Logo, definindo $\beta = v/c$ e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$\left.\begin{aligned} x &= \gamma\,(x' + \beta\, ct') \\ ct &= \gamma\,(ct' + \beta x') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}\right\} \text{ transf. de Lorentz}$$

Pode-se mostrar que $y = y'$, $z = z'$

- Para $v \ll c \Rightarrow \beta \ll 1$ e $\gamma \simeq 1$

"desprezível"

$$x \simeq x' + vt \quad \text{e} \quad ct \simeq ct' + \beta x' \Rightarrow t = t' + \beta\frac{x'}{c} \Rightarrow t = t'$$

22/6/23

IX.5 Obtendo a lagrangiana da partícula livre

Mínima ação $\Longrightarrow \delta S = 0$

A ação de independe do referencial escolhido, ie Sé invariante de Lorentz. Mas temos apenas ds disponível para uma partícula livre. Então,

integral ao longo da "world line da partícula"

$$S = -\alpha \int_a^b ds$$

por conveniência

cte

Sabemos $S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L = \int ds = c\int dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} \Rightarrow L = -\alpha\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}\; c$

Para determinar α tomemos o limite $v \to 0$:

$$-\alpha\sqrt{1-v^2/c^2} \longrightarrow -\alpha c\left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) \underset{\text{sabemos}}{=} \frac{m}{2}v^2 + \underbrace{c^{te}}_{\text{livre}}$$

$$\Rightarrow \alpha = mc$$

Logo, $L = -mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}$! Determinada pela simetria.

IX.6 Energia e Momento

O momento canonicamente conjugado para uma partícula livre é dado por

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \Longrightarrow P_k = \frac{\partial}{\partial v_k}\left(-mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}\right)$$

$$= -mc^2\frac{1}{2}\frac{-2v_k/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\therefore \boxed{\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = m\gamma\vec{v}}$$

Por outro lado, a Hamiltoniana do sistema é

$$H = \vec{p}\cdot\vec{v} - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + mc^2\left(\sqrt{1-v^2/c^2}\right)$$

$$= \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left[v^2 + c^2 - v^2\right] \Rightarrow \boxed{H = m\gamma c^2}$$

O teorema de Noether aplicado a este sistema leva que o momento canonicamente conjugado é o momento linear e que a energia é a Hamiltoniana $E = H$.

Mais, $\dfrac{E^2}{c^2} = \dfrac{m^2c^2}{1-v^2/c^2}$

mas $\vec{p}^{\,2} + m^2c^2 = \dfrac{m^2 v^2}{1-v^2/c^2} + m^2c^2 = \dfrac{m^2c^2}{1-v^2/c^2}$

$$\boxed{E^2 = p^2c^2 + m^2c^4}$$

Além disso, $\boxed{\vec{p} = E\dfrac{\vec{v}}{c^2}}$

IX.7 Quadrivetores

Definimos o (4) vetor contra-variante

$$x^\mu = (ct, \vec{x}) \qquad \mu = 0, 1, 2, 3$$

cuja transformação por Lorentz definimos anteriormente.

Um (quadri) vetor contravariante é um conjunto de 4 quantidades $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$ que sob transformações de Lorentz comporta-se como x^μ, i.e,

$$\begin{cases} A^0 = \gamma\left(A'^0 + \beta A'^1\right) \\ A^1 = \gamma\left(A'^1 + \beta A'^0\right) \\ A^2 = A'^2 \\ A^3 = A'^3 \end{cases}$$

Vejamos que $p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$ é um quadrivetor contravariante. Para tanto definimos a quadri-velocidade

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{ds}$$

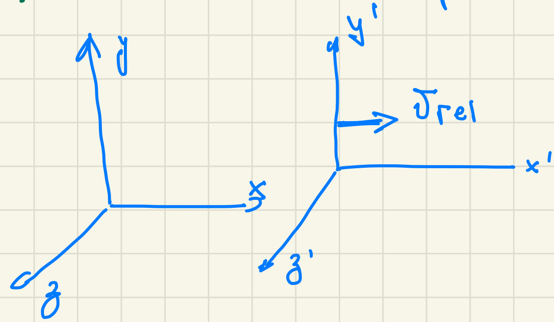
Como dx^μ é um quadri-vetor e ds é invariante por Lorentz segue que u^μ é um quadri-vetor! Por outro lado

$$ds = \frac{c\,dt}{\gamma} \Rightarrow u^\mu = \frac{\gamma}{c}\frac{dx^\mu}{dt} = \frac{\gamma}{c}\left(c, \vec{v}\right)$$

$$\Rightarrow u^\mu = \left(\gamma, \frac{\gamma\vec{v}}{c}\right)$$

Como $p^\mu = \left(mc\gamma, m\gamma\vec{v}\right) = mc\,u^\mu \Rightarrow p^\mu$ é um 4-vetor contra-variante!

4-Vetores trabalhando: Transformação de velocidade de 1 partícula



Em S:

$$u^\mu = \left(\gamma(v), \gamma(v)\frac{\vec{v}}{c}\right)$$

Em S':

$$u'^\mu = \left(\gamma(v'), \gamma(v')\frac{\vec{v}'}{c}\right)$$

u^μ é 4-vetor logo sei:

u'^0 $\qquad$ u'^1

$$u^0 = \gamma(v) = \gamma(v_{rel})\left[\gamma(v') + \frac{v_{rel}}{c}\gamma(v')\frac{v'_x}{c}\right] \qquad (1)$$

$$u^1 = \gamma(v)\frac{v_x}{c} = \gamma(v_{rel})\left[\gamma(v_{rel})\gamma(v')\frac{v'_x}{c} + \frac{v_{rel}}{c}\gamma(v'_1)\right] \qquad (2)$$

u'^1

$$u^2 = \gamma(v)\frac{v_y}{c} = \gamma(v')\frac{v'_y}{c} \qquad (3)$$

$$u^3 = \gamma(v)\frac{v_z}{c} = \gamma(v')\frac{v'_z}{c} \qquad (4)$$

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow v_x = \frac{(v'_x + v_{rel})}{1 + \frac{v_{rel}v'_x}{c^2}}$$

$$\frac{(3)}{(1)} \Rightarrow v_y = \frac{v'_y}{1 + \frac{v_{rel}v'_x}{c^2}}$$

$$\frac{(4)}{(1)} \Rightarrow v_z = \frac{v'_z}{1 + \frac{v_{rel}v'_x}{c^2}}$$

exemplo $\vec{v}' = c\vec{x}$

$$v_x = \frac{c + v_{rel}}{1 + \frac{v_{rel}}{c}} = c$$

$v_y = 0 \qquad v_z = 0$

Oh!

4-Vetor covariante! Sabemos que

$(ct)^2 - \vec{x}^2$ é invariante! Agora definimos

$$x_\mu = (ct, -\vec{x}) \quad \text{(quadrivetor covariante)}$$

i.e, $x^0 = x_0 \quad x_1 = -x^1 \quad x_2 = -x^2 \quad x_3 = -x^3$ (*)

Note que $\sum_{\mu=0}^{3} x^\mu x_\mu = x^0 x_0 + x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3$

$= (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \equiv$ invariante!

Como x_μ se transforma por Lorentz?

Sabemos que:

$$x^0 = \gamma(v)\left(x'^0 + \frac{v}{c} x'^1\right) \overset{(*)}{\Longrightarrow} \quad x_0 = x^0 = \gamma(v)\left(x'_0 - \frac{v}{c} x'_1\right)$$

$$x^1 = \gamma(v)\left(x'^1 + \frac{v}{c} x'^0\right) \overset{(*)}{\Longrightarrow} x_1 = -x^1 = \gamma(v)\left(x'_1 - \frac{v}{c} x'_0\right)$$

$$x^2 = x'^2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = x'_2$$

$$x^3 = x'^3 \quad \Rightarrow \quad x_3 = x'_3$$

Isso é troca $v \to -v$ na transformação de x^μ!!!

Se defino $x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu(v) x'^\nu$ temos

$$\Lambda^\mu{}_\nu(v) = \begin{bmatrix} \gamma & +\gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ +\gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu(-\vartheta)\, x_\nu$$

Um 4-vetor covariante A_μ transforma-se como x_μ!

27/6/23

FATO IMPORTANTE: Mostre que dado dois 4-vetores A^μ e B_ν quaisquer, temos

$$A^\mu B_\mu = \text{invariante de Lorentz}$$

Abra as contas ou escreva como matrizes!

$$x^\mu \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Rightarrow x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x'^\nu \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}}_{x} = [\Lambda(\vartheta)] \underbrace{\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}}_{x'}$$

matriz da página anterior

$$x = [\Lambda]\, x'$$

$$x_\mu = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \equiv x_c \qquad x_c = [\Lambda(-\vartheta)]\, x'_c$$

$$\text{Agora} \quad A^\mu B_\mu \Rightarrow A^T \overset{\text{matriz}}{\ } B_c \overset{\text{Lorentz}}{=} A'^T \underbrace{\Lambda^T(\vartheta)}_{\Lambda(\vartheta) \text{ simétrica}} \Lambda(-\vartheta)\, B'_c$$

$$\Rightarrow A^T B_c = A'^T B'_c \Rightarrow A^\mu B_\mu = A'^\mu B'_\mu .$$

NOTE QUE $[\Lambda]$ é simétrica, i.e., $[\Lambda]^T = [\Lambda]$

Regra importante: Somamos apenas índices covariantes com contravariantes para manter invariância de Lorentz!

$$A_\mu B^\mu \longrightarrow OK \qquad A^\mu B_\mu \longrightarrow OK$$

$$A^\mu A^\mu \longrightarrow \text{"ERRADO"!!!}$$ Não é invariante por Lorentz.

Mostre $\left\{ \quad A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu = A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B} \right.$

IX.8 Métrica

Definimos a métrica $g^{\mu\nu}$:

$$g^{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \mu=\nu=0 \\ -1 & \mu=\nu=1,2,3 \\ 0 & \text{de outra forma} \end{cases}$$

em termos de matriz $[g] = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$

A métrica é tal que:

$$A^{\mu} = g^{\mu\nu} A_{\nu} \qquad (\text{verifique})$$

Também definimos

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \mu = \nu = 0 \\ -1 & \mu = \nu = 1,2,3 \\ 0 & \text{de outra forma} \end{cases}$$

e sua matriz é

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

Note que $A_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu}$ (verifique)

É interessante escrever

$$A^{\mu} B_{\mu} = g^{\mu\nu} A_{\mu} B_{\nu} = A^{\mu} g_{\mu\nu} B^{\nu}. \qquad (\text{verifique})$$

Por transformações de Lorentz (mostre que)

$$g^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} g^{\alpha\beta}$$

Como o invariante é $A^{\mu} B_{\mu} = A'^{\mu} B'_{\mu} \Rightarrow g^{\mu\nu}$ é mesmo em qualquer ref. inercial!!

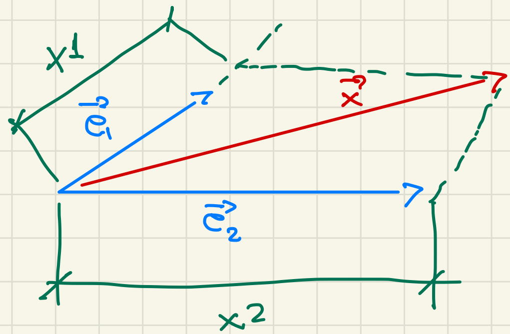
Nomenclatura:

$g^{\mu\nu} \longrightarrow$ tensor 2 vezes contra-variante

$g_{\mu\nu} \longrightarrow$ tensor 2 vezes covariante

IX.9 Interpretação geométrica

Consideremos um plano e a base não ortogonal da figura



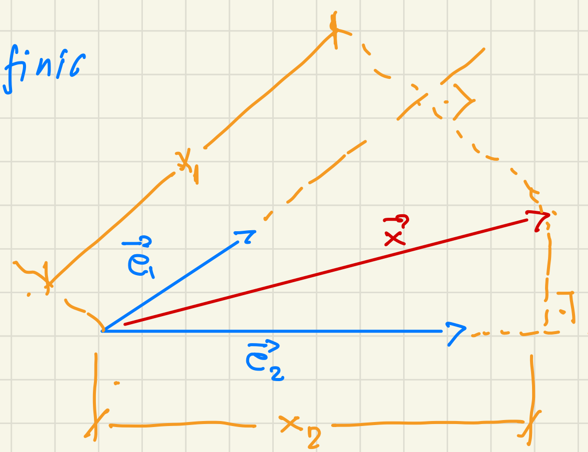
Podemos escrever o vetor $\vec{x}$ como $\vec{x} = x^i \vec{e}_i = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2$

Nada de novo! x^i = componentes contra-variantes!

Mas também podemos definir

$$x_i = \vec{e}_i \cdot \vec{x}$$

↑ Covariante



Para base ortonormal $x^i = x_i$!

Aviso: $\left[\begin{array}{l} x^i \longrightarrow \text{vive no espaço vetorial} \\ x_i \longrightarrow \text{vive no } \underline{\text{dual}} \text{ do espaço vetorial} \end{array}\right]$

E o que é a métrica?

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = x^i \vec{e}_i \cdot x^j \vec{e}_j = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \; x^i x^j$$

Portanto a métrica $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$

Mais $g_{ij} x^j = \vec{e}_i \cdot \underbrace{\vec{e}_j x^j}_{\vec{x}} = \vec{e}_i \cdot \vec{x} = x_i$ Oh!!!...

E mudanças de base? $\vec{e}'_i = a_i{}^j \, \vec{e}_j$

Para as componentes covariantes: $x'_i = \vec{e}'_i \cdot \vec{x} = a_i{}^j \, \vec{x} \cdot \vec{e}_j$

$$\Rightarrow x'_i = a_i{}^j \, \vec{e}_j$$

Para as componentes contra-variantes:

$$\vec{x} = x'^i \, \vec{e}'_i = x'^i a_i{}^j \, \vec{e}_j \Longrightarrow x^j = a_i{}^j \, x'^i$$

A inversa de a: $(a^{-1})_i{}^j \, a_j{}^k = \delta_i{}^k = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$

$$x^j = a_i{}^j x'^i = (a^T)^j{}_i \, x'^i$$

transposta

$$(a^{-1})^{T\,k}{}_j \Rightarrow (a^{-1})^{T\,k}{}_j \, x^j = \underbrace{(a^{-1})^{T\,k}{}_j \, (a^T)^j{}_i}_{\delta^k{}_i} \, x'^i$$

$$\therefore \quad x'^k = (a^{-1\,T})^k{}_j \, x^j$$

Logo a matriz de transformação é a transposta inversa!

Compare com os 4-vetores em relatividade!

$\rightarrow$ Def geral: $A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \qquad A'_\mu = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} A_\nu \quad \ldots$

Para saber mais:

Landau, volume 2, capítulos 1 e 2

hfleming.com $\longrightarrow$ notas de tensores!

THE END

for the time being!