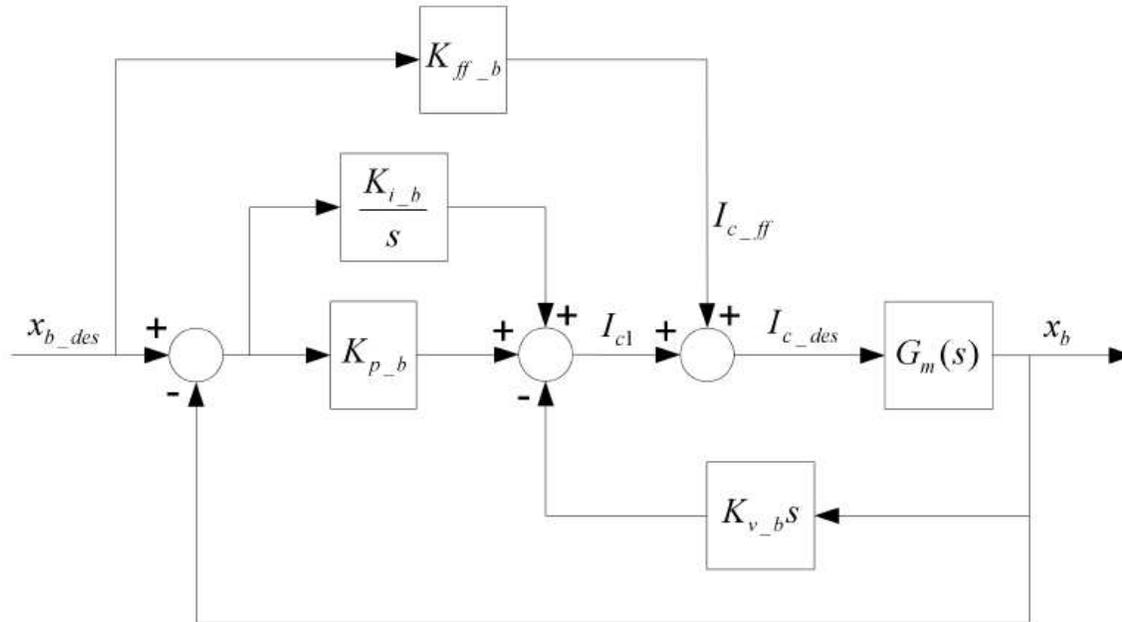
$$1/\tau_c = 26,7$$

Polo de $G_c(s)$

Solução dada no manual

$$K_p = 66,8, \quad K_i = 23,3$$

Exemplo: controle de posição Maglev



Ponto de equilíbrio I_{co}, x_{b0}

$$K_{ff} = \frac{I_{co}}{x_{b0}}$$

Pede-se

1. Obter a função de transferência $T(s) = \frac{x_b(s)}{x_{b_des}}$
2. Escrever a equação característica em função dos polos desejados

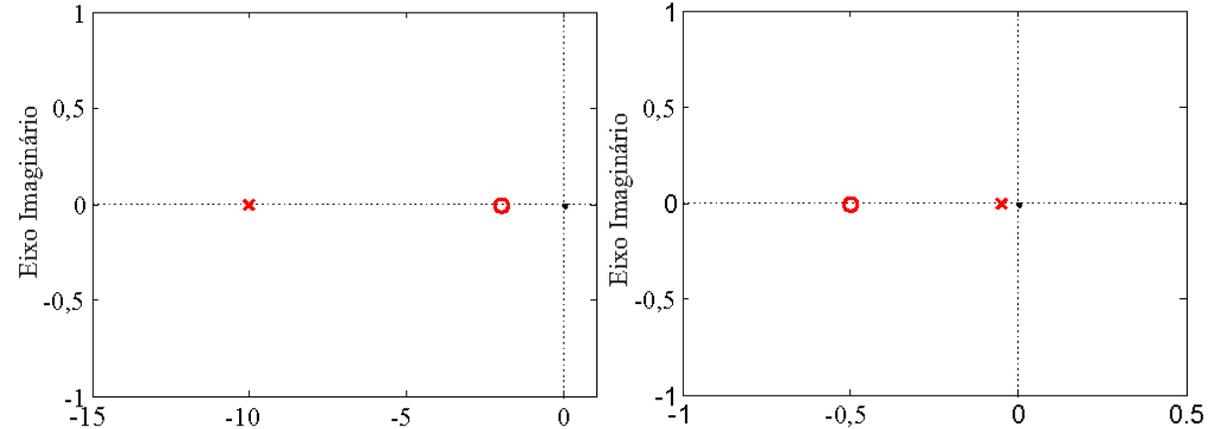
Controlador avanço e atraso de fase

Capitulo 8 livro texto Oliveira et al. 2015

$$C(s) = \frac{K(s + z)}{(s + p)}$$

$$K > 0, z > 0, p > 0, p > z \quad \text{avanço}$$

$$K > 0, z > 0, p > 0, p < z \quad \text{atraso}$$



O controlador avanço adiciona fase próximo à frequência de cruzamento de ganho e aumenta a margem de fase

$$C(s) = \frac{(Ts + 1)}{(\alpha Ts + 1)} \quad 0 < \alpha < 1$$

$$\omega_{\max} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}, \quad \text{sen}\phi_{\max} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

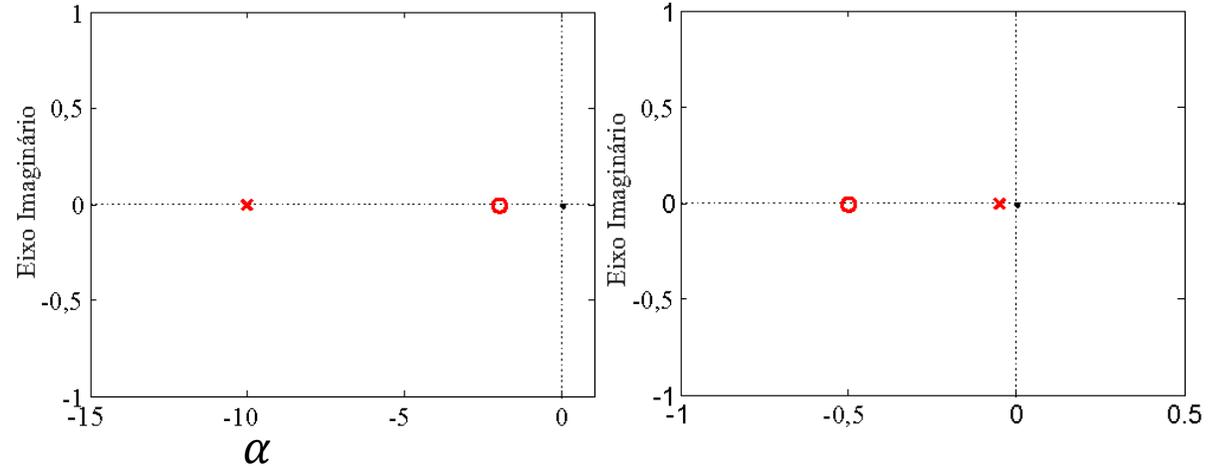
$$\alpha = \frac{1 - \text{sen}\phi_{\max}}{1 + \text{sen}\phi_{\max}}$$

Controlador avanço e atraso de fase

$$C(s) = \frac{K(s + z)}{(s + p)}$$

$$K > 0, z > 0, p > 0, p > z \quad \text{avanço}$$

$$K > 0, z > 0, p > 0, p < z \quad \text{atraso}$$



O controlador atraso desempenha o mesmo papel do controlador PI e aumenta o ganho de baixa frequência de ganho e reduz o erro de regime para entrada degrau de referência e de perturbação

$$C(s) = \frac{\alpha(Ts + 1)}{(\alpha Ts + 1)} \quad \alpha > 1$$

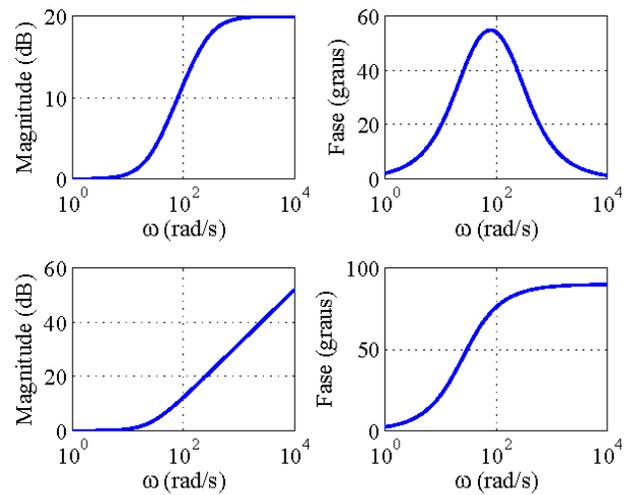
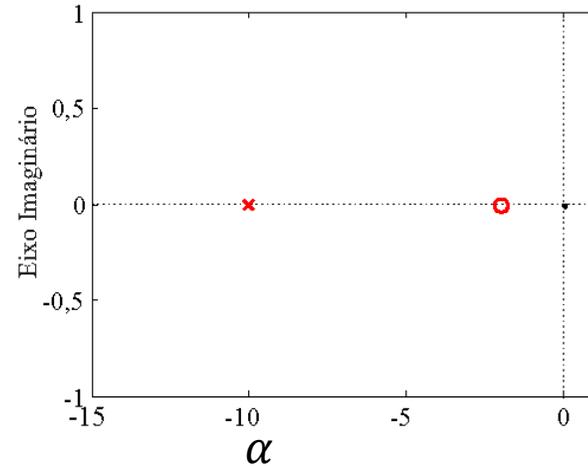
$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sKC(s)G(s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d_G(s)}{sK\alpha n_G(s)} \\ &= \frac{K'}{K\alpha} \end{aligned}$$

Controlador avanço

$$C(s) = \frac{K(s + z)}{(s + p)}$$

$K > 0, z > 0, p > 0, p > z$ avanço

$$C(s) = \frac{(Ts + 1)}{(\alpha Ts + 1)} \quad 0 < \alpha < 1$$



Controlador avanço

Controlador PD

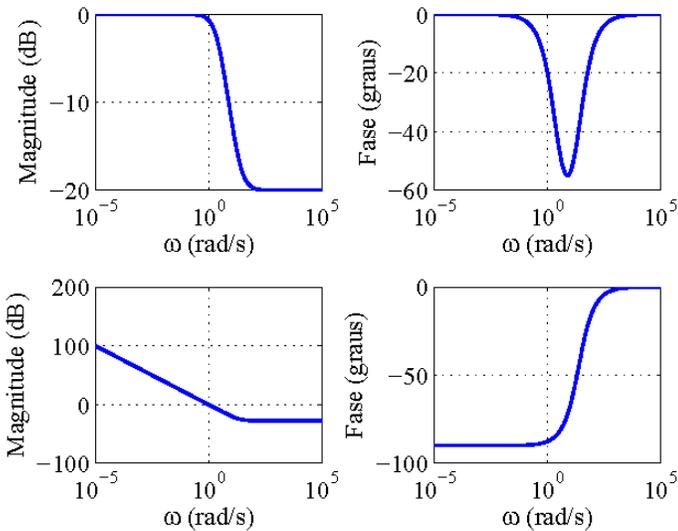
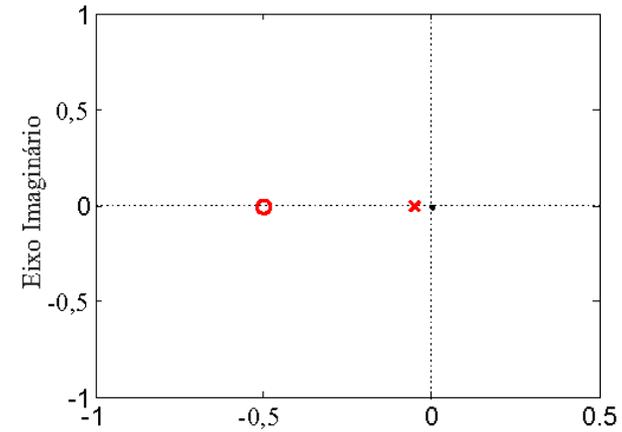
Controlador atraso

$$C(s) = \frac{K(s + z)}{(s + p)}$$

$$K > 0, z > 0, p > 0, p < z$$

$$C(s) = \frac{\alpha(Ts + 1)}{(\alpha Ts + 1)}$$

$$\alpha > 1$$



Controlador atraso

Controlador PI

Controlador avanço: sistema suspensão laboratório de controle

$$f(h, i) = \frac{i^2}{2} \frac{dL(h)}{dh}$$

$$f(h, i) = \frac{-L_0}{2a} \frac{i^2}{(1+h/a)^2}$$

$$m \frac{d^2h}{dt^2} = mg + f(h, i).$$

$$v = Ri + \frac{d(L(h)i)}{dt}$$

$$x = [h \ \dot{h} \ i]$$

$$\dot{x} = F(x, v)$$

$$y = Cx$$

$$F(x, v) = \begin{bmatrix} x_2 \\ g - \left(\frac{L_0(x_1)}{2am} \right) \left(\frac{x_3}{1+x_1/a} \right)^2 \\ -\frac{R}{L}x_3 + \frac{1}{L}v \end{bmatrix}$$

$$C = [c_1 \ 0 \ 0]$$

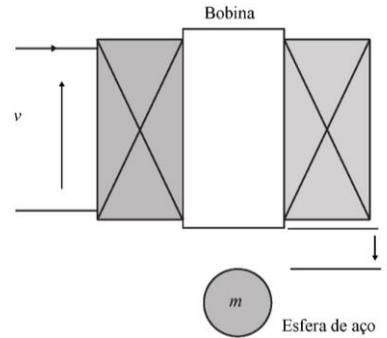
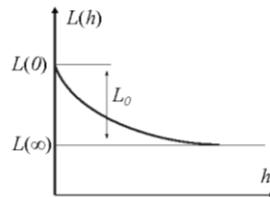


Tabela 3.1: Valores numéricos dos parâmetros físicos do sistema descrito.

massa da esfera	m [kg]	22.6×10^{-3}
resistência da bobina	R [Ω]	21
indutância da bobina aproximada	L [mH]	520
indutância da bobina em torno equilíbrio	L_0 [mH]	24.9
corrente da bobina no ponto de operação	i_e [A]	0.577
posição da bola no ponto de operação	h_e [m]	4.50×10^{-3}
constante a	a [m]	6.72×10^{-3}
constante k_1	k_1 [N/A]	0.770
constante k_2	k_2 [N/m]	39.6
ganho sensor de posição	c_1	-1.7361×10^3
máxima tensão aplicada à bobina	v_{\max} [V]	24.0

$$x = [h \ \dot{h}], v = i^2$$

k atrito viscoso entre ar e esfera

$$z_1 = x_1 - x_{1e}, u = v - v_e$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ g - \frac{k}{m}z_2 - \frac{L_0(u + v_e)}{2am(1 + (z_1 + x_{1e}/a)^2)} \end{bmatrix}$$

```
% Variáveis simbólicas
syms g a L0 m k xie ue z1 z2
% Vetor deslocado em relação ao equilíbrio z=x-xe, u=v-ve
z = [z1; z2];
% Ponto de linearização: xL
nxL = norm(xL)
% Componentes de f(x) na variável deslocada em relação ao equilíbrio xe
F1 = z2;
F2 = g-k/m*z2 -L0 *(u+ve)^ 2/(2*a*m*(1+(z1+x1e)/a)^2)
% Cálculo do gradiente
gradf2 = jacobian(F2,z);
```

Controlador avanço: sistema suspensão laboratório de controle

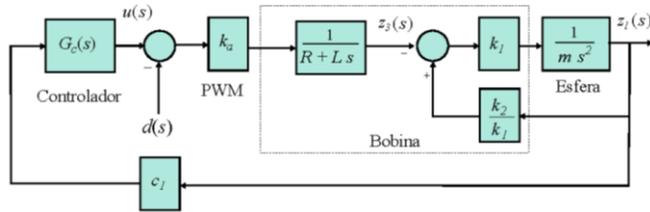


Fig. 6.16: Diagrama em blocos do sistema em malha fechada.

$$L(s) = \frac{-k_a k_1 c_1 C(s)}{Lms^3 + Rms^2 - k_2 Ls - k_2 R}$$

$$C(s) = \frac{k_p(t_z s + 1)}{(t_p s + 1)}$$

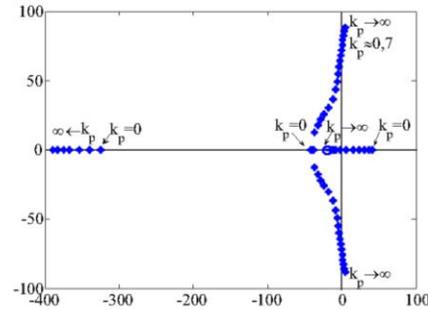


Fig. 6.17: Lugar de raízes do sistema compensado com $t_z = 0.05$, $t_p = 0.003$.

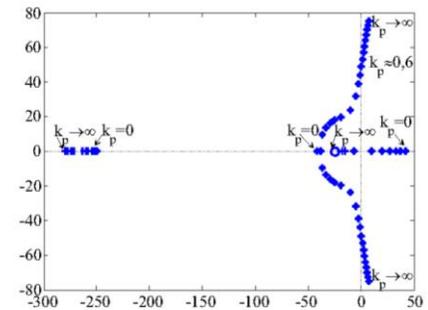


Fig. 6.18: Lugar de raízes com $t_p = 0.004$ e $t_z = 0.04$.

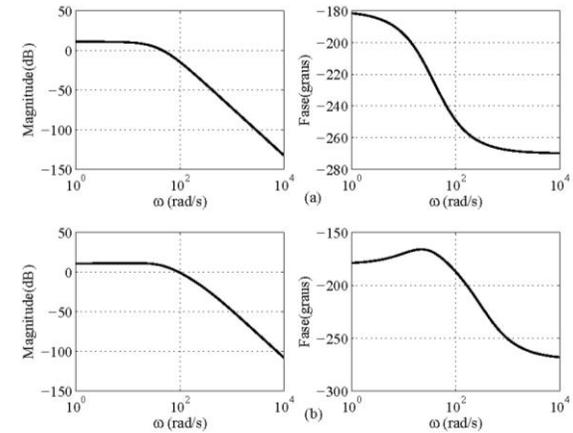


Fig. 6.19: a) Sem controlador, b) com controlador avanço.

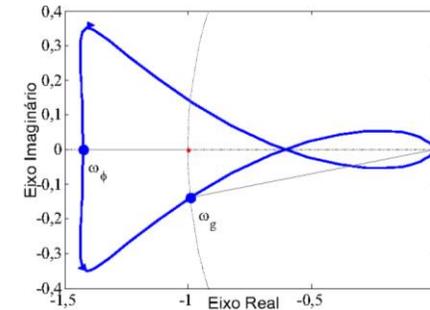


Fig. 6.20: Diagrama de Nyquist e indicação das frequências de cruzamento de ganho e fase usadas para obter margens de fase e ganho, respectivamente.