30/03/23

3. Dinâmica Lagrangeana

Motivação: consideremos o problema de 1 partícula em 1D

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}(\dot{x})^2\right] = -\frac{\partial}{\partial x}U$$

Agora somando zeros

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - U\right)\right] = +\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - U(x)\right]$$

Definindo a Lagrangiana $L \equiv T - U \Longrightarrow$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

i.e, uma forma alternativa de escrever a 2ª Lei de Newton

Por que? Esse formalismo incorpora vínculos, outros sistemas de coordenadas, simetrias, etc facilmente!!

3.1 Princípio de d'Alembert

Considere o espaço de configurações de um sistema sujeito a um vínculo holonômico $f(\vec{r}_1 \ldots \vec{r}_N, t) = 0$

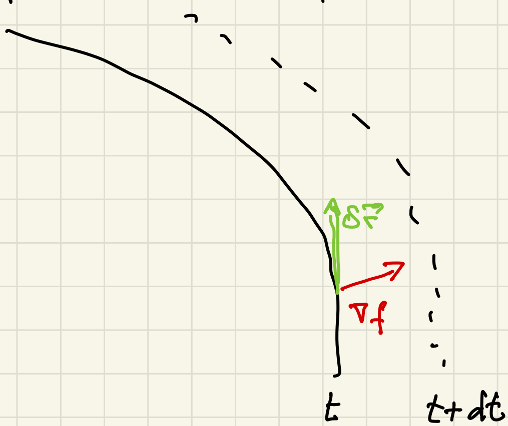
Um deslocamento virtual é um infinitesimal a tempo fixo que leva a outra possível configuração do sistema.

$$\vec{r}_i \longrightarrow \vec{r}_i + \delta \vec{r}_i \qquad i = 1, \dots N \text{ (número de partículas)}$$

Note:

1) tempo fixo (não é solução da eq. de movimento)
2) infinitesimal
3) não viola vínculos

Exemplo: Partícula presa a uma superfície $f(\vec{r}, t) = 0$



$$\vec{r} \to \vec{r} + \delta \vec{r}$$

$$f(\vec{r} + \delta \vec{r}, t) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{f(\vec{r}, t)}_{0} + \delta \vec{r} \cdot \nabla f(\vec{r}, t) = 0$$

$$\Rightarrow \delta \vec{r} \cdot \nabla f(\vec{r}, t) = 0$$

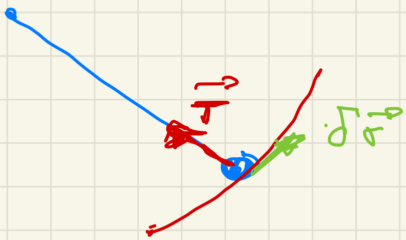
$\Rightarrow$ $\delta \vec{r}$ é tangente à superfície.

Obs.: Para um deslocamento real $\vec{r} \to \vec{r} + d\vec{r}$
$t \to t + dt$

$$f(\vec{r} + d\vec{r}, t + dt) = 0 \Rightarrow \nabla f \cdot d\vec{r} + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$$

Forças responsáveis por vínculos são, em geral, ortogonais à superfície em que a partícula está presa.
Por exemplo, considere o pêndulo plano

$$W_{virtual} = \sum_{i=1}^{N} \delta\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i$$



Consequentemente, as forças de vínculo não realizam trabalho em um deslocamento virtual!

Princípio do trabalho virtual:

Em problemas com vínculos obter o movimento a partir de

$$\vec{F}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

pode não ser prático. Por exemplo, há um número maior de coordenadas que o mínimo necessário.

Além disso,

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i$$

forças aplicadas

força de vínculo.

Para o pêndulo plano $\vec{f} = \vec{T}$ que deve ser determinada ao passo que $\vec{P} = m\vec{g} = \vec{F}_i^{(a)}$ é dada! Por isso precisamos de outras formas de tratar o problema.

Em situações estáticas: $\vec{F}_i = 0$ (equilíbrio)

Logo: $$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \implies$$

$$\sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta\vec{r}_i + \underbrace{\sum_i \vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}_i}_{0} = 0$$

$\Rightarrow$ princípio do trabalho virtual! $$\boxed{\sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta\vec{r}_i = 0}$$

[Johann Bernoulli (1717)]

O princípio de d'Alembert generaliza para o caso dinâmico.

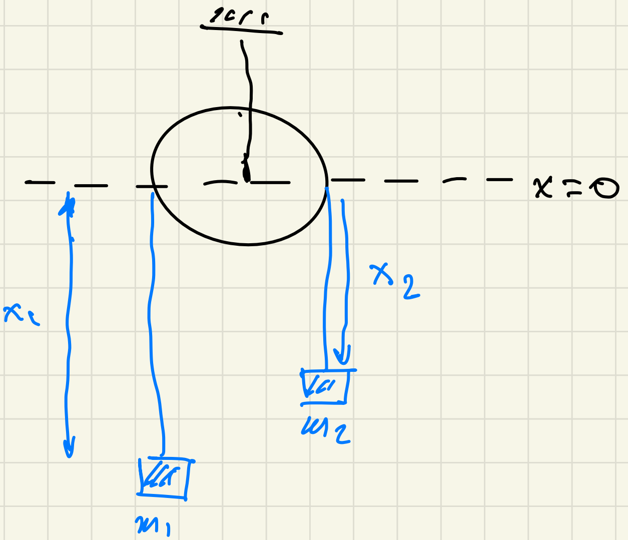
$$\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i \implies \vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = 0 \quad (\text{oh} :-) \implies$$

$$\sum_i (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \implies \boxed{\sum_i \left(\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i\right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0}$$

$\vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i$ (!!)

Obs.: As forças ligadas ao vínculo não aparecem nesta formulação!!

Exemplo: Máquina de Atwood (sorry! :-)



Para um fio inextensível, polia sem massa etc, o vínculo é

$$x_1 + x_2 = c^{te} = \ell$$

$$\Rightarrow \delta x_1 + \delta x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \delta x_1 = -\delta x_2$$

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 = \vec{F}_1^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{F}_2^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_2$$

$$= m_1 g\, \vec{e}_x \cdot \delta \vec{r}_1 + m_2 g\, \vec{e}_x \cdot \delta \vec{r}_2$$

$$\Rightarrow m_1 \ddot{x}_1 \delta x_1 + m_2 \ddot{x}_2 \delta r_2 = m_1 g \delta x_1 + m_2 g \delta x_2$$

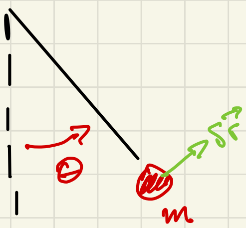
Usando o vínculo:

$$m_1 \ddot{x}_1 \delta x_1 + m_2 (-\ddot{x}_1)(-\delta x_1) = m g \delta x_1 - m_2 g \delta x_1$$

$$\forall \delta x_1 \Rightarrow (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 = (m_1 - m_2) g$$

e não usamos a tensão do fio!

Exemplo: Pêndulo plano



vínculo $|\vec{r}| = c^{te} = L$

$$\Rightarrow \delta\vec{r} = L\,\delta\theta\,\vec{e}_\theta$$

$$\vec{p} = mL\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta \Rightarrow \dot{\vec{p}} = mL\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

$$\left(m\vec{g}\cdot\delta\vec{r} - mL\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta\cdot\delta\vec{r}\right) = 0 = L\left[-mg\sin\theta\,\delta\theta - mL\ddot{\theta}\,\delta\theta\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

OK

3.2 Equações de Lagrange

Seja um sistema de N partículas e p vínculos holonômicos

$$f_1(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t) = 0$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$f_p(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t) = 0$$

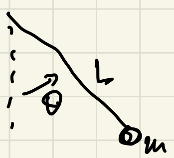
Comentar

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial q_j}\,dq_j + \frac{\partial f_k}{\partial t}\,dt = 0$$

O número de graus de liberdade é $n = 3N - p$. Dado que os vínculos são holonômicos escolhemos n coordenadas generalizadas tais que $\quad \vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1 \dots q_n; t) \quad i = 1 \dots N$

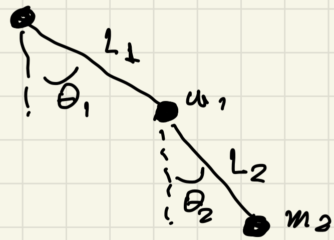
que satisfazem os $\underline{p}$ vínculos. Trabalhemos no espaço de configurações $(q_1 \dots q_n)$.

Exemplos os pêndulos planos



$q \equiv \theta$

ou



$q_1 = \theta_1 \qquad q_2 = \theta_2$

Apliquemos o princípio de d'Alembert no espaço de configurações:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

(lembre-se o tempo está fixo)

Por outro lado

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

Nova notação: todas as forças são as aplicadas, logo vamos parar de anotá-las por $\vec{F}^{(a)} \to \vec{F}$

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

Logo definimos a força generalizada $Q_k = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{k=1}^{n} Q_k \delta q_k$$

Q_k pode não ter unidade de força mas $Q_k \cdot \delta q_k$ tem dimensão de trabalho

Também precisamos de

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

Trabalhemos esta expressão

$$\sum_{i=1}^{N} m \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \right\}$$

Mas

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_k} \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right] = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k}$$

Mais ainda

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right) = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

Logo temos que:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k}\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{1}{2}m_i \vec{v}_i^{\,2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{2}m_i \vec{v}_i^{\,2}\right)\right\}$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}$$

$$T \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\vec{v}_i^{\,2}$$ ≡ energia cinética total!

Aplicando d'Alembert:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(-\vec{F}_i + \dot{\vec{p}}_i\right)\cdot\delta \vec{r}_i = 0 = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - \delta Q_k\right]\delta q_k$$

Mas os δq_k são arbitrários e independentes!

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \qquad k = 1 \ldots n$$

Equações de Lagrange.