Espaço e estado e formas canônicas

Vilma A. Oliveira

USP São Carlos

Aula 2b

Colaboradores

Elmer Alexis Gamboa Peñaloza
Rodolpho Vilela Alves Neves
Rafael Fernando Quirino Magossi
Rafael Mariano

Introdução

Esta aula deve ser ministrada de forma interativa utilizando um microcomputador por aluno com o aplicativo Matlab instalado. Tem por objetivo apresentar ao aluno os conceitos e funções Matlab básicos nos tópicos tratados nos Capítulos 2 a 4 sobre a descrição espaço de estado. No final da apresentação será proposta uma tarefa extraclasse a ser iniciada na sala de aula. Pode ser atribuída nota à tarefa realizada desde que a sua solução seja encaminhada e a aluna ou aluno tenha participado da aula. A solução deve ser enviada via área do aluno, pode ser via a plataforma Moodle de disciplinas, por exemplo.

Espaço de estado

Equações diferenciais organizadas como um conjunto de equações diferenciais de 1^a ordem simultâneas, definindo um vetor de estado, cuja solução é dada por uma trajetória no espaço vetorial formando uma equação vetorial.

A descrição espaço de estado é composta pelas equações de estado e de saída:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, u) \\ y &= H(x, u) \end{aligned}$$

$u \in \Re^m$ entrada, $y \in \Re^q$ saída, $x \in \Re^n$ estado e $F(.,.)$ e $H(.,.)$ vetores de dimensões apropriadas.

Estado

O estado de um sistema em $t_0, x(t_0)$, é a quantidade de informação em t_0 que, juntamente com $u \in [t_0, \infty)$ determina unicamente o comportamento do sistema para todo $t \geq t_0$ e descreve a distribuição de energia interna do sistema.

Obtendo a forma espaço de estado

A representação espaço de estado não é única uma vez que o vetor de estado pode ser escolhido de maneiras diferentes, por exemplo, pode-se escolher as variáveis de estado usando o conceito de variável armazenadora de energia ou como uma combinação linear destas.

Exemplo pêndulo simples

A equação de movimento rotacional em torno do centro de massa pela segunda lei de Newton:

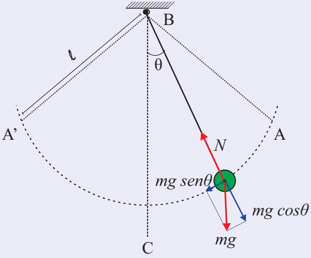
$$I\alpha = T$$

T soma dos torques atuantes na massa em N.m, I momento de inércia em torno centro de massa em Kg.m^2, α a aceleração angular do corpo em rad/s^2.

Pêndulo simples

As forças atuantes na massa m são a tração no fio e o peso mg em que $mg = mgcos(\theta) + mgsen(\theta)$. A primeira componente do peso é anulada pela força de tração no fio. Os torques sobre o pêndulo são o torque aplicado T_u e o torque devido a força peso mg dado por mgℓ sen(θ). Pela lei de Newton tem-se:

$$I\ddot{\theta} = T_u - mg\ell sen(\theta),\ \ddot{\theta} = \frac{T_u}{m\ell^2} - \frac{g}{\ell}sen(\theta)$$



com $I = m\ell^2$ no suporte.

Pêndulo simples

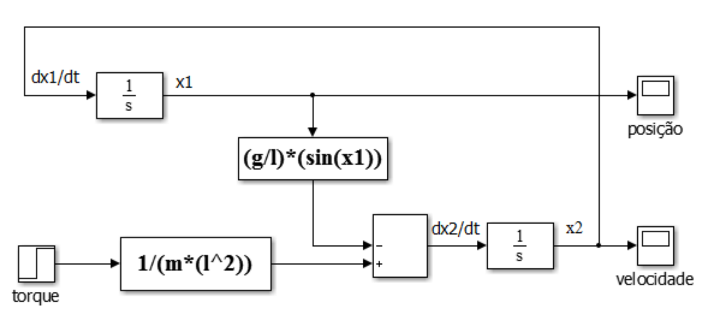
O modelo espaço de estado pode ser construído definindo como vaiáveis de estado a posição θ e a velocidade $\dot{\theta}$, entrada $u = T_u$ e a saída $y = \theta$. Assim, obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{\theta} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{\theta} = \frac{T_u}{m\ell^2} - \frac{g}{\ell} sen x_1 - \frac{b}{m\ell^2} x_2 \end{aligned}$$

em que foi introduzido o torque devido ao atrito viscoso b para considerar amortecimento no movimento. Na forma vetorial tem-se:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\ell} sen(x_1) - \frac{b}{m\ell^2} x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m\ell^2} \end{bmatrix} u$$

Diagrama de simulação do comportamento do pêndulo (b=0)



Definindo sistemas na forma espaço de estado

A partir das matrizes A,B,C and D, usar Gss = ss(A,B,C,D) para criar um sistema espaço de estado. Para obter a função de transferência usar Gtf = tf(Gss).

```
»A = [-2 -1; 1 0];
»B = [1;0];
»C = [1 1];
»D = 0;
» Gss =ss(A,B,C,D);
» G = tf(Gss)
```

G=

$$\frac{s+1}{s^2+2s+1}$$

Continuous-time transfer function

Solução espaço de estado

```
syms t
A = [-1 0; 0 -2];
expm(t*A)
x0=[1 ;2];
x=expm(A*t)*x0 % symbolic
```

Inversa de (sI-A)

```
syms s
A=[-1 1; 2 -2];
Phi=inv(s*eye(2)-A); pretty(Phi)
```

```
expm(A*t)= [ exp(-t), 0]
           [ 0, exp(-2*t)]
```

Simulando a resposta via comandos

```
Gss=ss(A,B,C,D);
t=linspace(0,10); %Define vetor de tempo
u=2*t; % Define entrada
x0=[1; 2;]; %Define condições iniciais
yxo=initial(Gss,x0,t) % Resposta à entrada nula
yu=lsim(Gss,u,t); % Resposta ao estado zero
Yt=yx0+yu; % Resposta total
```

Espaço de estado a partir da função de transferência

Considere a função de transferência:

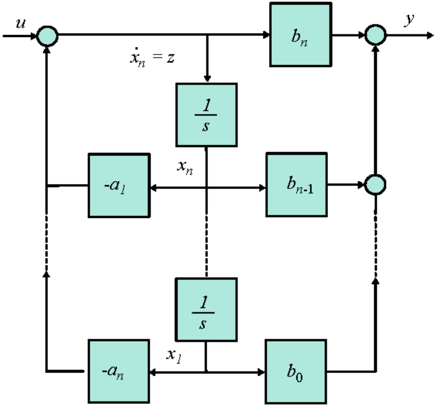
$$G(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s \cdots + a_n}.$$

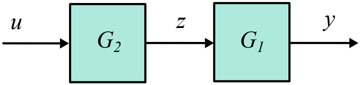
Dividindo e multiplicando por $1/s^n$, pode-se escrever $G(s)$ como o produto de $G_1 G_2$ (ver figura):

$$G(s) = \left(b_n + \frac{b_{n-1}}{s} + \cdots + \frac{b_0}{s^n}\right)\left(\frac{1}{1 + \frac{a_1}{s} + \cdots + \frac{a_n}{s^n}}\right)$$

com G_1 o termo à direita da igualdade e G_2 o segundo. Com $z := G_2 u$ e $y = G_1 z$ usando integradores construir um diagrama de blocos.

Diagrama blocos forma controlável





$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ &\vdots\\ \dot{x}_n &= u - a_1 x_n - \cdots - a_n x_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= b_n\dot{x}_n + b_{n-1}x_n + \cdots + b_0x_1\\ &= (b_{n-1} - b_na_1)x_n + (b_{n-2} - b_na_2)x_{n-1} + \cdots + (b_0 - b_na_n)x_1 + b_nu.\end{aligned}$$

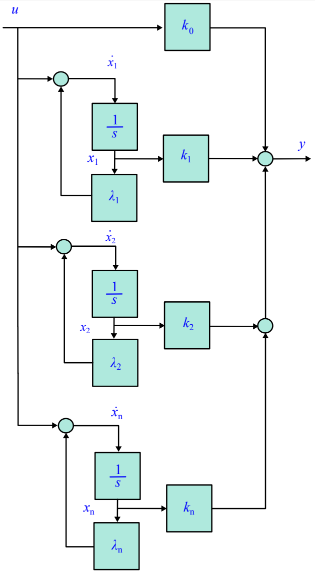
A realização obtida a partir do diagrama de blocos mostrado conhecida como realização canônica controlável tem a forma:

Realização controlável

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_n & \cdots & b_{n-2} - b_n a_2 & b_{n-1} - b_n a_1 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix}.$$

Diagrama blocos forma diagonal



$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + u \\
\dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + u \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= \lambda_n x_n + u \\
y &= k_1 x_1 + \cdots + k_n x_n + k_0 u
\end{aligned}
$$

Realização diagonal

A realização obtida a partir do diagrama de blocos mostrado na figura é conhecida como realização canônica modal e tem a forma:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} k_0 \end{bmatrix}.$$

Exercício

Considere a função de transferência:

$$G = \frac{10s + 50}{s^4 + 10s^3 + 37s^2 + 62s + 40}$$

Usar os comandos do Matlab abaixo para obter realizações de $G(s)$.

```
»s=tf('s'); % Define s como variável de Laplace
»G1=canon(G,'modal'); % Obter a realização diagonal
»G2=canon(G,'companion'); %Obter a realização controlavel
»[A,B,C,D]=ssdata(G1); %Mostrar as matrizes de G1
»[A,B,C,D]=ssdata(G2); %Mostrar as matrizes de G2
```

Tarefa para nota

A solução da tarefa deve conter o que foi estudado, o que foi feito e analisado.

Tarefa

Obtenção da resposta do sistema descrito por G

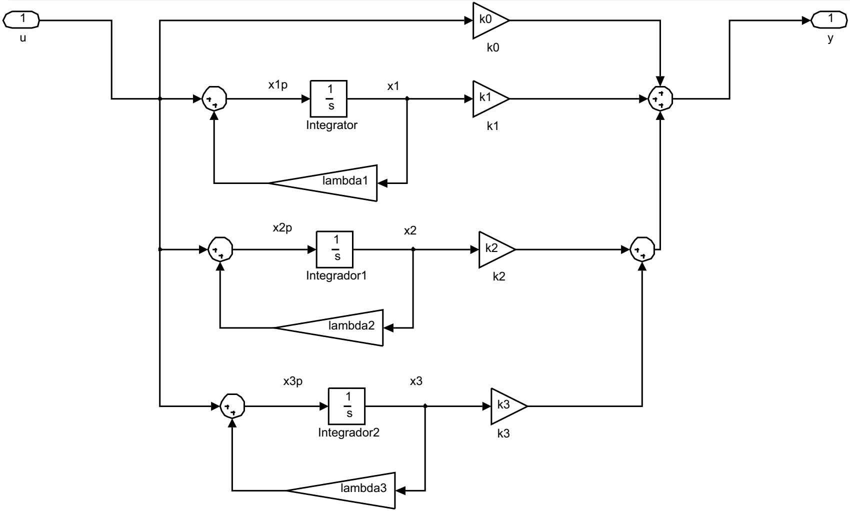
$$G = \frac{10s + 50}{s^4 + 10s^3 + 37s^2 + 62s + 40}$$

1. Plotar em um só gráfico: Respostas à entrada rampa, entrada nula e ao estado zero, resposta completa;
2. Aplicar os teoremas do valor final e inicial quando possível. Justifique;
3. Construir o diagrama Simulink. Usando a função [A,B,C,D]=linmod('sis'), obter a realização espaço de estado na forma canônica controlável e diagonal.

Respostas

1) calculando as raizes do polinômio (denominador)
p=[1 14 56 64]; R=roots(p);
lambda1=R(1,1); lambda2=R(2,1); lambda3=R(3,1);lambda4=R(4,1);
2) calculando as frações parciais (ganhos k)
N=[1 2 0]; %polinomio numerador
D=[1 14 56 64];%polinomio denominador
» [r,p,k] = residue(N,D) %calculo dos ganhos
% onde o vetor r é o residuo ou os
%ganhos e p são os polos
k1=r(1,1); k2=r(2,1); k3=r(3,1); k4=r(4,1);k0=0;
3) Executar o arquivo de simulink: run Realizacao; sim Realizacao
4) Calculando a realização espaço estado forma diagonal
»[Aj,Bj,Cj,Dj]=linmod('Realizacao')
5) Comprobação da realização:
G=ss(Aj,Bj,Cj,Dj)
tf(G)

Diagrama da realização para lambda real



Nota: Para lambda complexo não vai poder implementar no simulink o diagrama acima. Usar a forma modal que é real.